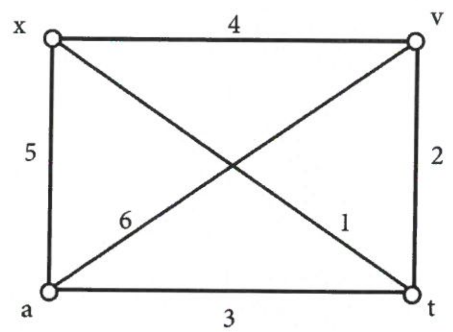
1 Kinematik

1.1 Die sechs Grundaufgaben der geradlinigen Bewegung

$\tan = \frac{\sin}{\cos}$

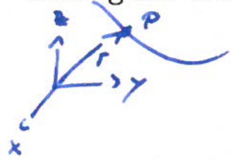
$\tan\alpha = \frac{Ge}{An}$; $\sin\alpha = \frac{Ge}{Hy}$; $\cos\alpha = \frac{An}{Hy}$

Auftretende Größen:



Zeit:	t	[s]
Ort:	x	[m]
Geschwindigkeit:	v	[m/s]
Beschleunigung:	a	[m/s²]

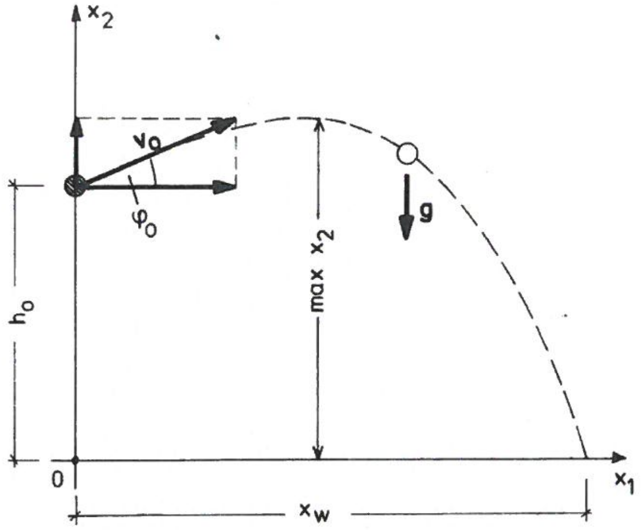
Die kinematischen Größen sind entweder in Abhängigkeit von der Zeit t oder von einer der beiden kinematischen Größen x oder v gegeben. Die Funktionen sollen invertierbar sein. Lösung der Grundaufgaben u.U. mit den Anfangsbedingungen zur Zeit $t = t_0$:



$$x_0 = x(t_0); \quad v_0 = v(t_0)$$

1. Grundaufgabe Gegeben: $x = x(t)$ $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$	2. Grundaufgabe Gegeben: $v = v(t)$ $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$
3. Grundaufgabe Gegeben: $a = a(t)$ $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$ $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a(t)dtdt$	4. Grundaufgabe Gegeben: $v = v(x)$ $v(x) = \frac{dx}{dt} \leftrightarrow dt = \frac{dx}{v(x)}$ $t(x) = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{v(\tilde{x})}$ $a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v(x)$
5. Grundaufgabe Gegeben: $a = a(x)$ $a(x) = \frac{dv}{dx}v(x) \leftrightarrow a(x)dx = v(x)dv$ $v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)dx}$ weiter 4. Grundaufgabe	6. Grundaufgabe Gegeben: $a = a(v)$ $a(v) = \frac{dv}{dt} \leftrightarrow t(v) = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)}$ weiter 2. Grundaufgabe

$J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = Nm = Ws$ "Wattsek"



$$a_1 = \frac{Dv_1}{Dt} = 0$$
$$\rightarrow \quad v_1 = v_0 \cos(\varphi_0) = \text{konst.}$$

$$a_2 = \frac{Dv_2}{Dt} = -g$$
$$\rightarrow \quad v_2 = v_0 \sin(\varphi_0) - gt$$

1.2 Der schiefe Wurf

Bewegungsgleichung:

$$x_1(t) = v_0 \cos(\varphi_0) t$$
$$x_2(t) = h_0 + v_0 \sin(\varphi_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

Wurfparabel: (Elimination von t)

$$x_2(x_1) = h_0 + x_1 \tan(\varphi_0) - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\varphi_0)} x_1^2$$

Charakteristische Werte:

$$\text{Wurfzeit}: t_w = \frac{v_0 \sin(\varphi_0)}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\varphi_0)}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}$$

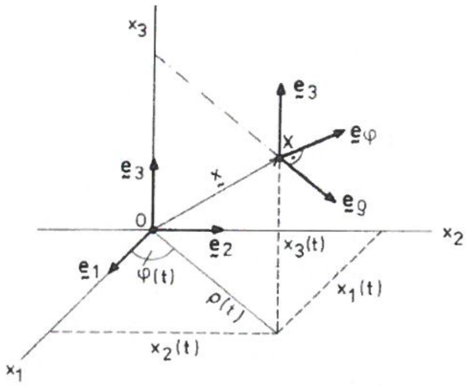
Geht manchmal auch [illegible] leichter

$$\text{Wurfhöhe}: x_{2,max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\varphi_0)$$

$$\text{Wurfweite}: x_w = v_0 \cos(\varphi_0) t_w$$

Translation		Rotation um feste Achse a-a	
s	Weg	Winkel	φ
$v = \dot{s}$	Geschwindigkeit	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
$a = \dot{v} = \ddot{s}$	Beschleunigung	Winkelbeschleunigung	$\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
m	Masse	Massenträgheitsmoment	Θ_a
F	Kraft (in Wegrichtung)	Moment (um a-a)	M_a
$p = m \cdot v$	Impuls	Drehimpuls	$L_a = \Theta_a \omega$
$ma = F$	Kräftesatz	Momentensatz	$\Theta_a \dot{\omega} = M_a$
$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	kinetische Energie	kinetische Energie	$E_k = \frac{1}{2} \Theta_a \omega^2$
$W = \int F ds$	Arbeit	Arbeit	$W = \int M_a d\varphi$
$P = Fv$	Leistung	Leistung	$P = M_a \omega$

1.3 Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten



1.3.1 Lage des materiellen Punktes x

$$\mathbf{x} = \mathrm{x_i(t)}\mathbf{e}_\mathrm{i} = \mathrm{x_1(t)}\mathbf{e}_1 + \mathrm{x_2(t)}\mathbf{e}_2 + \mathrm{x_3(t)}\mathbf{e}_3$$

1.3.2 Übergang zu Zylinderkoordinaten

$$\mathrm{x_i} = \mathrm{x_i}\{\rho(\mathrm{t}), \varphi(\mathrm{t}), \theta_3(\mathrm{t})\} \rightarrow \begin{cases} \mathrm{x_1} = \rho\cos(\varphi) \\ \mathrm{x_2} = \rho\sin(\varphi) \\ \mathrm{x_3} = \theta_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{x} = \rho\cos(\varphi)\mathbf{e}_1 + \rho\sin(\varphi)\mathbf{e}_2 + \mathrm{x_3}\mathbf{e}_3$$

1.3.3 Neues orthonormiertes Basissystem im materiellen Punkt X

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\rho} = \cos(\varphi)\mathbf{e}_1 + \sin(\varphi)\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\varphi} = -\sin(\varphi)\mathbf{e}_1 + \cos(\varphi)\mathbf{e}_2 \\
\mathbf{e}_3 &= \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial x_3} = \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{x} &= \rho\mathbf{e}_\rho + x_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

1.3.4 Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{D}\mathbf{x}}{\mathrm{Dt}} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = \dot{\mathrm{x}}_1\mathbf{e}_1 + \dot{\mathrm{x}}_2\mathbf{e}_2 + \dot{\mathrm{x}}_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{\mathrm{x}}_3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_\rho &= \dot{\rho} && \hat{=} \text{ Radialgeschw.} \\
\mathbf{v}_\varphi &= \rho\,\dot{\varphi} && \hat{=} \text{ Tangentialgeschw.} \\
\mathbf{v}_3 &= \dot{\mathrm{x}}_3 && \hat{=} \text{ Axialgeschw.}
\end{aligned}$$

Translatorische Führungsbewegung

$V_{abs} = V_F + V_{rel}$

V_F = Führungsgeschw. $\hat{=}$ Bootsgeschw.

V_{rel} = V abspringende Person

V_{abs} = zum rechnen umwandeln

1.3.5 Beschleunigung

$$\mathbf{a} = \frac{D^2\mathbf{x}}{Dt^2} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \ddot{x}_1\mathbf{e}_1 + \ddot{x}_2\mathbf{e}_2 + \ddot{x}_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi + \ddot{x}_3\mathbf{e}_3 \end{cases} \begin{array}{ll} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 & \hat{=}\ \text{Radialbeschl.} \\ a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} & \hat{=}\ \text{Tangentialbeschl.} \\ a_3 = \ddot{x}_3 & \hat{=}\ \text{Axialbeschl.} \end{array}$$

1.3.6 Sonderfälle

Bewegung auf einer Zylinderfläche: $\rho = \text{konst.} \rightarrow \dot{\rho} = 0$

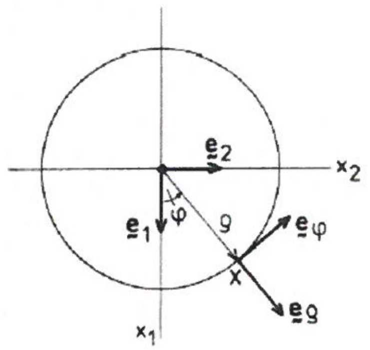
$$\mathbf{v} = \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \dot{x}_3\mathbf{e}_3 \qquad \mathbf{a} = -\rho\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_\rho + \rho\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \ddot{x}_3\mathbf{e}_3$$

Ebene Kreisbewegung: $x_3 = 0$ sowie $\rho = \text{konst.} \rightarrow \dot{\rho} = 0$

$$\mathbf{v} = \rho\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi \qquad \mathbf{a} = -\rho\dot{\varphi}^2\mathbf{e}_\rho + \rho\ddot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

$\rho \hat{=}$ Radius

↳ "Polarkoordinaten"



Winkelgeschwindigkeit:

$\varphi = \omega t \qquad \omega = \dot{\varphi} = \frac{D\varphi}{Dt}$

Winkelbeschleunigung:

$$\dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \frac{D^2\varphi}{Dt^2}$$

Tangentiale Geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit): $v_\varphi = \rho\omega$

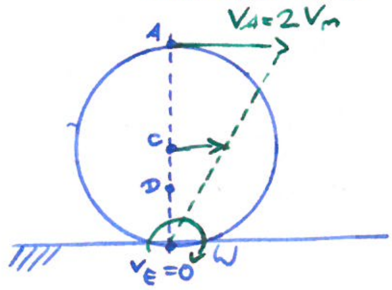
Tangentiale Beschleunigung (Bahnbeschleunigung): $a_\varphi = \rho\dot{\omega}$

Radiale Beschleunigung (Zentrifugal-/petalbeschleunigung): $a_\rho = -\rho\omega^2 = -\frac{v_\varphi^2}{\rho}$
(zum Kreismittelpunkt)

Weitere Begriffe:

Drehzahl:	$n\ [\text{min}^{-1}]$ bzw. $\nu\ [\text{s}^{-1}]$
Umlaufzeit:	$T = \frac{1}{\nu} = \frac{60}{n}\ [\text{s}]$
Winkelgeschwindigkeit:	$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ für $\omega = \text{konst.}$

Rollendes Rad



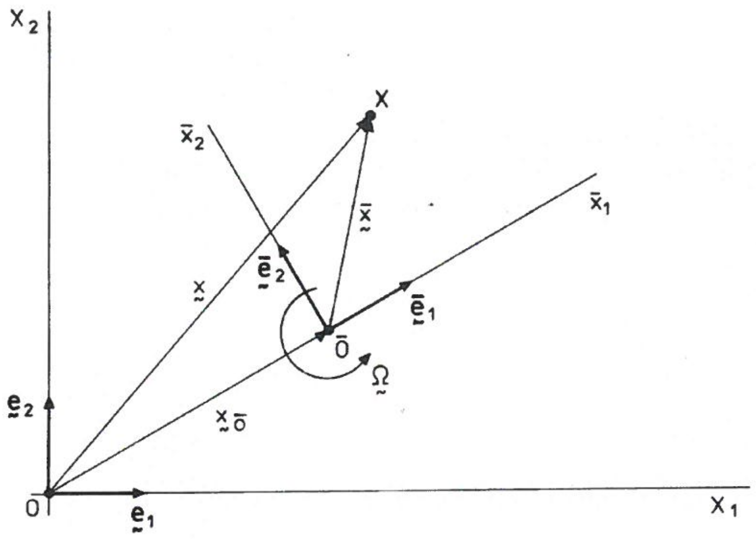
$V_E = V_D + \omega \times \overline{DE}$

$V_D = \omega \times \overline{DE} = V_C \cdot \frac{r_D}{r}$

$V_C = r \cdot \omega = \vec{\omega} \times \vec{r}$

1.4 Kinematik der Relativbewegung

1.4.1 Beschreibung des ebenen Falles



1.4.2 Beschreibung der Bewegung des materiellen Punktes x

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\bar{0}} + \overline{\mathbf{x}}$$

$\mathbf{x}$: Beschreibung der Bewegung des materiellen Punktes im raumfesten Basissystem
$\mathbf{x}_{\bar{0}}$: Beschreibung der Bewegung des Ursprungs $\bar{0}$ bezogen auf das raumfeste Basissystem
$\overline{\mathbf{x}}$: Beschreibung der Bewegung des materiellen Punktes im bewegten Basissystem

1.4.3 Beschreibung der Geschwindigkeit des materiellen Punktes x

$$\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}} + \underbrace{\mathbf{v}_{\bar{0}}}_{\mathbf{v}_f} + \boldsymbol{\Omega} \times \overline{\mathbf{x}}$$

$V_B = V_A + \omega \times x_{AB}$

$\mathbf{v}$: Geschwindigkeit des materiellen Punktes bezogen auf das raumfeste Basissystem, *Absolutgeschwindigkeit*

$\mathbf{v}_{\bar{0}}$: Geschwindigkeit des Ursprungs $\bar{0}$ bezogen auf das raumfeste Basissystem

$\overline{\mathbf{v}}$: Geschwindigkeit des materiellen Punktes bezogen auf das bewegte Basis-/Führungssystem, *Relativgeschwindigkeit*

