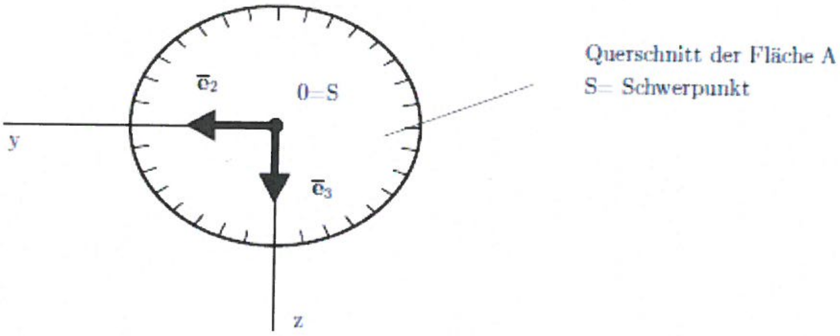
1 Flächenträgheitsmomente

1.1 Flächenträgheitsmomente bezogen auf die Schwerachsen



Die Flächenträgheitsmomente (FTM) sind ein Maß für die Steifigkeit eines Querschnittes. FTM sind von der Orientierung des Querschnitts abhängig.
Definition[1]:

"Wiederstandsmoment gegen Dehnung um y- (oder x-oder z-) Achse"

$I_{yy} = \int_A z_s^2 dA$	Axiales Eigen-Flächenträgheitsmoment bezogen auf die y - Achse.
$I_{zz} = \int_A y_s^2 dA$	Axiales Eigen-Flächenträgheitsmoment bezogen auf die z - Achse.
$I_{yz} = \int_A y_s z_s dA$	Axiales Eigen-Deviationsmoment bezüglich der Achsen y und z.

Maßgebend ist das I, um dessen Achse herum gebogen wird.

Eigenschaften:

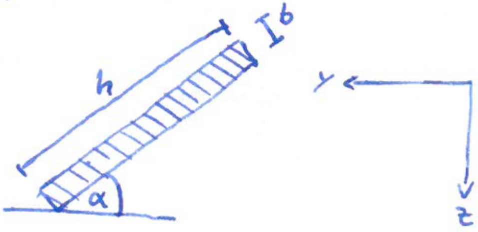
- Flächenträgheitsmomente haben die Dimension [Länge]^4
- I_{yy} und I_{zz} sind stets positiv, während I_{yz} auch negative Werte annehmen kann.
- Ist eine der Koordinatenachsen eine Symmetrieachse des Querschnitts, so verschwindet das Zentrifugalmoment.

Projektion dünnwandiger Profile:

$I_y = \frac{h^3 \cdot b}{12} \sin(\alpha)^2$

$I_z = \frac{h^3 b}{12} \cos(\alpha)^2$

$\alpha = 45°$: $I_y = I_z = \frac{h^3 \cdot b}{24}$



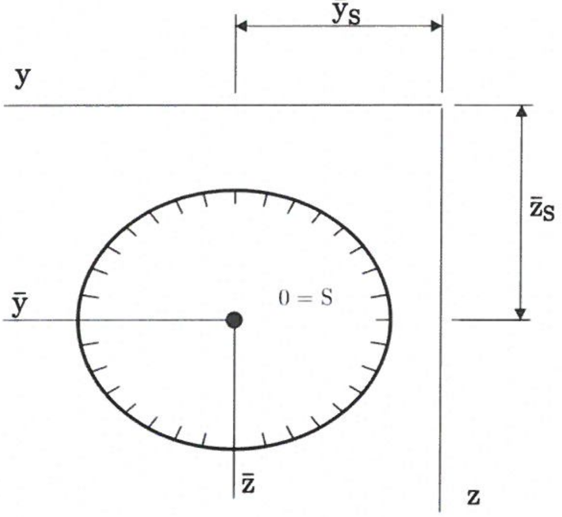
---

[1] Im folgenden wird auf die Darstellung der Einheitsvektoren verzichtet.