$\boldsymbol{\Omega}$: Winkelgeschwindigkeit des Führungssystems

$\mathbf{v}_f$: Führungsgeschwindigkeit

1.4.4 Beschreibung der Beschleunigung des materiellen Punktes x

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + \underbrace{\mathbf{a}_{\bar{0}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{x}})}_{\mathbf{a}_f} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}}}_{\mathbf{a}_c}$$

$\mathbf{a}$: Beschleunigung des materiellen Punktes bezogen auf das raumfeste Basissystem, *Absolutbeschleunigung*

$\mathbf{a}_{\bar{0}}$: Beschleunigung des Ursprungs $\bar{0}$ bezogen auf das raumfeste Basissystem

$\bar{\mathbf{a}}$: Beschleunigung des materiellen Punktes bezogen auf das Führungssystem, *Relativbeschleunigung*

$\mathbf{a}_f$: Führungsbeschleunigung

$\mathbf{a}_c$: *Coriolis*beschleunigung

1.4.5 Sonderfälle

Gleichförmige Translationsbewegung des Führungssystems:

$$\mathbf{a}_{\bar{0}} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\bar{0}} + \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} \end{cases}$$

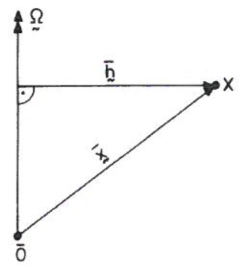
Geradlinig beschleunigte Bewegung des Führungssystems:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\bar{0}} + \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}_{\bar{0}} + \bar{\mathbf{a}} \end{cases}$$

Gleichförmige Rotationsbewegung des Führungssystems:

$$\mathbf{v}_{\bar{0}} = \mathbf{0}, \mathbf{a}_{\bar{0}} = \mathbf{0}, \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{x}}) \end{cases}$$

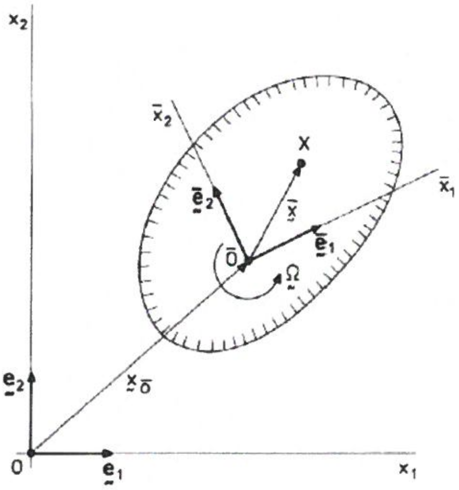
andere Darstellung:



$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{v}} - \Omega^2 \overline{h}$$
mit $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$

1.5 Kinematik des starren Körpers

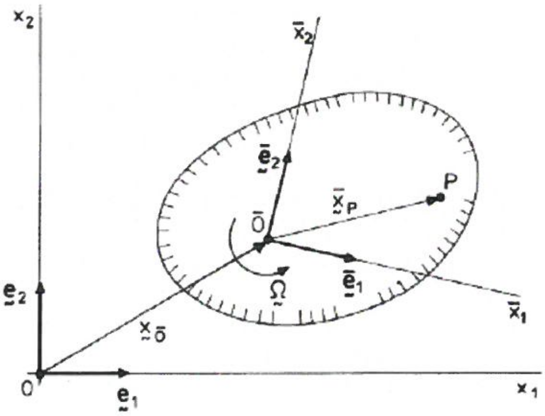
1.5.1 Allgemeiner Bewegungszustand eines materiellen Punktes x



körperfeste, orthonormierte Basisvektoren $\overline{\mathbf{e}}_i$:

$$\overline{\mathbf{x}} = \text{konstant},$$
$$\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0},$$
$$\overline{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$$
$$\rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\bar{0}} + \boldsymbol{\Omega} \times \overline{\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\bar{0}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \overline{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \overline{\mathbf{x}})$$

1.5.2 Momentanpol P (ebener Fall)

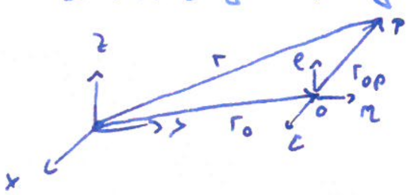


Definition des Momentanpols P (momentaner Geschwindigkeitspol):

$$\mathbf{v_P} = \mathbf{0}$$
$$\rightarrow \mathbf{v}_{\bar{0}} + \boldsymbol{\Omega} \times \overline{\mathbf{x}}_P = \mathbf{0}$$
$$\overline{\mathbf{x}}_P = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\bar{0}}}{\Omega^2}$$
$$\overline{\mathbf{x}}_P = \frac{v_{\bar{0}}}{\Omega}$$

Newtonsche Gesetze

1. Ein kräftefreier Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit
2. $F = m \cdot a$ (Nur bei ruhendem Bezugssystem) (Inertialsystem)
3. Kraft gleich Gegenkraft : $F_{A \to B} = -F_{B \to A}$



$r = r_o + r_{op}$

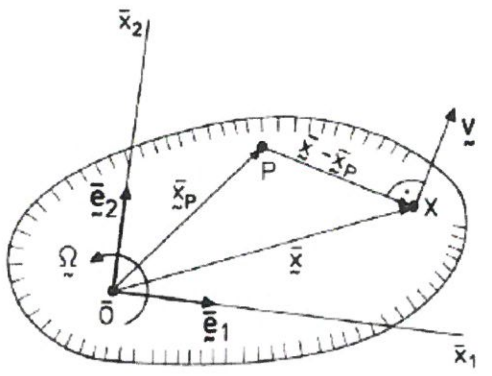
$v_a = \dot{r}$

$a_a = \ddot{r}$

$a_f = \ddot{r}_o$

$a_r = \ddot{r}_{op}$

1.5.3 Geschwindigkeitszustand eines materiellen Punktes x bei bekanntem Momentanpol P



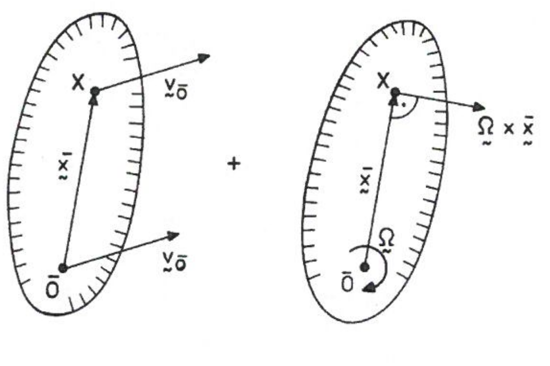
Der Geschwindigkeitsvektor **v** steht senkrecht auf dem „Polstrahl" $\overline{PX}$:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_P)$$
$$\mathrm{v} = |\boldsymbol{\Omega}| \cdot |\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_P|$$

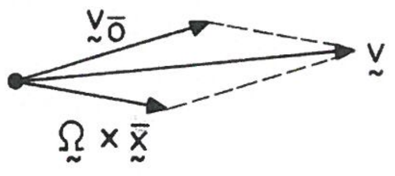
1.5.4 Allgemeiner Bewegungszustand eines starren Körpers

Mit der Angabe von zwei Kinematen lässt sich die Bewegung eines starren Körpers eindeutig beschreiben. Ist der Momentanpol P bekannt, reicht sogar die Angabe einer kinematischen Größe.

Beispiel:
Gegeben sei die Translationsgeschwindigeit $\mathbf{v}_{\bar{0}}$ des Ursprunges $\bar{0}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$



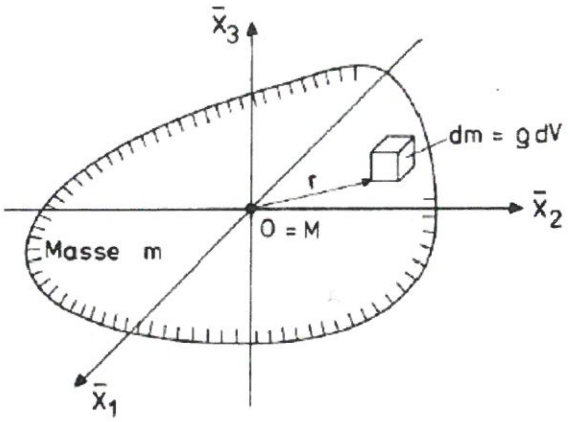
Betrachtung des materiellen Punktes X:



$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\bar{0}} + \boldsymbol{\Omega} \times \bar{\mathbf{x}}$$

2 Massenträgheitsmomente

2.1 Definition



allgemein:

$$\overline{\Theta}_{ik} = \int_V (\overline{X}_j\overline{X}_j\delta_{ik} - \overline{X}_i\overline{X}_k)\rho\, dV$$

- über j summieren, $j = 1, 2, 3$
- Kronecker-Symbol: $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, \text{für } i = k \\ 0, \text{für } i \neq k \end{cases}$
- $\overline{X}_i$: Achsen durch den Massenmittelpunkt

2.1.1 Axiale Massenträgheitsmomente

$$\overline{\Theta}_{11} = \int_V (\overline{X}_2\overline{X}_2 + \overline{X}_3\overline{X}_3)\rho\, dV$$

$$\overline{\Theta}_{22} = \int_V (\overline{X}_1\overline{X}_1 + \overline{X}_3\overline{X}_3)\rho\, dV$$

$$\overline{\Theta}_{33} = \int_V (\overline{X}_1\overline{X}_1 + \overline{X}_2\overline{X}_2)\rho\, dV$$

2.1.2 Deviationsmomente

$$\overline{\Theta}_{12} = \overline{\Theta}_{21} = -\int_V (\overline{X}_1\overline{X}_2)\rho\, dV$$

$$\overline{\Theta}_{13} = \overline{\Theta}_{31} = -\int_V (\overline{X}_1\overline{X}_3)\rho\, dV$$

$$\overline{\Theta}_{23} = \overline{\Theta}_{32} = -\int_V (\overline{X}_2\overline{X}_3)\rho\, dV$$

2.1.3 Polares Massenträgheitsmoment

$$\Theta_P = \int_V r^2 \rho \, dV$$

$$\Theta_P = \int_V (\overline{X}_1\overline{X}_1 + \overline{X}_2\overline{X}_2 + \overline{X}_3\overline{X}_3)\rho \, dV$$

$$\Theta_P = \frac{1}{2}(\overline{\Theta}_{11} + \overline{\Theta}_{22} + \overline{\Theta}_{33})$$

2.1.4 Satz von Steiner

Massenträgheitsmomente bezüglich einer um den Betrag a parallel zur Schwerachse verschobenen Achse, z.B.

$$\hat{\Theta}_{11} = \overline{\Theta}_{11} + ma^2$$

2.1.5 Schwerpunkthauptachsen

Die Deviationsmomente bezüglich der Schwerpunktachsen verschwinden, d.h.

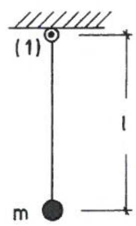
$$\Theta_{12} = \Theta_{13} = \Theta_{23} = 0$$

2.2 Beispiele

2.2.1 Punktmassen

- Mathematisches Pendel:

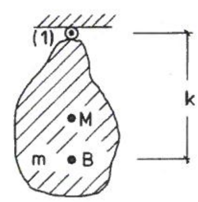
  $\Theta_1 = ml^2$



- Beliebiger Körper, durch Punktmasse ersetzt:

  Trägheitsarm $k = \sqrt{\frac{\Theta_1}{m}}$

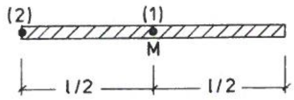
  $\Theta_1 = mk^2$



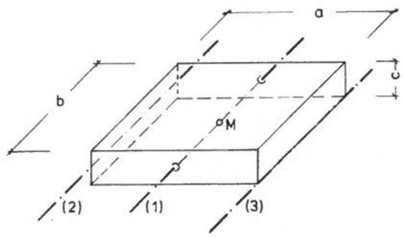
2.2.2 Linienmassen

Langer, schlanker Stab mit konstanter Massenbelegung; $\rho =$ konst.

$$\Theta_1 = \Theta_M = \frac{ml^2}{12}, \quad \Theta_2 = \frac{ml^2}{3}$$



2.2.3 Räumlich verteilte, homogene Massen



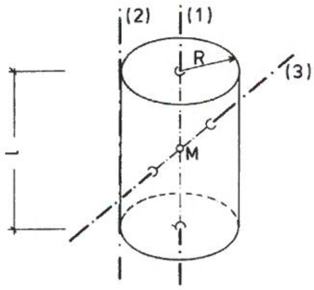
- Quader:

$$\Theta_1 = m\frac{a^2 + c^2}{12}$$

$$\Theta_2 = m(\frac{a^2}{3} + \frac{c^2}{12})$$

$$\Theta_3 = m\frac{a^2 + c^2}{3}$$

$$V = abc$$



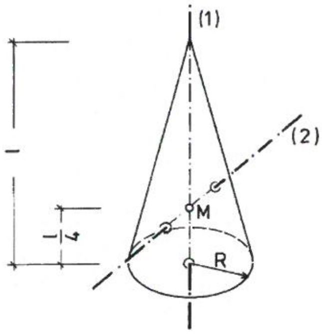
- Kreiszylinder:

$$\Theta_1 = \frac{1}{2}mR^2$$ → kreis

$$\Theta_2 = \frac{3}{2}mR^2$$ Nicht vergessen!

$$\Theta_3 = m(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12})$$

$$V = R^2\pi l$$

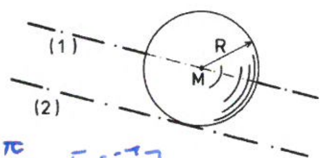


- Kegel:

$$\Theta_1 = \frac{3}{10}mR^2$$

$$\Theta_2 = \frac{3}{80}m(4R^2 + l^2)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 l$$



- Kugel:

$$\Theta_1 = \frac{2}{5}mR^2$$

$$\Theta_2 = \frac{7}{5}mR^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Winkelgeschwindigkeit Planet: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ $[s^{-1}]$

$\omega_1 \Theta_1 = \omega_2 \Theta_2$

$Hz \cdot 2\pi = \frac{rad}{s} = \omega$

2.2.4 Homogener Hohlkörper

$$\Theta = \Theta_{\text{außen}} - \Theta_{\text{innen}}$$

z.B. Massenträgheitsmoment einer Hohlkugel bezüglich der Schwerachse:

$$\Theta_1 = \frac{2}{5} m_{\text{außen}} R^2 - \frac{2}{5} m_{\text{innen}} r^2 = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$

2.2.5 Beliebig zusammengesetzter Körper

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n} \Theta_i \qquad \text{mit n Teilkörpern}$$

Probleme der Starrkörperbewegung:
- Skizze mit allen Kräften
- Wahl eines Koordinatensystems
- Aufstellen der Bewegungsgleichungen. Bezugspunkt beim Momentensatz ist dabei Schwerpkt. oder fester Pkt.
- Bei Stoßproblemen aufstellen der Impulssätze für beteiligte Körper und der Stoßbedingungen
- Formulierung benötigter kinematischer Beziehungen
- Arbeits- oder Energiesatz aufstellen wenn nötig.