1.2 Flächenträgheitsmomente bezogen auf parallelverschobene Koordinaten

Bezüglich der parallelverschobenen Koordinatenachsen gilt:

Trägheitstensor : I_y und I_z normal,
$I_x = I_y + I_z$



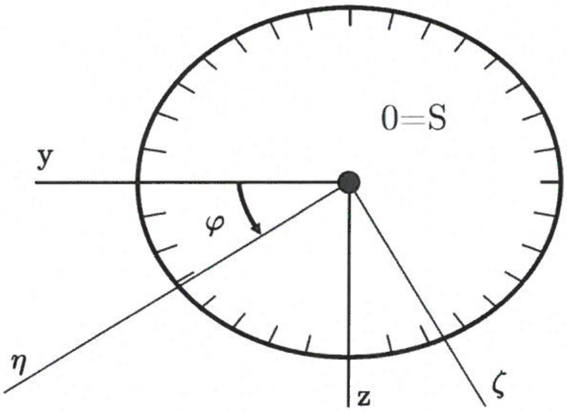
$$I_{yy} = \bar{I}_{yy} + (\bar{z}_s)^2 A$$

$$I_{zz} = \bar{I}_{zz} + (\bar{y}_s)^2 A$$

$$I_{yz} = \bar{I}_{yz} - \bar{y}_s \bar{z}_s A$$

Der jeweils zweite Summand (auf der rechten Seite) heißt *Steiner* Anteil.

1.3 Flächenträgheitsmomente bezogen auf gedrehte Koordinatenachsen



Koordinatentransformation

$$\eta = y\cos\varphi + z\sin\varphi$$

$$\zeta = -y\sin\varphi + z\cos\varphi$$

Die Flächenträgheitsmomente I_η, I_ζ und $I_{\eta\zeta}$ sind bezogen auf die um den Winkel φ gedrehten Koordinatenachsen η und ζ.

$$\begin{aligned}
I_{\eta\eta} &= \tfrac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) + \tfrac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\cos 2\varphi + I_{yz}\sin 2\varphi \\
I_{\zeta\zeta} &= \tfrac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) - \tfrac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\cos 2\varphi - I_{yz}\sin 2\varphi \\
I_{\eta\zeta} &= - \tfrac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\sin 2\varphi + I_{yz}\cos 2\varphi
\end{aligned}$$

1.4 Das polare Flächenträgheitsmoment

Das polare Flächenträgheitsmoment I_P ist bei Drehung der Koordinatenachsen invariant.

$$I_P = I_{\eta\eta} + I_{\zeta\zeta} = I_{yy} + I_{zz}$$

1.5 Hauptträgheitsmomente

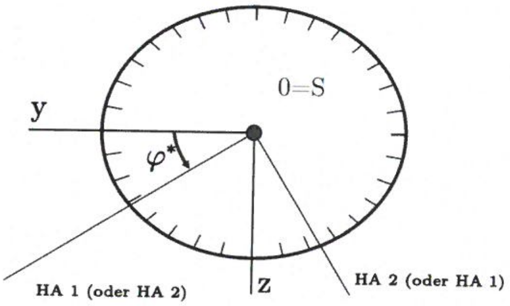
Hauptträgheitsachsen sind Achsen, deren Ursprung im Schwerpunkt liegt und zu denen die Flächenträgheitsmomente Extremwerte (Maximum und Minimum) annehmen. Das Zentrifugalmoment I_{yz} bezogen auf die Hauptträgheitsachsen ist gleich Null. Der Winkel zwischen dem y-z-Bezugssystem und den Hauptträgheitsachsen heißt φ^*. Ist ein Querschnitt achsensymmetrisch, so verschwindet sein Zentrifugalmoment bezüglich dieser Achse. Jede Symmetrieachse ist eine Hauptachse (HA).

Hauptträgheitsmomente

(Auch $I_{1,2}$)

$$I_{max} = I_1 = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4(I_{yz})^2}$$

$$I_{min} = I_2 = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4(I_{yz})^2}$$



Winkel φ^*

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}$$

SI - Umrechnungen:

$1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm} = 1000\,\mathrm{mm}$

$1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = 1000\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$

$1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} = 1\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}}$

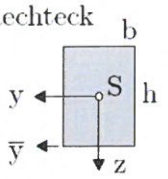
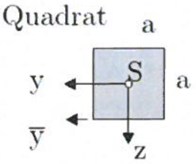
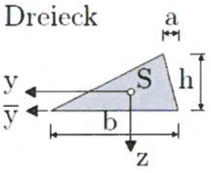
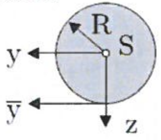
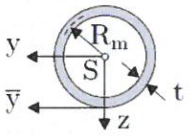
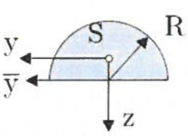
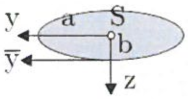
$1\,\mathrm{mm}^4 = 0{,}0001\,\mathrm{cm}^4 = 10^{-12}\,\mathrm{m}^4$

$\mathrm{cm}^3 = 10^3\,\mathrm{mm}^3$

$\mathrm{kNm} = 10^6\,\mathrm{Nmm}$

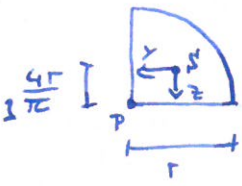
$\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2} = 100\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}$