3 Erhaltungssätze der Dynamik

3.1 Erhaltung der Bewegungsgröße

(auch: „Dynamisches Grundgesetz", Impulserhaltung)

Die Bewegungsgröße $\mathbf{B}$ ist definiert als:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{m}\mathbf{x}_{\mathrm{M}})$$

mit $\mathbf{x}_{\mathrm{M}}$: Ortsvektor des Massenmittelpunkts

Ist die Masse m des Körpers konstant, so erhält man die Bewegungsgröße/den Impuls zu:

$$\mathbf{B} = \mathrm{m}\mathbf{v}_{\mathrm{M}}$$

mit $\mathbf{v}_{\mathrm{M}}$: Geschwindigkeitsvektor des Massenmittelpunkts

Impulssatz: Die materielle zeitliche Ableitung der Bewegungsgröße eines Körpers ist gleich der von außen auf den Körper einwirkenden Resultierenden der äußeren Kräfte.

$$\underline{\mathbf{F}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{dt}} = \dot{\mathbf{B}} = \underline{\mathrm{m}\mathbf{a}_{\mathrm{M}}}$$

$$\sum M_{hp} = \Theta_{hp}\dot{\omega} = \Theta\ddot{\varphi} = \Theta\frac{\ddot{x}}{r}$$

mit $\mathbf{a}_{\mathrm{M}}$: Beschleunigungsvektor des Massenmittelpunkts

Wenn $\mathbf{F}$ Null ist, bleibt die Bewegungsgröße unverändert (Erhaltung der Bewegungsgröße bzw. Impulserhaltung):

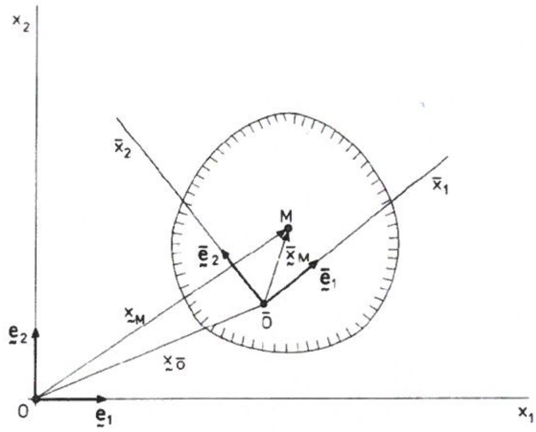
$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \text{konst.}$$

3.2 Drehimpulssatz

Drehimpulssatz/Drallsatz: Die materielle zeitliche Ableitung des Drehimpulses/Dralls eines Körpers bezogen auf einen raumfesten Punkt 0 ist gleich dem resultierenden Moment der auf den Körper angreifenden Kräfte bezogen auf den gleichen raumfesten Punkt 0.

$$\mathbf{M}_{(0)} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}_{(0)}}{\mathrm{dt}}$$

Kraft mit Potential $\hat{=}$ konservative Kraft -> Arbeit ist Wegunabhängig
-> Es existiert ein Potential $\Pi = -W$



$\mathbf{H}_{(0)}$ ist der Drall bezogen auf den raumfesten Ursprung 0:

$$\mathbf{H}_{(0)} = \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{v})\, \mathrm{dm}$$

Entsprechend kann der Drall bezüglich des körperfesten Ursprungs $\bar{0}$ angegeben werden:

$$\mathbf{H}_{(\bar{0})} = \int_V (\bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{v}})\, \mathrm{dm}$$

Setzt man wiederum eine konstante Masse m voraus, lautet der Drallsatz wie folgt:

$$\mathbf{M}_{(0)} = \mathbf{x}_{\bar{0}} \times \mathrm{m}\dot{\mathbf{v}}_{\mathrm{M}} + \bar{\mathbf{x}}_{\mathrm{M}} \times \mathrm{m}\dot{\mathbf{v}}_{\bar{0}} + \dot{\mathbf{H}}_{\bar{0}}$$
$$\mathbf{M}_{(\bar{0})} = \bar{\mathbf{x}}_{\mathrm{M}} \times \mathrm{m}\dot{\mathbf{v}}_{\bar{0}} + \dot{\mathbf{H}}_{\bar{0}}$$

Sonderfälle:

a.) $\bar{0}$ ist der Beschleunigungspol: $\dot{\mathbf{v}}_{\bar{0}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{M}_{(\bar{0})} = \dot{\mathbf{H}}_{(\bar{0})}$

b.) M liegt auf der Wirkungslinie der Beschleunigung $\bar{0}$: $\bar{\mathbf{x}}_M || \dot{\mathbf{v}}_{\bar{0}} \rightarrow \mathbf{M}_{(\bar{0})} = \dot{\mathbf{H}}_{(\bar{0})}$

c.) $\bar{0}$ und M fallen zusammen: $\bar{\mathbf{x}}_{\mathrm{M}} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{M}_{(\mathrm{M})} = \dot{\mathbf{H}}_{(\mathrm{M})}$

Ebener Bewegungszustand:

- Sonderfall a.) oder b.):

$$\mathbf{M}_{(\bar{0})} = \dot{\Omega}\Theta_{(\bar{0})}\bar{\mathbf{e}}_3 \qquad \text{oder in Komponentenschreibweise: } \mathbf{M}_{(\bar{0})} = \dot{\Omega}\Theta_{(\bar{0})}$$

- Sonderfall c.):

$$\mathbf{M}_{\mathrm{M}} = \dot{\Omega}\Theta_{\mathrm{M}}\bar{\mathbf{e}}_3 \qquad \text{oder in Komponentenschreibweise: } \mathbf{M}_{\mathrm{M}} = \dot{\Omega}\Theta_{\mathrm{M}}$$

3.3 Erhaltung der Energie

In einem abgeschlossenen System ist die materielle zeitliche Ableitung der Energie gleich Null. ↳ Es wirken keine äußeren Kräfte/Momente

$$\dot{E} = 0$$

Impulserhaltung: $P_{B,0} = P_{B,1} + P_{P,1}$

3.3.1 Energiebilanz bei Potentialkräften

$$U + T = \text{konst.}$$

$$\underbrace{-\int_{x_0}^{x} R \, dx}_{\text{Arbeit durch Reibung}} + U_A + T_A = U_E + T_E$$

Potentielle Energie U:

a.) Gewicht: $U = Gh = mgh$

b.) Normalkraftfeder: $U = \frac{1}{2} c_F f^2$

c.) Momentenfeder: $U = \frac{1}{2} c_M \varphi^2$

Kinetische Energie T:

a.) Translation: $T = \frac{1}{2} m v_M^2$

b.) Rotation: $T = \frac{1}{2} \Theta_{(M)} \Omega^2$ $\rightarrow \omega$

Anstelle dieser beiden Anteile kann die kinetische Energie als reine Rotationsenergie bestimmt werden, wenn hier die Sonderfälle a.) bis c.) des Drallsatzes vorliegen:

$$T = \frac{1}{2} \Theta_{(P)} \Omega^2$$

3.3.2 Arbeitssatz bei Berücksichtigung nicht konservativer Kräfte (z.B. Reibungskräfte)

Ebener Bewegungszustand:

$$\int_{x_{A1}}^{x_{E1}} F_1 \, dx_1 + \int_{x_{A2}}^{x_{E2}} F_2 \, dx_2 + \int_{\varphi_A}^{\varphi_E} M_{(M)} \, d\varphi = (U_E + T_E) - (U_A + T_A)$$

TM3 Übung 7

② t_0: $v_1 = 180\ km/h$ $\to = 50\frac{m}{s}$ $v_2 = v_1$ Beschleunigung $a(t) = -10\frac{m}{s}$

$x_1 = 0$ $x_2 = 0{,}2$ sek.

a) ~~180 km/h / 45 m~~

ges: $t(x=45m)$

$$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \iint_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,dt$$

$$= 0 + 50(t-0) + \int_{t_0=0}^{t} -10t\,dt$$

$$= 50t + [-5t^2]_0^t$$

$$45 = 50t - 5t^2$$

$$0 = -5t^2 + 50t - 45 \qquad \text{MNF} \qquad \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 - 4\cdot(-5)\cdot(-45)}}{2\cdot(-5)}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 1s;}\ t = 9s$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$= 50 - 10t$$

$$v(t=1s) = 40\frac{m}{s}$$

b) In 0,5 sek. werden 25 m. zurückgelegt

In 0,2 sek werden 10 m zurückgelegt

↳ verbleibender Bremsweg von t_0 2 bis t_n: 30 m

$$v_2(t_n) = 40\frac{m}{s} = v_0 + \int_{t_0=0{,}5}^{t_n=1} a(t)\,dt$$

$$40 = 50 + (a(t) - 0{,}5\cdot a(t))$$

$$= 50 + a(t)(0{,}5) \to a(t) = -20\frac{m}{s}$$

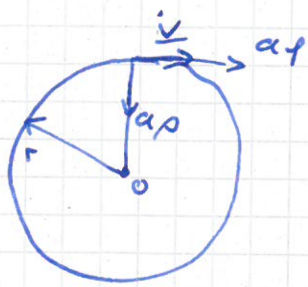
$$x_2(t=1) = x_0 + v_0(t-t_0) + \iint_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,dt$$

$$= 15 + 50(0{,}5-0) + [-10t^2]_{0{,}5}^{0{,}5}$$

$$= 37{,}5m$$

$x_1(t=1) = 45\ m$ $\Delta x_{1,2} = 7{,}5m$

c) $a(t) = \overbrace{-r\omega^2}^{a_{z}(t)}(t)\,e_\rho(t) + r\dot\omega(t)\,e_\varphi(t)$



$r = \frac{400}{\pi}$ $\omega = k\cdot t;\ \dot\omega = 0$

$a(t) = -r\cdot\omega^2(t)\,e_\rho(t)$

$a_z = -r\cdot\omega^2 \mapsto a_z = -4\pi\frac{m}{s^2}$

$v(t) = r\cdot\omega \to \omega = \frac{v(t)}{r} = \frac{40}{\frac{400}{\pi}} = \frac{\pi}{10}\ s^{-1}$

21

d) $v(t) = (v_{max} - v_0)(1 - e^{-\lambda t}) + v_0$ mit $\lambda = 0{,}27\ 1/s$

$v_1(t_{ziel}) = 200{,}88\ \frac{km}{h} = 55{,}8\ \frac{m}{s}$

$v_{max} = 234\ km/h = 65\ \frac{m}{s}$

$55{,}8 = (65 - 40)(1 - e^{-0{,}27 \cdot t}) + 40$

$t_{1\,ziel}$ gesucht $\rightarrow t_{1\,ziel} = 4{,}76$ sek.

$v_{2\,max}$ gesucht, damit $t_{2\,ziel} = 4{,}76$

$v_2(t = 4{,}76) = (v_{max,2} - 40)(1 - e^{-0{,}27\,t}) + 40$

$x_1(t = 4{,}76) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$

$= 234{,}2\ m$

v_{max} in $v(t)$ enthalten, danach auflösen.

$x_2(t = 4{,}76) = 234{,}2 + 7{,}5 = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$

$v_{max,2} = 76{,}04\ \frac{m}{s}$ (Bei Berta Pi einige Rundungsfehler)

TM 3. Übung 2

3

I und IV gleichsetzen, v_0 und x_1 und x_2 einsetzen, nach t auflösen

$$700 - 5t^2 = 700\tan(45°) - \frac{70}{2(\frac{\sqrt{2}}{4})^2\cos^2(45°)}$$

$$\rightarrow t = \pm 4 \rightarrow 4 \text{ sekunden}$$

Zeit bis der erste Stein auf den Boden fallen würde:

$$x_2(t) = \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow \text{bei } x_2 = 700 \text{ Meter}:$$

$$t = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47 \text{ sek.}$$

Der Pfeil muss ca. 0,47 sekunden nach dem Ball mit einer Geschwindigkeit von $\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{m}{s}$ im 45° Winkel in 700 meter Entfernung abgeschossen werden.