$I_y + I_z = I_p$

Fläche	I_y	I_z	I_{yz}	I_p	$I_{\bar{y}}$
Rechteck  	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	$\frac{bh}{12}(h^2+b^2)$	$\frac{bh^3}{3}$
Quadrat  	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	0	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{a^4}{3}$
Dreieck  	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh}{36}(b^2 - ba + a^2)$	$-\frac{bh^2}{72}(b-2a)$	$\frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - ba + a^2)$	$\frac{bh^3}{12}$
Kreis  	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0	$\frac{\pi R^4}{2}$	$\frac{5\pi}{4}R^4$
dünner Kreisring $t \ll R_m$  	$\pi R_m^3 t$	$\pi R_m^3 t$	0	$2\pi R_m^3 t$	$3\pi R_m^3 t$
Halbkreis  	$\frac{R^4}{72\pi}(9\pi^2 - 64)$	$\frac{\pi R^4}{8}$	0	$\frac{R^4}{36\pi}(9\pi^2 - 32)$	$\frac{\pi R^4}{8}$
Ellipse  	$\frac{\pi}{4}ab^3$	$\frac{\pi}{4}ba^3$	0	$\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$	$\frac{5\pi}{4}ab^3$

Quelle: Gross, Hauger, Schröder, Wall, Technische Mechanik 2, Springer Verlag, 9. Auflage

Viertelkreis



$I_y = r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = I_z$

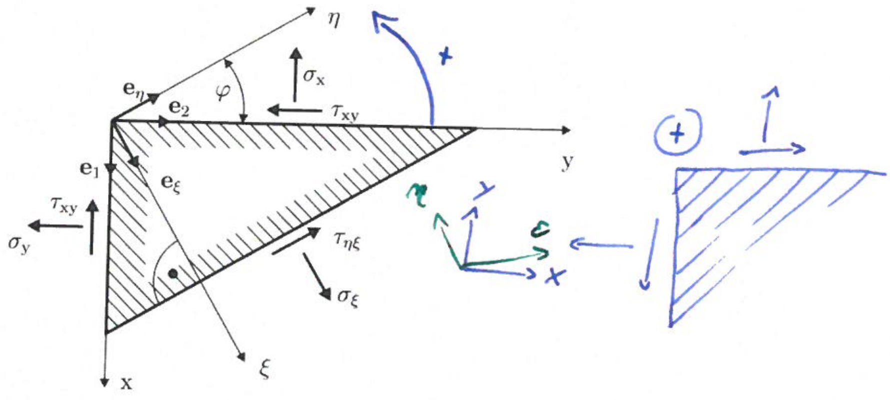
$I_{yz} = r^4\left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)$

$I_{yp} = \frac{\pi \cdot r^4}{16} = I_{zp}$

$I_{yzp} = \frac{r^4}{16}$

2 Der ebene Spannungszustand

2.1 Spannungstransformation

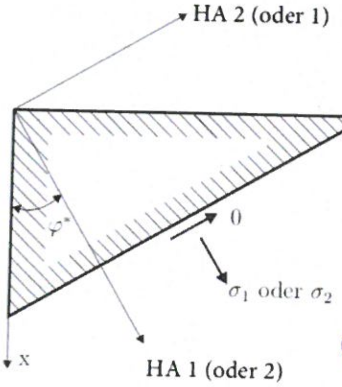


$$\begin{aligned}
\sigma_\xi &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) + \tfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos(2\varphi) + \tau_{xy}\sin(2\varphi)\\
\sigma_\eta &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) - \tfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos(2\varphi) - \tau_{xy}\sin(2\varphi)\\
\tau_{\eta\xi}=\tau_{\xi\eta} &= \phantom{\tfrac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)} - \tfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin(2\varphi) + \tau_{xy}\cos(2\varphi)
\end{aligned}$$

Analoge Berechnung funktioniert auch mit ε anstelle von σ

2.2 Hauptnormalspannungen

Die Hauptnomalspannungen ergeben sich für das um den Winkel φ^* gedrehte Basissystem, in dem die Schubspannungen zu Null und die Normalspannungen extremal werden.



Winkel $\varphi^* \hat{=}$ Richtung σ_I und σ_{II}

$$\tan(2\varphi^*) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

Hauptnormalspannungen σ_1, σ_2:

$$\sigma_1=\sigma_2 \longrightarrow \sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_x) \underset{\sigma_2}{\overset{\sigma_1}{\pm}} \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y-\sigma_x)^2 + \underline{4}\tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{xy} = 2\cdot G\cdot \varepsilon_{xy}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right] (\text{z.B})$$

2.3 Maximale Schubspannungen

$$\tau_{xy,max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

bei

$$\varphi^{**} = \varphi^* \pm 45°$$

Sonderfall bei Dehnung: EA, ΔT = konstant: $EA\,u'' = -n$

<u>Invarianten</u> des Spannungstensors: $I_\sigma = \text{Spur}(\sigma) = \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$

$$II_\sigma = \frac{1}{2}\left(\text{Spur}(\sigma)^2 - \text{Spur}(\sigma^T\sigma)\right)$$

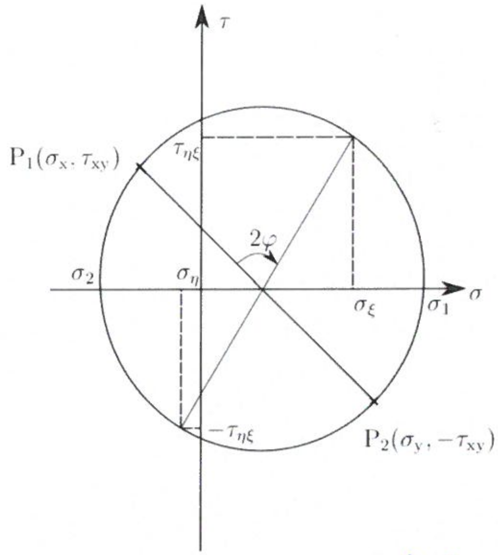
$$= \frac{1}{2}\left((I_\sigma)^2 - \underbrace{(\sigma_x^2+\tau_{xy}^2+\tau_{xy}^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2)}_{\text{gilt nur bei } \begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z\end{pmatrix} = \sigma}\right)$$

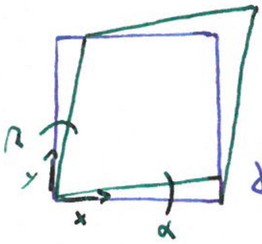
$$III_\sigma = \det(\sigma)$$

Wenn ε in Prozents $0{,}1\,\% \;\hat{=}\; 0.001$

:100

2.4 Der Mohr'sche Spannungskreis





$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$

Konstruktion:

1. Die Punkte $P_1(\sigma_x,\tau_{xy})$ und $P_2(\sigma_x, -\tau_{xy})$ in ein σ/τ- Diagramm einzeichnen und verbinden.
2. Kreis um den Schnittpunkt von der Gerade P_1-P_2 mit der σ-Achse ziehen.
3. Die Gerade um 2φ im Uhrzeigersinn drehen.
4. σ_ξ, σ_η und $\tau_{\eta\xi}$ ablesen.

$= \gamma_{xy} \cdot \frac{1}{2}$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix}$$

"Vergleichsspannung (Tresca)" $\hat{=}\; \sigma_I - \sigma_{II}$

2.5 Verzerrungszustand

Allgemein:

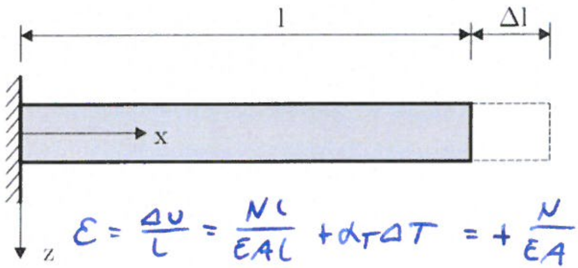
$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)$$

wobei u(x) der Verschiebungsvektor ist.
Dehnungen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$ $\tau_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$

Beispiel: Stabverlängerung infolge der Kraft F



$\varepsilon = \frac{\Delta u}{l} = \frac{Nl}{EAl} + \alpha_T \Delta T = + \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T$

$\varepsilon = u'(x)$

$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T \quad = + \frac{F}{EA} + \alpha_T \Delta T$

2.6 Stoffgesetz (Hooksches Gesetz)

$$\sigma = \mathrm{E}\,\varepsilon$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\mathrm{E}}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta\mathrm{T}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{\mathrm{E}}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha\Delta\mathrm{T}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{\mathrm{E}}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta\mathrm{T}$$

= 0 beim 2D-Fall ("Eben")

mit
ν := Querkontraktionszahl
α := Temperaturausdehnungskoeffizient
$\Delta\mathrm{T} = (\mathrm{T_i} - \mathrm{T_a})$:= Temperaturdifferenz
$\mathrm{E} = 2\mathrm{G}(1+\nu)$:= Elastizitätsmodul
G := Schubmodul