③ ~~Funktion des Bodens: $y = x^2$~~

a) Funktion der Flugbahn: $y = 5 + x\cdot\tan(0°) - \frac{g}{2\cdot 20^2\cdot\cos(0°)} x^2$ I

$$= 5 - \frac{x^2}{80}$$

Funktion des Hanges: $a x_1^2 + b x_1 + c = x_2(x_1)$

$x_2(x_1=0) = 0 \rightarrow c = 0$

$x_2(x_1=30) = -10 \rightarrow a\cdot 30^2 + b\cdot 30 = -10$

$x_2'(x_1=0) = 0 \rightarrow 2a x_1 + b = 0 \rightarrow b = 0$

$$\rightarrow a = -\frac{1}{90}$$

Funktion des Hanges: $-\frac{1}{90}x_1^2 = x_2(x_1)$ II

II und I gleichsetzen, nach x_1 auflösen

$$5 - \frac{x^2}{80} = -\frac{x^2}{90} \rightarrow x_1 = 60\,m$$

$$x_2(x_1=60) = -40$$

b) $\varphi_{Hang} = \arctan\left(\frac{60}{-40}\right) = -56{,}3°$

$\varphi_{Flug} = \arctan\left(\frac{60}{-45}\right) = -53{,}7° \rightarrow \Delta\varphi = 3{,}2°$

c) $v_2(t) = -g\cdot t$; $x_1(t) = 20\cdot t \overset{!}{=} 60$

$\rightarrow t = 3$ sek

$V_2(t=3s) = -30\,m/s \rightarrow V_{ges} = \sqrt{(-30)^2 + 20^2}$

$$= 36{,}7\,\frac{m}{s}$$

1

a) $V_x = \cos(\varphi_0) \cdot V_0$ keine Beschl. in x_1-Richtung

$\rightarrow V_x = \text{konst.}$

$x_1(t) = t \cdot V_0 \cdot \cos(\varphi_0)$

$t(x_1) = \dfrac{x_1}{V_0 \cdot \cos(\varphi_0)}$ I

b) Bewegungsgleichung für Parabel in x_2-Richtung: $x_2(t) = V_0 \sin(\varphi_0) t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$

$a_y = -g$

$V_y(t) = -gt + \sin(\varphi_0) V_0$

$x_y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \sin(\varphi_0) V_0 \cdot t$ II

c) Ges: $x_2(x_1)$ $\Rightarrow$ I in II einsetzen.

$$x_2(x_1) = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x_1}{V_0 \cdot \cos(\varphi_0)}\right)^2 + \sin(\varphi_0) \cdot V_0 \cdot \frac{x_1}{V_0 \cdot \cos(\varphi_0)}$$

$$= -\frac{1}{2} g \cdot \frac{x_1^2}{(V_0 \cos(\varphi_0))^2} + \sin(\varphi_0) \frac{x_1}{\cos(\varphi_0)}$$

$$= \frac{-g x_1^2}{2 V_0^2 \cos(\varphi_0)^2} + \tan(\varphi_0) x_1$$

d) $x_2(x_1) = 0$

$\rightarrow$ $x_{1a} = 0$ oder $x_{1w} = \dfrac{2 \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot V_0^2}{g}$

$$t(x_1 = x_{1w}) = \frac{x_{1w}}{V_0 \cdot \cos(\varphi)} = \frac{2 \cdot \sin(\varphi) \cdot V_0}{g}$$

e) Höchster Punkt bei $x_2'(x_1) = 0$

$$x_2'(x_1) = \tan(\varphi_0) - \frac{g x_1}{(V_0 \cos(\varphi_0))^2} = 0$$

$x_{1h} = \dfrac{\sin(\varphi_0) \cdot \cos(\varphi_0) \cdot V_0^2}{g}$ Einsetzen in $x_2(x_1)$

$$x_2(x_{1h}) = \frac{(\sin(\varphi))^2 \cdot V_0^2}{2g}$$

2 $x_{2\text{fallend}}(t) = 100 + \iint_{t_0}^{t} a(t)\, dt\, dt$

$= 100 - \frac{1}{2} g t^2$ I $= 100 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$

$x_{2\text{werfend}}(t) = V_0 \sin(\varphi_0) t - \frac{1}{2} g t^2$ II $= V_0 \frac{1}{\sqrt{2}} t - \frac{1}{2} \cdot 10 t^2$

$x_{1\text{werfend}}(t) = V_0 \cos(\varphi_0) t$ III $= V_0 \frac{1}{\sqrt{2}} t$

$x_{2w}(x_1) = x_1 \tan(\varphi_0) - \dfrac{g}{2 V_0^2 \cos^2(\varphi_0)}$ IV

$x_{2w}(x_1 = 100) \overset{!}{=} 20 \rightarrow V_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

~~Übung [illegible]~~

1

a) Beschleunigung konst $\rightarrow a(t) = g$

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = gt + C_1 = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \frac{1}{2} g t^2 + C_1 t + C_2$$

$$v(t) = x' = \frac{dx}{dt} \rightarrow v(t)\,dt = dx$$

$$\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} dx = x - x_0$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + \int_{t}^{t_0} \left(v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \right) dt$$

$$= x_0 + v_0(t - t_0) + \iint_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,dt$$

b) $v(t) = 0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \qquad a(t) = g$

$$= [gt]_{t_0}^{t} = g(t - t_0)$$

$v(t) \cdot g = t - t_0 \qquad x(t_h) = h$

$v(t) \cdot g + t_0 = t \qquad h = x_0 + \underbrace{v_0(t_h - t_0)}_{=0} + \iint_{t_0}^{t_h} a(t)\,dt\,dt$

2

a) ges: t_h

TM 3 Übung 3 $\overline{\text{I}}$

(1) Ges: $\underline{v_C}$ und ω_2

$v_C = R_2 \cdot \omega_2$

Geschw. beliebiger Pkt: $v_P = r_P \omega = v_C \frac{r_P}{r}$

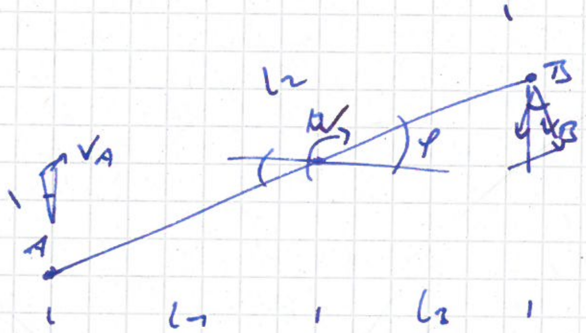
$v_D = v_B$ $R_1\omega_1$

$v_D = v_B = R_1\omega_1 = \omega_2 \cdot (R_2 - R_1) = v_C \cdot \frac{(R_2 - R_1)}{R_2}$

$\omega_2 = \frac{R_1\omega_1}{R_2 - R_1}$

$v_C = \omega_2 R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\omega_1$

(2)



$3\cdot\cos(\varphi) + 3\cdot\sin(\varphi)$

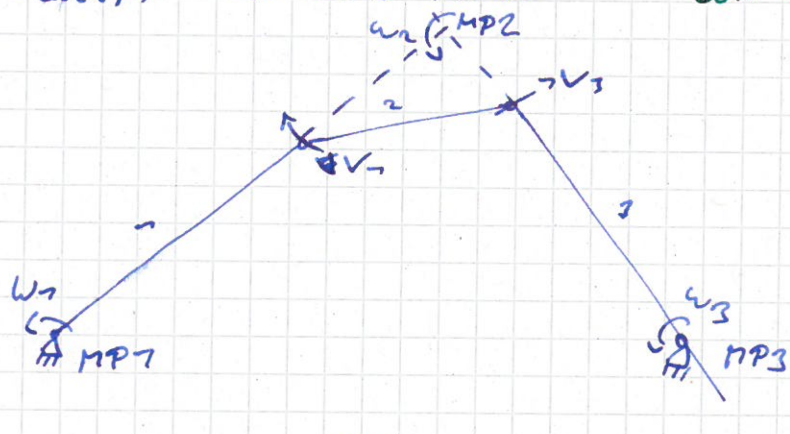
$v_A = \omega\cdot\left(l_2 - \frac{l_3}{\cos(\varphi)}\right)$

$\omega = 0{,}45$

$v_{B1} = \omega\cdot\left(\frac{l_3}{\cos(\varphi)}\right) = 1{,}9035$

Ganz anders als bei Beta Pi!

(3)



$v_1 = +\omega_1 \cdot l_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_1}{a}$

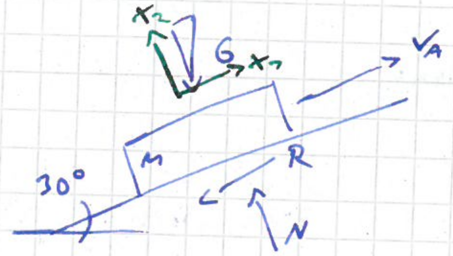
$v_3 = \omega_2 \cdot b \Rightarrow \omega_3 = \frac{v_3}{l_3}$

$\omega_1 = 0{,}5\,s^{-1}$ $\omega_2 = 0{,}5263\,s^{-1}$ $\omega_3 = 0{,}2434\,s^{-1}$

Richtig gerechnet, aber l_1 ist 4 Meter, nicht 3!

TM 2 Übung 4

a)



$G = m \cdot g$

$N = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$

$R = m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot \mu$

a) ges: l bei $v_B = 0$

$x_1 \nearrow \sum: -R - G \cdot \sin(\alpha) = \ddot{x}_A \cdot m$

$x_2 \nwarrow \sum: N - G \cdot \cos(\alpha) = 0$

$\hookrightarrow -m \cdot g \cdot \cos(\alpha) \cdot \mu - m \cdot g \cdot \sin(\alpha) = \ddot{x}_A \cdot m$

$g(-\cos(\alpha) \cdot \mu - \sin(\alpha)) = \ddot{x}_A$

Ansatz: $\dot{x}_A(t = t_B) \stackrel{!}{=} 0$ Dann bleibt die Masse stehen.

$\dot{x}_1(t) = \int g(-\cos(\alpha) \cdot \mu - \sin(\alpha))\, dt$

$= [t(-g(\cos(\alpha) \cdot \mu + \sin(\alpha)))]$

$= -tg(\cos(\alpha) \cdot \mu + \sin(\alpha)) \underline{+ v_A}$ Nicht vergessen!

$0 = v_A - tg(\cos(30°) \cdot \mu + \sin(30°))$

$t = 0{,}1396\, v_A$

$x_1(t) = \iint g(-\cos(\alpha) \cdot \mu - \sin(\alpha))\, dt\, dt$

$= [-\frac{1}{2} t^2 g(\cos(\alpha) \cdot \mu + \sin(\alpha)) + v_A t]$

$x_1(t=0) = 0 \rightarrow$ keine Konstante C.

$x_1(t = 0{,}1396\, v_A) = 0{,}0698\, v_A^2 = l$

b)

b)

Neue Bewegungsgleichung für Abrutschen:

$$x'(t) = +tg(\cos(\alpha)\mu + \sin(\alpha))$$

$$x(t) = +\frac{1}{2}t^2 g(\cos(\alpha)\mu + \sin(\alpha))$$ keine Konstante, $x(t=0)=0$

$$x(t = t_{unten}) = L$$

$$t_{unten} = \quad t = +\sqrt{\frac{2 \cdot L}{g(\cos(\alpha)\mu + \sin(\alpha))}}$$

$$x'(t = t_{unten}) = 0{,}698\, v_A^2$$

2 Drehimpuls $L_a = \Theta_a \omega$

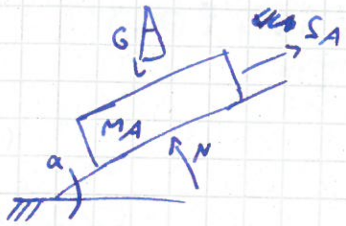
$$L_P = \Theta_P \omega = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \omega_P = \underset{[kg]}{250} \cdot \underset{[m]}{3} \cdot \underset{[s^{-1}]}{14}$$

$$L_S = 2 \cdot L_P + L_F$$

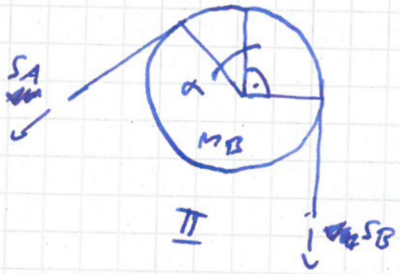
$$L_F = \left(m \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{l^2}{12}\right)\right)\omega$$

TM3 Übung 5

1 a)



I



II

III

Momentensatz: $M = \Theta \dot{\omega}$ ↳ "Drehimpulssatz"

Schwerpunktsatz $F = m \cdot a$

I $\quad m \cdot g \cdot \sin(\alpha) + S_A = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$

$\quad S_A = m \cdot \ddot{x} - m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$

II $\quad -S_A \cdot R + S_B \cdot R = \Theta \dot{\omega} = \Theta \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot m_B R^2 \ddot{\varphi}$

III $\quad -S_B + S_C = m \cdot \ddot{x}$

$\quad S_B = m_C g - m \cdot \ddot{x}$

I und III in II

$$(-m_A \ddot{x} + m_A g \cdot \sin(\alpha)) R + (m_C g - m_C \ddot{x}) R = \frac{1}{2} m_B R^2 \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot m_B R^2 \left(\frac{\ddot{x}_A}{R}\right)$$

mit $x_A = x_C = \varphi \cdot R = x$

$\dot{x}_A = \dot{x}_C = \dot{\varphi} \cdot R = \dot{x}$

$\ddot{x}_A = \ddot{x}_C = \ddot{\varphi} \cdot R = \ddot{x}$

$$\ddot{x} = \frac{2 \cdot (\sin(\alpha) \cdot m + 0) \cdot g}{2 \cdot m + m + 2 \cdot 0} = g \cdot \boxed{\frac{(\sin(\alpha) \cdot m_A + 0)}{m_A + \frac{1}{2} m_B + m_C}}^{\,k}$$

$\dot{x} = g \cdot k \cdot t$

$x = \frac{1}{2} g k t^2$

$x(t = t_E) = h$

$t_E = \sqrt{\frac{2h}{gk}}$

$\dot{x}(t_E) = g k \sqrt{\frac{2h}{gk}} = \sqrt{g^2} \sqrt{k^2} \sqrt{\frac{2h}{gk}} = \sqrt{g k h \cdot 2}$

$$= \sqrt{g \cdot \frac{g(\sin(\alpha) \cdot m_A + m_C)}{m_A + \frac{1}{2} m_B + m_C} \cdot h \cdot 2}$$

b) Lösung mit Energiesatz

$U_A + T_A = U_E + T_E$ $\qquad$ $T \hat{=}$ kin. Energie $\hat{=} \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $U \hat{=}$ Pot. Energie $\hat{=} m \cdot g \cdot h$

I : $U_E = m_A \cdot g \cdot \sin(\alpha) h$ $\qquad U_A = 0$

$T_E = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot \dot{x}^2$ $\qquad T_A = 0$

II $\quad U_E = 0$ $\qquad U_A = 0$

$T_E = \frac{1}{2}\Theta \dot{\varphi}^2$ $\qquad T_A = 0$

III $\quad U_E = 0$ $\qquad U_A = m_C \cdot g \cdot h$

$T_E = \frac{1}{2} \cdot m_C \cdot \dot{x}^2$ $\qquad T_A = 0$

$$m_C \cdot g \cdot h = m_A \cdot g \cdot \sin(\alpha) h + \frac{1}{2}\Theta_B \dot{\varphi}_B^2 + \frac{1}{2} m_C \cdot \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} m_A \dot{x}_A^2$$

$$m_C \cdot g \cdot h = m_A \cdot g \cdot \sin(\alpha) h + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot R^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} m_A \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} m_C \dot{x}_C^2$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{g \cdot h \cdot (\sin(\alpha) \cdot m_A - m_C)}{m_A + \frac{1}{2} m_B + m_C}} \quad \checkmark$$

(2) $U_A + T_A = U_E + T_E$

$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

$v = \sqrt{2 g \cdot h} = \dot{x}$ $\qquad h = h + h_{BC}$

$\dot{x} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + h_{BC})}$ $\qquad h_{BC} = R \cdot \cos(\alpha) - R \cdot \sin(\varphi)$

$= \sqrt{2 \cdot g \cdot (h + (R(\cos\alpha - \sin\varphi)))}$ $\qquad = R(\cos(\alpha) - \sin(\varphi))$

$F = m \cdot a$ $\qquad$ (in e-Richtung)

$N - m \cdot g \cdot \sin(\varphi) = m \cdot a_e$

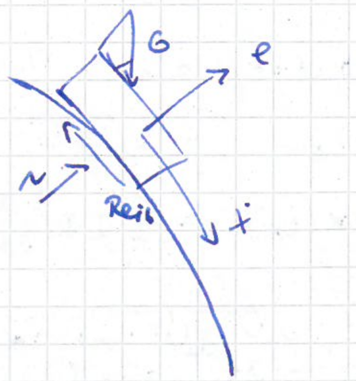
Kiste löst sich ab bei $N_C = 0$

$a_e = -g \cdot \sin(\varphi)$ $\qquad$ Formel für rad. Beschl.