Verschiebung: ε_{xz} und τ_{xz} dann auch 0

$$\Delta u = \int_\ell \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{E\,A}} + \alpha_t \cdot \Delta\mathrm{T}d\ell \;=\; \frac{N}{EA}l + \alpha_T \Delta T l$$

$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$ "Hauptdehnungen"

$\tan(2\varphi) = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \rightarrow \varphi_2 = \varphi_1 + 90°$ "Richtung der Hauptdehnunge"

$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ "Maximale Winkelverzerung"

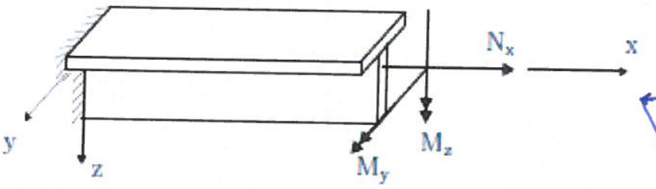
$\varepsilon_{x,y} = \frac{\Delta l}{l} \quad (\varepsilon_{xy} = 0 = \gamma_{xy})$ "In zwei Dimensionen"

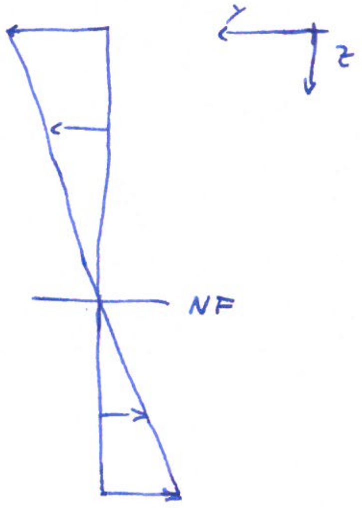
3 Normalspannung aus Biegung und Längskraft

3.1 Voraussetzungen

- Konstanter Querschnitt in Stablängsrichtung (x - Richtung)
- y - und z -Achsen sind Hauptträgheitsachsen des Querschnitts

3.2 Normalspannung infolge N_x, M_y und M_z



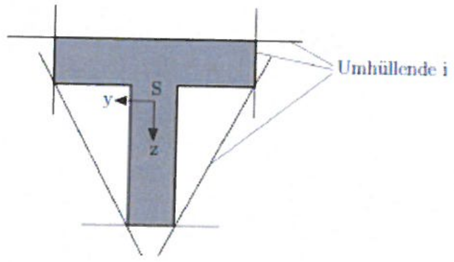


A:= Querschnittsfläche

Neutrale Faser: $\sigma(y,z) = 0 = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

3.3 Kernfläche



Der Kern eines Querschnittes ist der Querschnittsteil, in dem eine exzentrische Normalkraft angreifen muss, um im gesamten Querschnitt nur Normalspannungen eines Vorzeichens hervorzurufen. Die neutrale Faser liegt am Rand bzw. außerhalb des Querschnittes.

Trägheitsradien des Querschnitts:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{A} \qquad [mm^2]$$

Bestimmung der Eckpunkte der Kernfläche $P_i(y_{F,i}|z_{F,i})$:

$$y_{F,i} = -\frac{i_z^2}{y_{0,i}} \quad , \quad z_{F,i} = -\frac{i_y^2}{z_{0,i}}$$

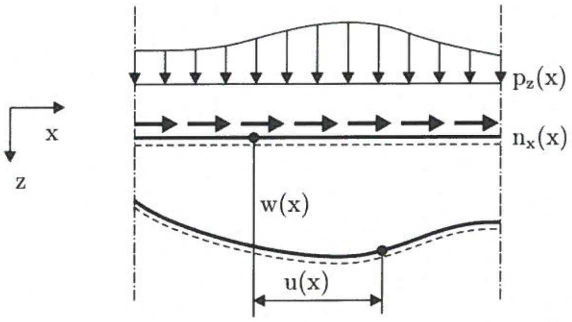
Mit $y_{0,i}$ und $z_{0,i}$ Schnittpunkte der umhüllenden Geraden i mit der y- bzw. z-Achse.