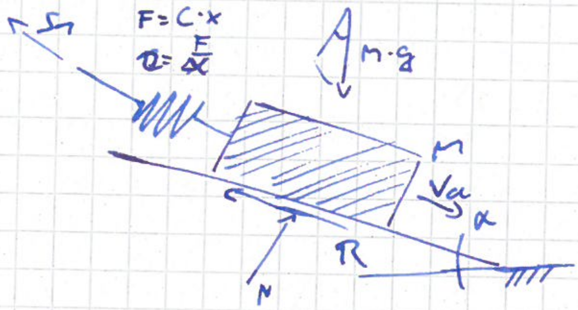
$-R \cdot \omega^2 = \frac{v^2}{R} = -g \cdot \sin(\varphi)$ $\qquad$ v^2 von vorher einsetzen

$$\sin(\varphi) = \frac{2 \cdot g(h + (R(\cos\alpha - \sin\varphi)))}{R \cdot (+g)}$$

$$= + \frac{2 \cdot h + 2 \cdot R(\cos\alpha - \sin\varphi)}{R}$$



(3)



Bedingung $2S_A \geq S_E$

$\nwarrow: F = m\cdot a$

$$S_1 + R - m\cdot g\cdot \sin(\alpha) = m\cdot \dot{V}_a = m\cdot\ddot{x} \rightarrow = 0$$, weil V_A = konst.

$$S_1 = -R + m\cdot g\cdot\sin(\alpha)$$

$$= -\mu\cdot m\cdot g\cdot\cos(\alpha) + m\cdot g\cdot\sin(\alpha)$$

$$= m\cdot g(\sin(\alpha) - \mu\cdot\cos(\alpha)) \overset{!}{=} c\cdot x_A \Rightarrow$$ Am Ende: $S_E = 2 c x_A$

Energiebilanz: $U_A + T_A = U_E + T_E$ Es fehlt hier noch $-\int_0^x R\,dx$ (nicht konservativ)

$$U_E + T_E = U_A + T_A - \int_0^x R\,dx$$

Potentielle Energie Feder: $U = \frac{1}{2}\cdot c\cdot x_A^2$

$$2 c x_A^2 = \frac{1}{2}\cdot c\cdot x_A^2 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot V_A^2 - R x_A + m\cdot g\cdot\sin(\alpha) x_A$$

$$2 c x_A^2 = \frac{1}{2} c\cdot x_A^2 + \frac{1}{2} m\cdot V_A^2 - m\cdot g\cdot\cos(\alpha)\cdot\mu\cdot x_A + m\cdot g\cdot\sin(\alpha) x_A$$

$$2\cdot c\left(\frac{S_1}{c}\right)^2 = \frac{1}{2} c\left(\frac{S_1}{c}\right)^2 + \frac{1}{2} m\cdot V_A^2 - m\cdot g\cdot\cos(\alpha)\cdot\mu\left(\frac{S_1}{c}\right) + m\cdot g\cdot\sin(\alpha)\cdot\left(\frac{S_1}{c}\right)$$

$$2\frac{S_1^2}{c} - \frac{1}{2}\frac{S_1^2}{c} + m\cdot g\cdot\cos(\alpha)\mu\cdot\frac{S_1}{c} - m\cdot g\cdot\sin(\alpha)\frac{S_1}{c} = -\frac{1}{2}\cdot m\cdot V_A^2$$

$$\left(\frac{S_1}{c}\right)\{m\cdot g(\cos(\alpha)\mu - \sin(\alpha))\} + \frac{3}{2}\frac{S_1^2}{c} = -\frac{1}{2} m\cdot V_A^2$$

$$S_1\cdot m\cdot g(\cos(\alpha)\mu - \sin(\alpha)) + \frac{3}{2} S_1^2 = c\left(-\frac{1}{2}\right) m\cdot V_A^2$$

hier ein VZF bei $\left(\frac{S_1}{c}\right)^2$

$$\frac{1}{2} S_1^2 + \frac{c}{2}\cdot m\cdot V_A^2 = 2 S_1^2 + S_A\cdot m\cdot g\cdot(\cos(\alpha)\mu - \sin(\alpha))$$

$$c = \frac{g^2\cdot m}{V_A^2}(\cos(\alpha)\mu - \sin(\alpha))^2$$

TM3 Übung 6

①

a) $a = a(x) = -g \frac{r_E^2}{x_1^2}$

$$v(x_1) = -\sqrt{v_0^2 + 2\int_x^{x_0} -a(x_1)\,dx_1}$$

$$= -\sqrt{v_0^2 + 2\, g r_E^2 \left[-\frac{1}{x}\right]_{r_E}^{x_0}}$$

$$= -\sqrt{v_0^2 + 2\, g r_E^2 \left(-\frac{1}{x_0} + \frac{1}{r_E}\right)}$$

$$v(x_1 = 6371) = -\sqrt{7400^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1}{1000} \cdot 60^2 \cdot 60^2 \cdot 6371^2 \left(-\frac{1}{6371} + \frac{1}{7000}\right)}$$

$$= -12746{,}\ \frac{km}{h}$$

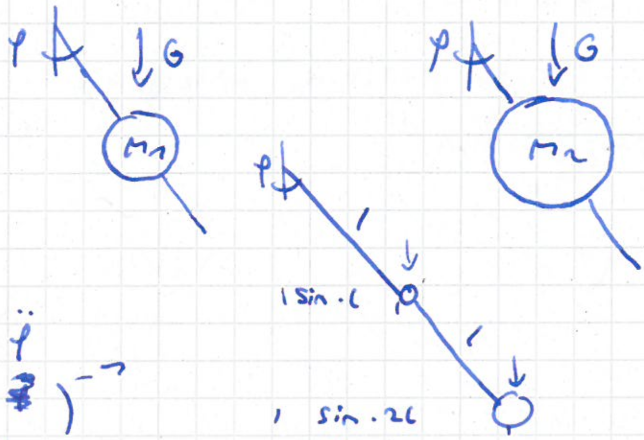
b) $x_0 \to \infty$; $v_0 = 0$

$$\lim_{x_0 \to \infty} -\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{3600^2}{1000} \cdot 6371^2 \left(-\frac{1}{x_0} + \frac{1}{7000}\right)}$$

$$= -\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{3600^2}{1000} \cdot 6371^2 \cdot \frac{1}{7000}}$$

$$= 38398{,}\ \frac{km}{h}$$

② Momentensatz für Pendel



$$M_A = \Theta \dot{\omega}$$

$$= \Theta \ddot{\varphi}$$

$$M_A = (m_1 \cdot l^2 + m_2 (2l)^2)\, \ddot{\varphi}$$

$$\ddot{\varphi} = \left(\frac{(m_1 \cdot l^2 + m_2 (2l)^2)}{M_A}\right)^{-1}$$

$$\ddot{\varphi} = \left(\frac{m_1 l^2 + m_2\, 4l^2}{M_A}\right)^{-1} = \left(\frac{l^2(m_1 + 4m_2)}{M_A}\right)^{-1}$$

Momente:

$$M_A = m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi) \cdot l + m_2 \cdot g \cdot \sin(\varphi) \cdot l \cdot 2$$

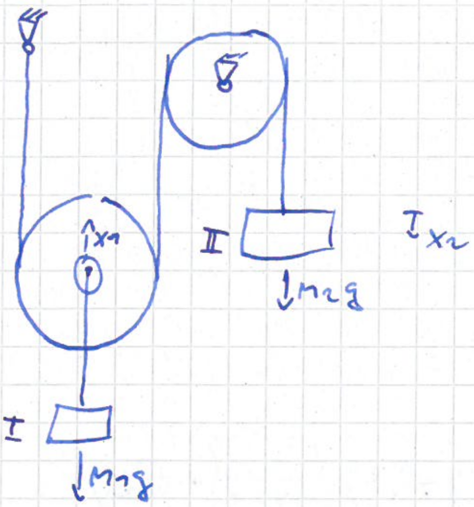
$$= g \cdot \sin(\varphi) \cdot l (m_1 + 2m_2)$$

$$\ddot{\varphi} = \left(\frac{l^2 (m_1 + 4m_2)}{g \cdot \sin(\varphi) \cdot l (m_1 + 2m_2)}\right)^{-1} = \left(\frac{l (m_1 + 4m_2)}{g \cdot \sin(\varphi)(m_1 + 2m_2)}\right)^{-1}$$

$$= \frac{g \cdot \sin\varphi (m_1 + 2m_2)}{l (m_1 + 4m_2)}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \frac{g \sin(\varphi)(m_1 + 2m_2)}{l(m_1 + 4m_2)} t^2$$

1



I: $m_1 \cdot g = m \cdot a$

$a = g$

I $U_A = 0$ $\quad U_E = m_1 \cdot g \cdot x_1$

$T_A = 0$ $\quad T_E = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_1^2$

II $U_A = m_2 \cdot g \cdot x_2$ $\quad U_E = 0$

$T_A = 0$ $\quad T_E = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}_2^2$

$0 = m_1 \cdot g \cdot x_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}_2^2 + m_2 \cdot g \cdot x_2$

Seilzug $\rightarrow$ $x_2 = -2x_1$

$0 = m_1 \cdot g \cdot (-\frac{1}{2} x_2) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}_2^2 + m_2 \cdot g \cdot x_2$

$\dot{x}_2 = \sqrt{\frac{g \cdot (m_1 - 2 \cdot m_2) \cdot x_2}{m_2}}$

TM 3 Übung 7

Aufgabe 2

a)

Bewegungsgleichung für Flugbahn: ~~[illegible]~~

$x_2(t) = h_0 + v_0 \sin(\varphi_0) t - \frac{1}{2} g t^2$ ~~$x_1(t)$~~

$= \cancel{64}\ 12 + 700 \frac{km}{h} \sin(\arctan(\frac{12}{16}))t - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2$; $700 \frac{km}{h} = 194{,}4\, m/s$

$= 12 + 194{,}4 \cdot \frac{3}{5} t - 5t^2$

$x_2(t) = 500\, m \Rightarrow t_1 = 5{,}46$ sek.

$t_2 = 17{,}86$ sek.

$x_1(t) = v_0 \cos(\varphi_0) t + x_{1,0} \cancel{+} - \frac{1}{2} a_{x,1} t^2$

~~[illegible]~~

~~[illegible] Meter~~

$x_1(t) = \cancel{16} + 194{,}4 \cdot \frac{4}{5} t - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot t^2$ $\varphi_0 = 36{,}87°$

$x_1(t = t_1) = 790{,}6$ Meter $- 16$ Meter

$= 774{,}6$ Meter

b) $a_{sw,a} = 4{,}6 \cdot t\ \frac{m}{s^2}$

$v_{sw,a} = \frac{1}{2} \cdot 4{,}6 \cdot t^2 + C$ ($C = 0$, weil ~~[illegible]~~ $v(t=0) = 0$)

$x_{sw,a} = \frac{1}{6} \cdot 4{,}6 \cdot t^3 + C$ ~~[illegible]~~

$v_{max} = v(t = t_1) = 68{,}567\ \frac{m}{s}$

Sobald Flugzeug über 500 m: $a_{sw,b} = 11 \frac{m}{s^2}$

$v_{sw,b} = 11t + 68{,}57$

$x_{sw,b} = \frac{1}{2} 11 t^2 + 68{,}57 t + x(t = t_1)$

$x(t = t_1) = 124{,}8$ Meter Beta Pi hat hier 374 Meter raus ?! Der Rest stimmt...