4 Differentialgleichung der Biegelinie

Darstellung des Verschiebungsvektors (allgemein):

Voraussetzungen:
- Prismatischer Stab mit gerader Balkenachse und einfach symm. Querschnitt
- Dünner Stab
- Querschnitt bleibt formtreu
- kleine Verschiebung
- Werkstoff homogen, isotrop, linear elastisch

$$\mathbf{u} = \mathrm{u}\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{v}\,\mathbf{e}_2 + \mathrm{w}\,\mathbf{e}_3$$



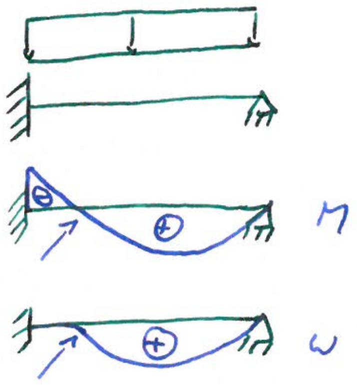


Abbildung 1: Darstellung eines ebenen Balken unter Belastung

Die Deformation der Stabachse wird bei ebenen Systemen durch folgende Differentialgleichungen bestimmt (Schubverformung wird vernachlässigt):

$$\begin{aligned} \mathrm{EI_y(x)w^{(4)}(x)} &= \mathrm{p_z(x)} \\ \mathrm{EI_y(x)w^{(3)}(x)} &= -\mathrm{Q_z(x)} \quad ! \\ \mathrm{EI_y(x)w^{(2)}(x)} &= -\mathrm{M_y(x)} \\ \mathrm{EI_y(x)w'(x)} &= -\mathrm{EI_y(x)}\varphi\mathrm{(x)} \end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned} \mathrm{EA(x)u^{(2)}(x)} &= -\mathrm{n_x(x)} \\ \mathrm{EA(x)u'(x)} &= \mathrm{N_x(x)} \end{aligned}$$

Die bei der Integration auftretenden Konstanten werden durch die statischen und geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt.

System stat. bestimmt : $f = 3n - (r + z)$; n Systeme, r Auflagerkräfte, z Gelenkkräfte

Momentenverlauf bestimmen

$EI\,w''(x) = -M$ ist Diffgleichung der Biegelinie q Belastung

System stat. unbestimmt

$EI\,w^{(4)}(x) = q$ ist Diffgleichung der Biegelinie

-o- : $M=0$

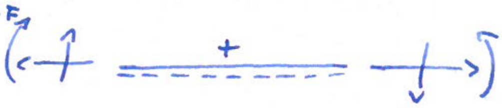
Randbedingungen:

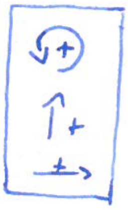
System stat. bestimmt : zwei RB pro Teilsystem
System stat unbestimmt : vier RB pro Teilsystem

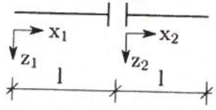
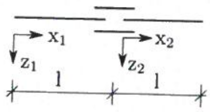
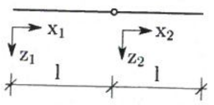
Lagerung	Geom. RB	stat. RB
Freies Ende 		N = 0, Q = 0, M = 0
vertikal verschieblich gelagert 	u = 0	Q = 0, M = 0
horizontal verschieblich gelagert 	w = 0	N = 0, M = 0
unverschieblich gelagert 	w = 0, u = 0	M = 0
vertikal verschiebliche Einspannung 	u = 0, w′ = 0	Q = 0
horizontal verschiebliche Einspannung 	w = 0, w′ = 0	N = 0
Einspannung 	u = 0, w = 0, w′ = 0	

Übergangsbedingungen:

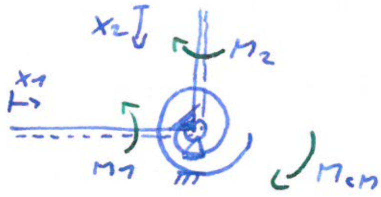
$F = R \cdot s = \omega \cdot c_F$
$\omega = \frac{F}{c_F}$





Gelenk	Übergangbedingung
Querkraftgelenk 	$u_1(x_1 = l) = u_2(x_2 = 0)$ $w_1(x_1 = l) \neq w_2(x_2 = 0)$ $w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0)$
Normalkraftgelenk 	$u_1(x_1 = l) \neq u_2(x_2 = 0)$ $w_1(x_1 = l) = w_2(x_2 = 0)$ $w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0)$
Momentengelenk  Unter Umständen: $Q_1(l) = Q_2(0)$	$u_1(x_1 = l) = u_2(x_2 = 0)$ $w_1(x_1 = l) = w_2(x_2 = 0)$ $w_1'(x_1 = l) \neq w_2'(x_2 = 0)$