$v_{sw,b}(t) = 0 \rightarrow t = -6{,}234$ sek

$x_{sw,b}(t = -6{,}234) = \frac{1}{2} \cdot 11 t^2 + 68{,}57 t + 124{,}8$

$= +$ ~~[illegible] Meter~~ 338,5 Meter

c) Wurfhöhe $x_{2,max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\varphi_0)$

$= 692{,}2$ Meter

Wurfparabel: $x_2(x_1) = h_0 + x_1 \tan(\varphi_0) - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cos^2(\varphi_0)} x_1^2$

$x_1 = 1829$ Meter Geht auch wie bei Beta Pi über Zeitfunktion

d) $t_2 = 77{,}86$ sek (aus Teilaufgabe a)

$x(t_1) = 774{,}6$ Meter

Über 500 Meter:

$a(t) = +20 \frac{m}{s^2}$

$v(t) = +20\,t + v(t = t_1)$

$x(t) = +10\,t^2 + \cancel{\ldots}\ 767{,}7$

~~x(t) ...~~

$x_1(t_2 - t_1) = x(t = 72{,}4) = \cancel{\ldots}\ 3609{,}64$ Meter

$x_1(t = t_2) = x(t_1) + x(t_2 - t_1) = \cancel{\ldots}\ 4384{,}24$ Meter

unter 500 Meter:

$a(t) = -5 \frac{m}{s^2}$

$v(t) = -5\,t + \cancel{\ldots}\ v(t = t_2)$

$v(t_1) = \cancel{\ldots}$

$(v(t_1) = 415{,}1)$

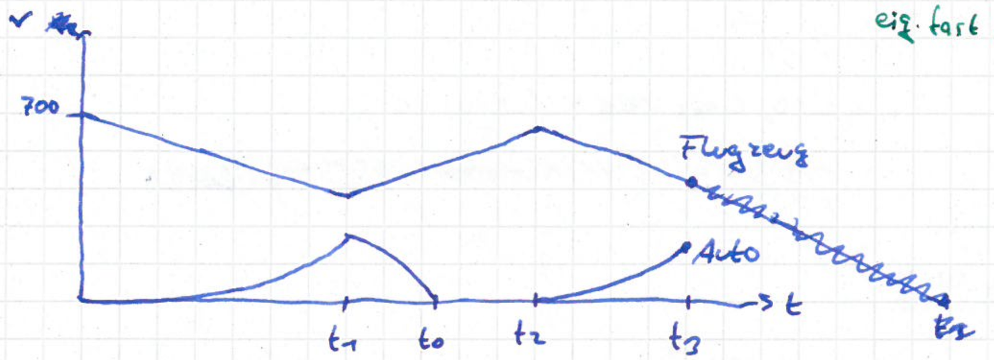
e) $x_2(t) = 0$

$t_3 = 23{,}43$ sek oder $t = 0$ (beim Start) $t_3 = 23{,}43 - 77{,}86$

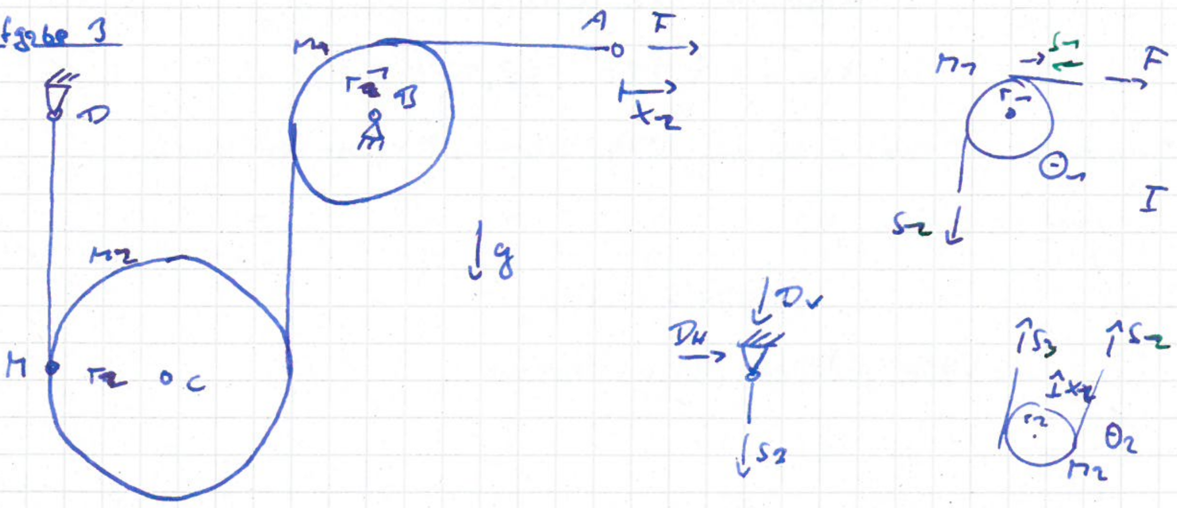
$x_1(t = t_3) = \cancel{\ldots}$ ~~Meter~~ $2234{,}5$ Meter

$x_{1,ges} = x_1(t_1) + x_1(t_2 - t_1) + x_1(t_3 - t_2) = 2774{,}68$ Meter ϟ

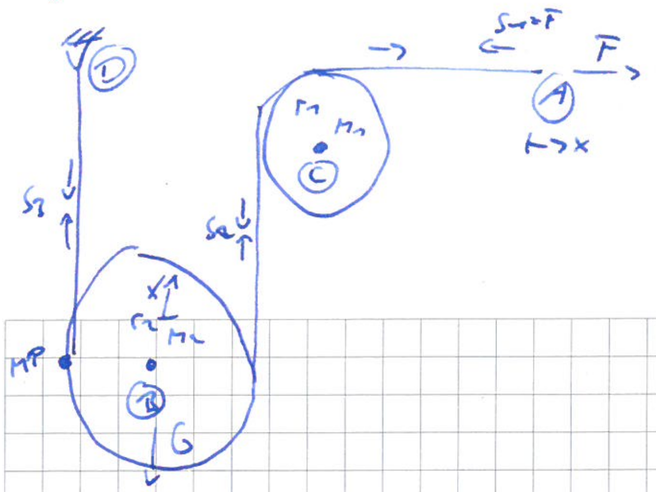
eig. fast 6 km!



Aufgabe 3



TM Übung 7



C: $\Theta_C = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1^2$

B: $\Theta_B = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot r_2^2$

MP: $\Theta_{MP} = \frac{3}{2} m_2 \cdot r_2^2$

Bewegungsgleichungen mit $r_1 \ddot{\varphi}_1 = \ddot{x} = 2 r_2 \ddot{\varphi}_2$

C: $\frac{1}{2} m_1 r_1^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 = S_1 r_1 - S_2 r_1$

B: $\frac{1}{2} m_2 \cdot r_2^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = -S_2 r_2 + S_3 r_2$ $\qquad \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \ddot{\varphi}_1$

MP: $\frac{3}{2} m_2 r_2^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = -S_2 \cdot 2 r_2 + m_2 g \cdot r_2$

Kinematik: $r_1 \ddot{\varphi}_1 = 2 r_2 \ddot{\varphi}_2 = \ddot{x}$

C umstellen zu S_2: $S_2 = \overset{=F}{S_1} - \frac{m_1 \ddot{x}}{2}$

C in B und umstellen zu S_3: $S_3 = S_2 + \frac{m_2 \ddot{x}}{4} = \overset{F}{S_1} - \frac{m_1 \ddot{x}}{2} + \frac{m_2 \ddot{x}}{2}$

MP nach $\ddot{x}$ (nach $\frac{1}{2}\ddot{\varphi}_1$) auflösen $\ddot{x} = \frac{-4(2 S_2 - g \cdot m_2)}{3 \cdot m_2}$

S_2 einsetzen: $\ddot{x} = \frac{4(2 \cdot S_1 - g \cdot m_2)}{4 m_1 - 3 m_2}$

$S_1 = F$

$S_2 = \frac{-m_2 (3 \cdot F - 2 \cdot g \cdot m_1)}{4 \cdot m_1 - 3 \cdot m_2}$

$S_3 = \frac{-m_2 (F - g(2 \cdot m_1 - m_2))}{4 \cdot m_1 - 3 \cdot m_2}$

4

Aufgabe 4

a) Schiefer Wurf

$x_2(x_1 = 42\,m) = -7$, Auflösen nach v_0

$v_a = 20{,}09\ \frac{m}{s}$

b) $U_A + T_A = U_E + T_E$

$m \cdot g \cdot h + 0 = \overset{m\cdot g\cdot h_0 \text{ eigentlich}}{0} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_a^2$

$h = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_a^2 + m \cdot g \cdot h_0}{m \cdot g}$

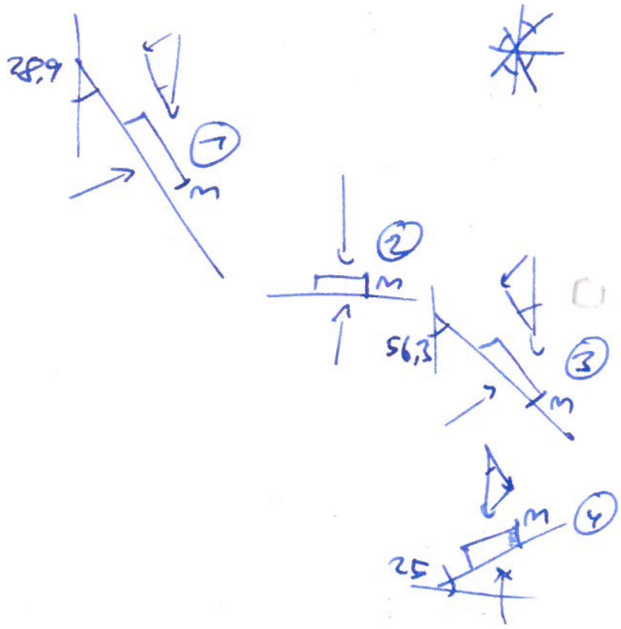
$= 27{,}78\,m$

c) (1) $R_1 = \mu \cdot m \cdot g \cdot \sin(28{,}9)$ $\quad l_1 = 22{,}8\,m$

(2) $R_2 = \mu \cdot m \cdot g$ $\quad l_2 = 70\,m$

(3) $R_3 = \mu \cdot m \cdot g \cdot \sin(56{,}3)$ $\quad l_3 = 74{,}7\,m$

(4) $R_4 = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(25)$ $\quad l_4 = 76{,}6\,m$



Arbeit durch Reibung: $\sum_i \int_{x_1}^{x_0} R_i$

$385{,}7\,J + 350\,J + 470{,}6\,J + 526{,}6\,J$

$= 1672{,}9\,J$

1

a) Zunächst die erste halbe Sekunde betrachten:

$a_A = -5$

$v_A(t) = -5t + \cancel{10}\ 45\,\frac{km}{h}$

$x_A(t) = -\frac{1}{2}5t^2 + \cancel{10t}\ 45\,\frac{km}{h}\,t + 10$

$= 10 + 12{,}5t - 2{,}5t^2$

$45\,\frac{km}{h} = 12{,}5\,\frac{m}{s}$
$50\,\frac{km}{h} = 13{,}9\,\frac{m}{s}$

$v_B = 13{,}9$

$x_B(t) = 13{,}9\,t$

$x_B(0{,}5) = 6{,}95\,m$

Nach der halben Sekunde:

$a_B = -4\,\frac{m}{s^2}$

$v_B(t) = -4t + \cancel{12{,}5}\ 13{,}9$

$x_B(t) = -2t^2 + \cancel{12{,}5}\ 13{,}9\,t + 6{,}95$

Treffen sich die Autos A und B?

$x_A(t) = x_B(t)$

$t = 1{,}44\,s$ oder $t = -4{,}23\,s$

Die Autos treffen sich nach 1,44 sek (nachdem das Auto B mit bremsen begonnen hat, sonst nach 1,94 sek.)

Geschwindigkeiten beim Zusammenstoß:

~~...~~ $v_A(t = 1{,}94) = \cancel{...}\ 2{,}8\,\frac{m}{s}$

$v_B(t = 1{,}44) = 8{,}14\,\frac{m}{s}$

$\Delta v = 5{,}34\,\frac{m}{s} = 19{,}2\,\frac{km}{h}$

b) Abstand soll 0 oder höher bleiben: Anhaltewege:

$v_A(t) = 0 \rightarrow t_A = 2{,}5\,s \qquad x_A(t_A) = 25{,}6\,m$

$v_B(t) = 0 \rightarrow t_B = 3{,}5\,s \qquad x_B(t_B) = 31{,}1\,m$

Mindestabstand $l = (31{,}1 - 25{,}6)\ \cancel{...} + l_0$

$= 15{,}5\,m$

②

a) $v(x) = k\sqrt[3]{x}$

$a(x) = \frac{dv}{dx} v(x) = \frac{1}{3}k^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$t(x) = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{v(\tilde{x})}$ $\qquad t_0 = 0 \qquad x_0 = 0$

$= \int_0^x \frac{1}{v(x)}\, dx = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2k}$

$\cancel{x(t) = \frac{2k \cdot t}{\ldots} \ldots \sqrt{6k \cdot t}}$

$\cancel{v(t)} = $

$2k \cdot t(x) = 3\sqrt[3]{x^2}$

$\frac{2kt}{3} = \sqrt[3]{x^2}$

$\left(\frac{2kt}{3}\right)^3 = x^2$

$\sqrt{\left(\frac{2kt}{3}\right)^3} = x(t)$

$x(t) = \sqrt{\frac{(2 \cdot k \cdot t)^3}{3^3}} = \sqrt{\frac{1}{3^3}} \cdot \sqrt{(2 \cdot k \cdot t)^3}$

$v(t) = \cancel{\ldots} = \sqrt{\frac{1}{3^3}} \cdot \sqrt{(2 \cdot k)^3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}t}$

$= \cancel{\ldots} = \sqrt{\frac{8k^3 \cdot 3 \cdot t}{3^3 \cdot 2}}$

$= \sqrt{\frac{4k^3 \cdot t}{9}}$

$= \sqrt{\frac{2k^3 t}{3}}$

$a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{k^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}t}}$

$= \sqrt{\frac{2k^3}{3}} : \sqrt{\frac{3}{2}t}$

$= \sqrt{\frac{2k^3/3}{\frac{3}{2}t}}$

$= \sqrt{\frac{4k^3}{9t}}$

TM 3 Tutorium 2

G1

(1)

$a(v) = a_0 \frac{c_0}{c_0 + v}$ $a_0 = 4$ $c_0 = 200 \frac{m}{s}$ $v_e = 80 \frac{m}{s}$

$t(v) = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)}$

$= \int_{0}^{v} \frac{1}{a(v)} dv$

$= \frac{v(v+400)}{1600}$

$v(t) = 40(\sqrt{t+25} - 5)$

$x(t) = \int_0^t v(t)\, dt = \frac{40(2\cdot\sqrt{(t+25)^3} - 5(3t+50))}{3}$

$t_e = t(v = v_e) = 24$ sekunden

$x(t=t_e) = 1073{,}3$ Meter

(2) $\varphi(t) = ct^2$

a) $\omega(t) = \dot\varphi(t) = 2ct$

$\dot\omega(t) = \ddot\varphi(t) = 2c$

$v(t) = \rho\dot\varphi e_\varphi = \rho 2ct \cdot e_\varphi = 2rct \cdot e_\varphi$

$a(t) = -\rho\dot\varphi^2 e_\rho + \rho\ddot\varphi e_\varphi$

$= -r(2ct)^2 \cdot e_\rho + r \cdot 2 \cdot c \cdot e_\varphi$

$= -4r(ct)^2 e_\rho + 2rc\, e_\varphi$

b) $e_\rho = \cos(\varphi) e_1 + \sin(\varphi) e_2$

$e_\varphi = -\sin(\varphi) e_1 + \cos(\varphi) e_2$

$\rightarrow$ $v(t) = 2rct(-\sin(\varphi) e_1 + \cos(\varphi) e_2)$

$a(t) = -4r(ct)^2(\cos(\varphi) e_1 + \sin(\varphi) e_2) + 2rc(-\sin(\varphi) e_1 + \cos(\varphi) e_2)$

$= (-4r(ct)^2 \cos(\varphi) - 2rc \sin(\varphi)) e_1 + (-4r(ct)^2 \sin(\varphi) + 2rc\cos(\varphi)) e_2$

c) $\varphi(t) = ct^2$

$2\pi = \varphi(t) \rightarrow t = \sqrt{\frac{2\pi}{c}}$

(3)