$w(x)$: Durchbiegung
$w'(x)$: Biegewinkel
$w''(x)$: Moment
$u(x)$: Dehnung

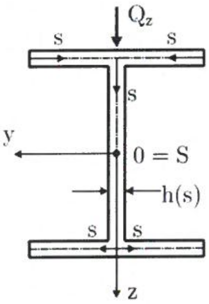


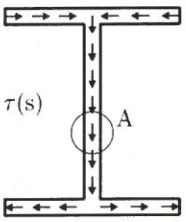
$M_{cm} = c_m \cdot \phi = c_m \cdot w_1'(x_1 = l) = EI w_1''(x_1 = l) + EI w_2''(x_2 = l)$
$= M_2(x_1 = l) - M_2(x_2 = l)$

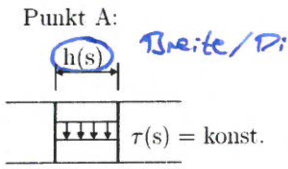
5 Schubspannungen infolge Querkraft

5.1 Symmetrische dünnwandige Querschnitte

Einführung einer Koordinate s entlang der Profilmittellinie. Die Schubspannungen $\tau(s)$ verlaufen in Richtung der Profilmittellinie und die Verteilung ist über die Profildicke konstant.







Breite/Dicke

Allgemein: **Schubspannung infolge Q_z**

Um y-Achse

statisches Moment $S_y(z) = \int_A z \cdot h\,ds$

Schubfluss $t(s) = -\frac{Q_z \cdot S_y}{I_y}$

Schubspannung $\tau(s) = \frac{t(s)}{h(s)} = -\frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot h(s)}$

Allgemein: **Schubspannung infolge Q_y**

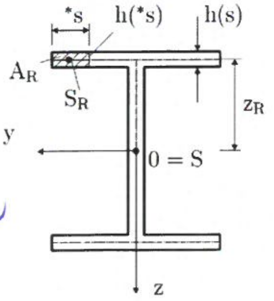
Um z-Achse

statisches Moment $S_z(y) = \int_A y \cdot h\,ds$

Schubfluss $t(s) = -\frac{Q_y \cdot S_z}{I_z}$

Schubspannung $\tau(s) = \frac{t(s)}{h(s)} = -\frac{Q_y \cdot S_z}{I_z \cdot h(s)}$

Für eine bestimmte Faser $S^* =$ konst.:



$$\tau(s^*) = -\frac{Q_z \cdot s_y(s^*)}{I_y \cdot h(s^*)}$$

mit dem statischen Moment der Restfläche

$$S_y(s^*) = A_R \cdot z_R = \int_A z\,dA = \int_0^{s^*} z(s) \cdot h(s)\,ds$$

Für Q_y analoges Vorgehen.

1. Koordinate s (Laufvariable) einzeichnen
2. Querschnitt mit z-h-Linie (z-Abstand · h(s))
3. Querschnitt mit statischem Moment

   $S_y = \int z\text{-}h\text{-Linie}\,ds$
4. Schubfluss t(s): $t(s) = -\frac{Q_z}{I_y} \cdot S_y$
5. Schubspannung τ(s): $\tau(s) = \frac{t(s)}{h(s)}$

Verlauf bleibt gleich

6.3 Lage des Schubmittelpunktes M bei dünnwandig offenen Profilen

Def.: Der Schubmittelpunkt M ist der Punkt, durch den die Wirkungslinie der Querkraft gehen muss, damit sich der Querschnitt nicht verdreht, also keine Torsion erfährt.

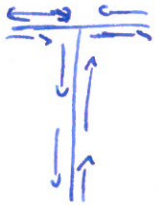
- Symmetrieachsen sind geometrische Orte von M. Bei Doppelsymmetrie gilt $\mathrm{M} = \mathrm{S}$
- Schneiden sich bei Polygonquerschnitten sämtliche Profilmittellinien in einem Punkt, so ist dies der Schubmittelpunkt M.

Berechnung der Koordinaten des Schubmittelpunktes:

- Berechnung der Teilschubkräfte $\mathrm{T_i} = \int \mathrm{t(s)\,ds}$
- Wahl eines Bezugspunktes B , der den Abstand $\mathrm{y_m}$ vom Schwerpunkt hat
- Momentengleichgewicht um den Punkt B berechnen und nach $\mathrm{y_m}$ auflösen. Das liefert den Abstand zwischen Schubmittelpunkt $\mathrm{M} = \mathrm{B}$ und Schwerpunkt

6 Schubspannung infolge Torsion

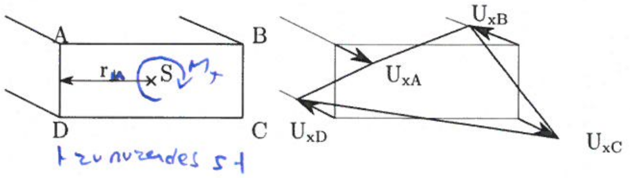
über die Länge des Stabes



Verdrillung: $\vartheta(x) = \frac{M_T(x)}{GI_T}$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{mm}}\right]$, Verdrehung: $\varphi = \int \vartheta(x)\,dx$ [rad]