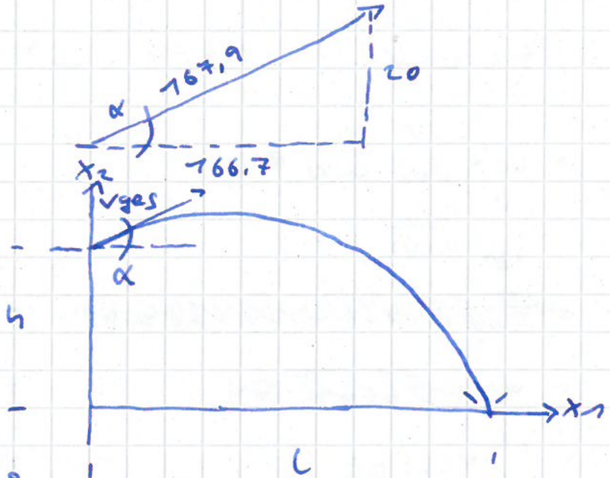
a) $v_1 = 600 \frac{km}{h} = 166,7 \frac{m}{s}$

steigt mit $20 \frac{m}{s}$

$v_{ges} = \sqrt{166,7^2 + 20^2} = 167,9 \frac{m}{s}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{20}{166,7}\right) = 6,847°$

<u>Schiefer Wurf</u>



Bewegungsgl: $x_2(x_1) = h_0 + x_1 \tan(\varphi_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\varphi_0)} x_1^2$

$x_2(x_1) = 0 \quad \Rightarrow x_{1,1} = -3764$ Meter

$x_{1,2} = 4430\,m \quad \leftarrow$ gesuchte Lösung

~~$x_1(t_L) = v_0 \cos(\varphi_0) t$~~

~~$x_1(t_L) = 4430$~~

Wurfzeit $t_w = \frac{v_0 \sin(\varphi_0)}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin(\varphi_0)}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}$

$= 26,58\,s$

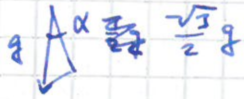
Bewegungsgleichung Flugzeug:

$x_1(t) = 166,7\,t \qquad x_1(t_w) = 4431\,m$ → gleich wie abgeworfene Fracht!

$x_2(t) = 20\,t \qquad x_2(t_w) = 531,6\,m$

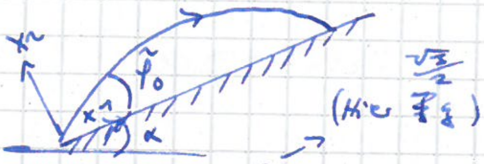
~~Flugzeug befindet sich bei (4431, 531,6) wenn Abwurfort (3000,0) ist~~

Flugzeug befindet sich bei (4431, 3532), wenn Abwurf bei (0, 3000) ist.



1

a)



$$x_2(x_1) = x_1 \tan(\tilde{\varphi}_0) - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\tilde{\varphi}_0)} x_1^2$$

$$x_2(x_1) \overset{!}{=} 0$$

$$x_1(\hat{\varphi}_0) = \frac{4 \sin(\tilde{\varphi}_0)\cos(\tilde{\varphi}_0)\sqrt{3}\, v_0^2}{3g}$$

$$x_2(t) = v_0 \sin(\tilde{\varphi}_0) t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_2(t) = 0 \quad \to \quad t = \frac{4 \sin(\tilde{\varphi}_0)\sqrt{3}\, v_0}{3g} \qquad (I)$$

$$x_1(t) = v_0 \cos(\tilde{\varphi}_0) t \qquad (II)$$

Ist das gleiche...

(I) in (II) einsetzen

$$x_1(\tilde{\varphi}_0) = v_0 \cos(\tilde{\varphi}_0) \frac{4 \sin(\tilde{\varphi}_0)\sqrt{3}\, v_0}{3g}$$

$$x_1'(\tilde{\varphi}_0) = \frac{1}{3g}\left(v_0 \cos(\hat{\varphi}_0) \cdot 4\cos(\hat{\varphi}_0)\sqrt{3}\, v_0 - v_0 \sin(\hat{\varphi}_0) \cdot 4 \sin(\tilde{\varphi}_0)\sqrt{3}\, v_0\right)$$

$$= \frac{1}{3g}\left(v_0^2 \cos(\tilde{\varphi}_0)^2 \cdot 4\sqrt{3} - v_0^2 \sin(\hat{\varphi}_0)^2\, 4\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{4 v_0^2 \cdot \sqrt{3}}{3g}\left(\cos(\tilde{\varphi}_0)^2 - \sin(\tilde{\varphi}_0)^2\right)$$ [Hinweis]

$$= \frac{4 v_0^2 \cdot \sqrt{3}}{3g}\left(\cos(2\tilde{\varphi}_0)\right) \overset{!}{=} 0$$ für Maximum

$$\Rightarrow \cos(2\hat{\varphi}_0) \overset{!}{=} 0$$

$$2\tilde{\varphi}_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\tilde{\varphi}_0 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

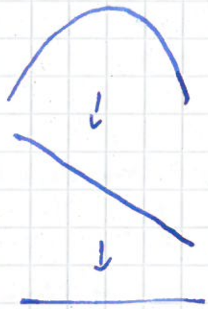
Fehler war, die gegenbeschleunigung von $\cos(\alpha) g$ am Anfang nicht mit einzuberechnen, ansonsten stimmt der Rechenweg.

$$a_1(t) = -g \sin(\alpha)$$
$$a_2(t) = -g \cos(\alpha)$$

②

Quadr. Parabel: $ax^2+bx+c = f(x)$

$f'(x) = 2ax+b \qquad f''(x) = 2a$



$f(x=0) = 0 \to c=0$

$f'(x=t_a)=0 \to a t_a \cdot 2 + b = 0 \to b = -2at_a$

~~f''(x=ta) = 0 ...~~

$\cancel{f(x=t_a) = V_a \Rightarrow V_a = at_a^2 + bt_a \Rightarrow b = \frac{at_a^2 + V_a}{t_a} = -at_a + V_a}$

$\cancel{-2at_a + V_a = -2at_a} \qquad \cancel{a =}$

$\cancel{2a = 2V_a}$

$f(x=t_a)=V_a \to a\cdot t_a^2 + b\cdot t_a = V_a$

$a = \frac{V_a - b\cdot t_a}{t_a^2}$

$72\frac{km}{h} = 20\frac{m}{s}$

$2\,min = 60\cdot 2$ sek.

Einsetzen ergibt:

$b = -2\left(\frac{V_a - b\cdot t_a}{t_a^2}\right)\cdot t_a \Rightarrow b = \frac{1}{3}\frac{m}{s}$

$a = -\frac{1}{720}\frac{m}{s}$

1) $f(x) = -\frac{1}{720}x^2 + \frac{1}{3}x$

2) $t_a \to t_b$: $f(x) = V_a$

3) $t_b \to t_c$: $f(x) = V_a - \cancel{\frac{V_a}{(t_b - t_c)}x}\ \frac{x\cdot V_a}{t_b - t_c} = 20 - \frac{x}{6}$

a) $\int_{t_0}^{t_c} -\frac{1}{720}x^2 + \frac{1}{3}x\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{720}\right)x^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^2\right]_0^{t_c}$

$= 7600$ m

max. Beschl. bei $t=0 \to V_{max} = f'(t=0)$

$-\frac{2}{720}\cdot 0 + \frac{1}{3} \to V_{max} = \frac{1}{3}\frac{m}{s^2}$

Bremsverzögerung $a_3(t) = \dot{v}_3(t)$

$a_3(t) = \frac{1}{6}\frac{m}{s^2}$

TM 3 Tutorium 3 ③

③ $v_1 = 27{,}78\,\frac{m}{s}$

$x_1(t) = 27{,}78\,t + 0$

$v_2 = 25\,\frac{m}{s}$

$x_2(t) = 25\,t + 10\,m$

$v_3 = -22{,}22\,\frac{m}{s}$

$x_3(t) = -22{,}22\,t + 350\,m$

a) $\tilde{t}_ü : x_1(t_ü) = x_2(t_ü)$

$\tilde{t}_ü = 3{,}5\,s$

$t_ü = \tilde{t}_ü + t(d_2)$ (bei relativer Geschw. zwischen 1 und 2 von $\Delta v = 2{,}78$)

$= 3{,}5\,s + \left(\frac{20}{2{,}78}\right)$

$= 10{,}69\,s.$

Oder Berechnung über relative Geschw. $\Delta v = 2{,}78\,\frac{m}{s}$

nötige Distanz: $d_1 + d_2$

$t_ü = \frac{d_1 + d_2}{2{,}78} = 10{,}79\,s.$ Lösung macht hier keinen Sinn, genau wie die Aufgabenstellung...

$s_ü = x_1(t = t_ü)$

$= 299{,}75\,m$

$s_ü + 2e = x(t_ü) + a(t_ü)$

$= 299{,}7 + \frac{1}{2} a t_ü^2$

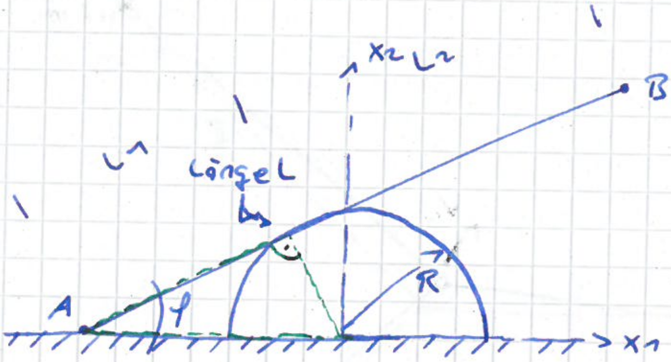
$a = 0{,}1\,\frac{m}{s^2}$

$\tilde{v}(t_ü) = v(t_ü) + 0{,}1\,t_ü = 26{,}079\,\frac{m}{s}$???

1,

TM 3 Tutorium 4

(1)



$$x_{1,A} = -\frac{R}{\sin(\varphi)} = -\frac{R}{\sin(\omega t)}$$

$$v_{1,A} = x'_{1,A}(t) = +R\cdot\cos(\omega t)\cdot\dot{\omega}\cdot\sin(\omega t)^{-2} = \frac{R\omega\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)^2}\, e_1$$

$$\omega = \frac{\sin(\varphi)^2 v_A}{\cos(\varphi)\cdot R}\, e_3 = 0{,}7577\ s^{-1}$$

$$v_B = v_A + \omega \times x_{AB}$$

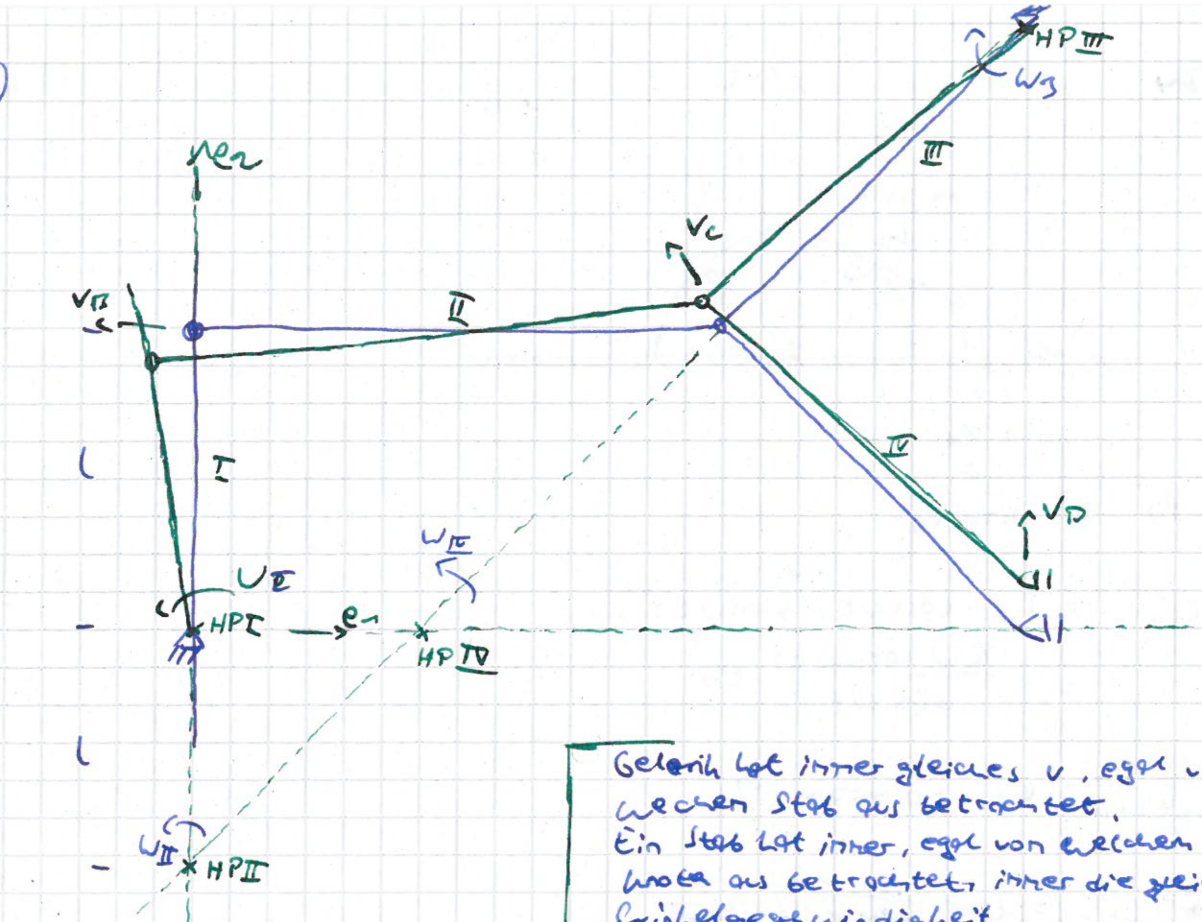
$$x_{AB} = e_1\cdot\frac{L\cdot\sin\varphi}{} + e_2\cdot\frac{L\cos\varphi}{}$$

$$\begin{array}{l} 0\ \ e_1 \\ 0\ \ e_2 \\ \omega\ \ e_3 \\ 0\ \ e_1 \\ 0\ \ e_2 \\ \omega\ \ e_3 \end{array}$$

$$v_B = \underbrace{v_A}_{e_1} + \left(+\underbrace{L\cos(\varphi)\cdot\omega}_{e_2} - \underbrace{L\cdot\sin(\varphi)\cdot\omega}_{e_1}\right)$$

$$v_B = 1{,}33\, e_1 + 1{,}43\, e_2$$

2



Gelenk hat immer gleiches v, egal von welchem Stab aus betrachtet.
Ein Stab hat immer, egal von welchem Punkt aus betrachtet, immer die gleiche Winkelgeschwindigkeit

$$v_B = \omega_0 e_3 \times L e_2 = -l \cdot \omega_0 e_1$$

$$v_B = \omega_{II} e_3 \times 2l e_2 = -2l\omega_{II} e_1 \overset{!}{=} -l\omega_0 e_1$$

$$\omega_{II} = \frac{1}{2}\omega_0$$

$$v_C = \omega_{II} e_3 \times (2l e_1 + 2l e_2) = -2l \cdot \omega_{II} e_1 + 2l\omega_{II} e_2$$

$$= -\omega_0 \cdot l e_1 + \omega_0 \cdot l e_2$$

$$v_C = \omega_{IV} e_3 \times (l e_1 + l e_2) = -l\omega_{IV} e_1 + l\omega_{IV} e_2$$

$$\overset{!}{=} -l\omega_0 e_1 + l\omega_0 e_2$$

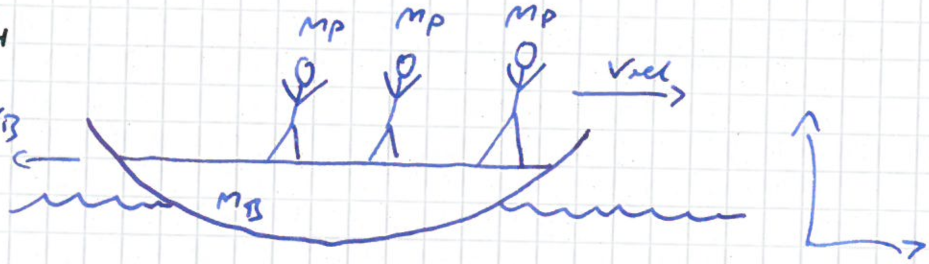
$$\Rightarrow \omega_{IV} = \omega_0$$

$$v_D = \omega_{IV} e_3 \times 2l e_1 = \omega_{IV} 2l e_2 = \omega_0 2l e_2$$

$$|v_D| = 2l \cdot \omega_0$$

TM3 Tutorium #4 $\boxed{3}$

(1)



a) ~~[illegible] bei einer Person~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

upsi!

$$P_{B,0} = P_{B,1} + P_{P,1}$$

$$v_B(m_B + 3m_p) = v_{B,1}(m_B) + v_P(m_p \cdot 3) \qquad \text{Alle Gleichzeitig}$$

$$0 = v_B\, m_p \cdot 2 + (v_{rel} + v_B)(m_p \cdot 3)$$

$$v_B = -3{,}6\ \frac{m}{s}$$

b) $P_{B,0} = P_{B,1} + P_{P,1}$ Zuerst eine Person

$$0 = v_B\, m_B \overset{+2m_p}{+} v_P\, m_p$$

$$= v_B\, m_B + (v_B + v_{rel})\, m_p$$

$$v_B = -\frac{6}{5}\ \frac{m}{s}$$

~~[illegible]~~   Zweite Person

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$$P_{B,0} = P_{B,1} + P_{P,1}$$

$$v_B(m_B + m_p \cdot 2) = v_{B,1}(m_B + m_p) + v_P(m_p)$$

$$= v_{B,1}(m_B + m_p) + (v_{rel} + v_{B,1})\, m_p$$

$$v_{B,1} = -2{,}7\ \frac{m}{s}$$

$P_{B,0} = P_{B,1} + P_{P,1}$ Dritte Person

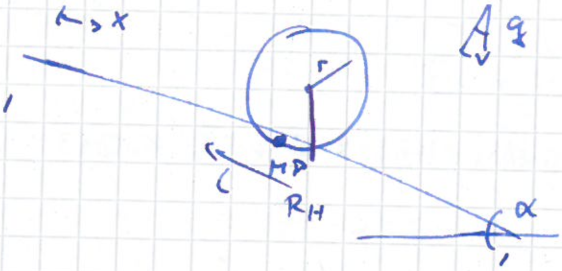
$$v_B(m_B + m_p) = v_{B,1}(m_B) + (v_{rel} + v_{B,1})\, m_p$$

$$v_{B,1} = -4{,}7\ \frac{m}{s}$$

Boot wird schneller, wenn die Personen hintereinander abspringen.

2

b)



Lösen mit Drallsatz

$\Theta_{MP} \cdot \ddot{\varphi} = \sum M_{MP}$

$\frac{7}{5} m \cdot R^2 \cdot \ddot{\varphi} = \overset{\text{Kraft}}{g \cdot \sin(\alpha)} \cdot \overset{\text{Hebelarm}}{r} \cdot m$ $\qquad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r}$

$\ddot{x} = \frac{5 \sin(\alpha) g}{7}$

$\dot{x}(t) = \frac{5 \sin(\alpha) g}{7} t$

$x(t) = \frac{5 \sin(\alpha)}{14} g t^2$

$x(t) = l$

$t = \sqrt{\frac{14 l}{5 \sin(\alpha) g}}$

1) $F = m \cdot a$

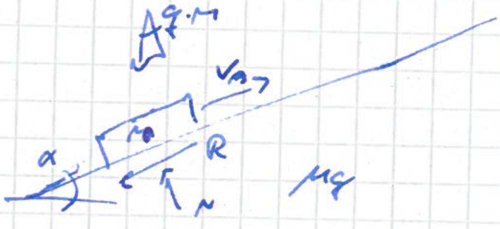
a) $-R_H + g \cdot \sin(\alpha) \cdot m = m \cdot \ddot{x}$

$\ddot{x} = (g \sin(\alpha) - R_H) : m$ $\qquad R_H = +g \sin(\alpha) \cdot m - m \cdot \ddot{x}$

~~$\frac{5 \sin(\alpha)}{7} g = g \sin(\alpha) - R_H$~~ $\qquad = g \sin(\alpha) \cdot m - m \frac{5 \sin(\alpha) g}{7}$

~~$R_H = \frac{5 \sin(\alpha) g}{7} - g \sin(\alpha)$~~ $\qquad = \frac{2}{7} g \sin(\alpha) \cdot m$

3



$\nearrow F = m \cdot a = \ddot{x}$

$-R - g \cdot \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(\alpha) = m \cdot \ddot{x}$

$\ddot{x} = \frac{1}{m}\left(-R - g \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(\alpha)\right) = \frac{1}{m}\left(g \cdot \cos(\alpha) \cdot \mu - g \cdot \sin(\alpha)\right) = -\frac{7{,}77}{m}$

$\dot{x}(t) = -\frac{7{,}77}{m} t + v_A$

$x(t) = -\frac{7{,}77}{2m} t^2 + v_A t + 0$

$\dot{x}(t_e) = 0 \quad \rightarrow \quad t_e = 0{,}1395 \, m v$

$x(t = t_e) = 0{,}06974 \, m v^2$

~~$F = m\cdot a$~~

~~$-R + g\sin(\alpha)\cdot m = m\cdot\ddot{x}$~~

~~$-g\cdot\cos(\alpha)\cdot\mu + g\cdot\sin(\alpha)\cdot m = m\cdot\ddot{x}$~~

~~$\ddot{x} = \frac{1}{m}(-g\cos(\alpha)\mu + g\sin(\alpha)m) = 5 + \frac{1}{m}\cdot 2{,}765$~~

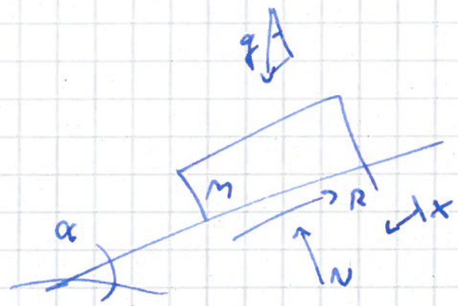
~~$\dot{x}(t) = 5t + \frac{2{,}765}{m}t + C_1$~~ ~~$C_1 = 0$~~

~~$x(t) = 2{,}5t^2 + \frac{2{,}765}{2m}t^2 + C_2$~~ ~~$C_2 = 0$~~

~~$x(t_e) = L \rightarrow t_e = 0{,}6325\cdot\sqrt{\frac{m\cdot L}{m+0{,}437}}$~~

~~$\dot{x}(t_e) =$~~

b)



~~[illegible] Beschleunigung: [illegible] $g\cdot\sin(\alpha)$ [illegible]~~

$-\int_{x_0}^{x} R\,dx + V_A + T_A = V_E + T_E$; $x_0 = 0$

$-m\cdot g\cdot\cos(\alpha)\cdot\mu\cdot x + m\cdot g\cdot h + 0 = 0 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$

$-m\cdot g\cdot\cos(\alpha)\cdot\mu\cdot L + m\cdot g\cdot L\cdot\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$

$\bar{v}_a = \sqrt{-2g\cos(\alpha)\mu\cdot L + 2g\cdot L\cdot\sin(\alpha)}$ [$L = x(t=t_e)$ aus a)]

$\bar{v}_a = 0{,}629$ m v_a

TM 3 Tutorium 6 T1

(1)

1) $a(t) = a_0 - \frac{a_0}{2t_E} t$

$v(t) = a_0 t - \frac{a_0}{4t_E} t^2 + C_1$ $\qquad$ ($C_1 = 0$, weil $a(0) = 0$)

$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 - \frac{a_0}{12 t_E} t^3 + C_2$ $\qquad$ ($C_2 = 0$ " " " ")

$x(t_E) = l \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow l = \frac{1}{2} a_0 t_E^2 - \frac{a_0}{12} t_E^2 = \frac{5}{12} a_0 t_E^2$

$t_E = \sqrt{\frac{12 l}{5 a_0}}$

$v(t_E) = \sqrt{a_0^2}\sqrt{\frac{12 l}{5 a_0}} - \underbrace{\frac{a_0}{4 t_E} \cdot \frac{12 l}{5 a_0}}_{= \frac{1}{4} a_0 t_E}$

$= \frac{1}{1} a_0 \sqrt{\frac{12 l}{5 a_0}} - \frac{1}{4} a_0 \sqrt{\frac{12 l}{5 a_0}}$

$= \frac{3}{4} a_0 \sqrt{\frac{12 l}{5 a_0}} = 1{,}16 \sqrt{l a_0}$

2) $a(x) = a_0 - \frac{a_0}{2l} \cdot x$

$v(x) = \sqrt{2 \int_0^x \left(\frac{a_0}{2l} x\right) dx}$

$v(x) = \sqrt{2\left(a_0 x - \frac{a_0}{4l} x^2\right)}$

$v(l) = \sqrt{2 a_0 l - \frac{a_0}{2l} \cdot l^2} = 1{,}22 \cdot \sqrt{a_0 l}$

3) $a(v) = a_0 - \frac{a_0}{2 v_E} v$

$t(v) = \int_0^v \frac{1}{a(v)} dv = -\frac{1}{a_0}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{v - 2v_E}{2 v_E}\right) v_E\right)$

$v(t) = 2 v_E - 2 \exp\left(\frac{-a_0 \cdot t}{2 v_E}\right) \cdot v_E$

$v_E = v(t_E) \Rightarrow t_E = \frac{1}{a_0}\left(2 \ln(2) v_E\right)$ $\qquad$ [t_E aus 1)]

$v_E = 1{,}12 \sqrt{l \cdot a_0}$

② Freier Fall der Gewichte: $a(t) = g$

$v(t) = g t$

$x(t) = \frac{1}{2} g t^2$

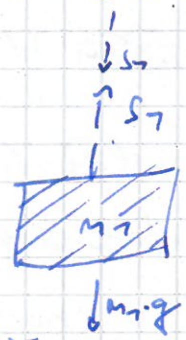
Rolle wird als Kreis angenommen: $\Theta_1 = \frac{1}{2} M R_1^2$

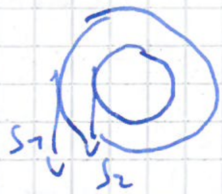
gesamte Rolle $\quad \Theta_2 = \frac{1}{2} M \cdot R_2^2$

Drallsatz: $\Theta \ddot{\varphi} = M_1 r_1 + M_2 r_2$

$\Theta \frac{\ddot{x}}{r_1} = M_1 r_1 + M_2 r_2$

r_1 ist ausschlaggebend





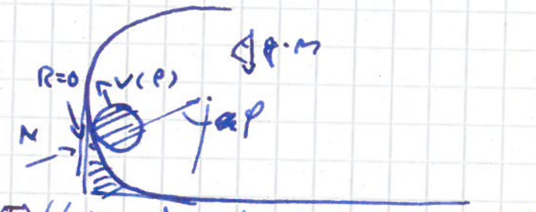
$\Theta \frac{\ddot{x}}{r_1} = m_1 r_1 + m_2 r_2 \qquad \ddot{x} \leq g$, sonst spannt Seil nicht

$\Theta = \frac{r_1}{g} (m_1 r_1 + m_2 r_2)$

$\Theta = \frac{1}{g} (r_1^2 m_1 + r_1 r_2 m_2)$???

(3) Energiesatz: $U_A + T_A = U_E + T_E$

$$0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot 2r + 0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$ (wenn Kugel oben ist)



$$0 + \frac{1}{2} m v_0^2 = m \cdot g \cdot r + m \cdot g \cdot \cos(\varphi) \cdot r + \frac{1}{2} m v^2 \quad (I)$$ (Wenn Kugel nicht ganz oben ist)
(Ab Höhe r)

$F = m\ddot{x} \Rightarrow N - m \cdot g \cdot \cos(\varphi) = m \cdot \ddot{x}$

$\ddot{x}$ ist hier die Zentrifugalbeschleunigung

$m \cdot \left(-\frac{v^2}{R}\right) = N - m \cdot g \cdot \cos(\varphi)$ $\quad [N \overset{!}{\geq} 0 \quad v(\varphi)^2 \geq g \cdot r \cdot \cos(\varphi)]$???

Einsetzen in (I)

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgr + mgr\cos(\varphi) + \frac{1}{2} mgr\cos(\varphi)$$

$$v_0^2 = gr(2 + 2\cos(\varphi) + \cos(\varphi)) = g \cdot r \cdot (2 + 3\cos(\varphi))$$