Verwölbung: $u_x(s) = \int_s \left[\frac{M_T}{2GA_m h(s)} - r_\perp \vartheta\right] ds + c$ (für dünnw. QS)

mit Torsionsmoment M_T, Schubmodul G, Torsionsträgheitsmoment I_T und umschlossener Fläche A_m



6.1 Kreisförmiger Vollquerschnitt

T.-trägheitsmoment	Widerstandsmoment	Schubspannung	Größte Schubs.
$I_T = \frac{\pi R^4}{2}$	$W_T = \frac{I_T}{R} = \frac{\pi R^3}{2}$	$\tau = \frac{M_T}{I_T} r$	$\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}$

6.2 Dünnwandige Profile

mit Stablängen h und Stabdicken t:

Dünnw. geschlossene Profile

A_m: Flächeninhalt t: Dicke des Profils

T.-trägheitsmoment ...für dünnw. Kreis-QS $I_T = \frac{4A_m^2 t}{U}$ ...für zusammeng. Rechtecke $I_T = \frac{4A_m^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{t_i}}$

T.-widerstandsmoment	Schubspannung	Größte Schubs.
$W_T = 2A_m t_{min}$	$\tau = \frac{M_T}{2A_m t}$	$\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}$

Dünnw. offene Profile

T.-trägheitsmoment	T.-widerstandsmoment	Schubspannung	Größte Schubs.
$I_T = \frac{1}{3}\xi \sum_{i=1}^{n} t_i^3 \underline{h_i}$	$W_T = \frac{I_T}{t_{max}}$	$\underline{\underline{\underset{M}{\tau}}} = \frac{M_T}{I_T} t_i$	$\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}$

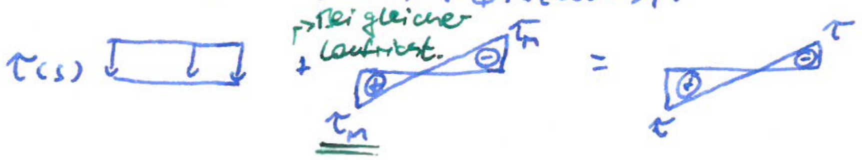
[Länge⁴]

Profilbeiwert ξ:

Querschnittsform	L	[	T	I	I IPB	□	○
ξ- Werte	0,99	1,12	1,12	1,31	1,29	1,0	1,0

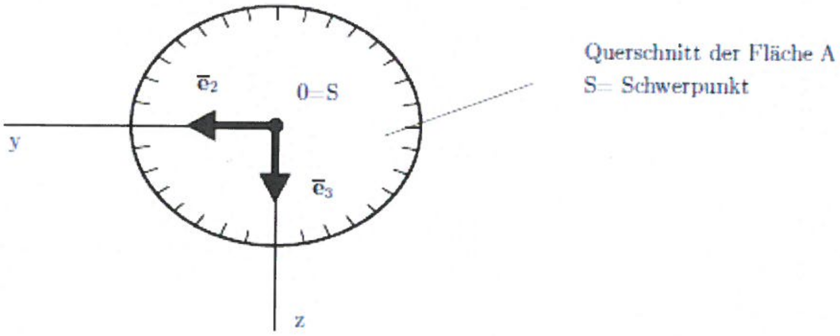
M_T z.B. $Q_z \cdot y$

Schubspannungsverlauf an Stelle A:



1 Flächenträgheitsmomente

1.1 Flächenträgheitsmomente bezogen auf die Schwerachsen



Die Flächenträgheitsmomente (FTM) sind ein Maß für die Steifigkeit eines Querschnittes. FTM sind von der Orientierung des Querschnitts abhängig.
Definition[1]:

„Wiederstandsmoment gegen Dehnung um y- (oder x-oder z-) Achse"

$I_{yy} = \int_A z_s^2 dA$	Axiales Eigen-Flächenträgheitsmoment bezogen auf die y - Achse.
$I_{zz} = \int_A y_s^2 dA$	Axiales Eigen-Flächenträgheitsmoment bezogen auf die z - Achse.
$I_{yz} = \int_A y_s z_s dA$	Axiales Eigen-Deviationsmoment bezüglich der Achsen y und z.

Maßgebend ist das I, um dessen Achse herum gebogen wird.

Eigenschaften:

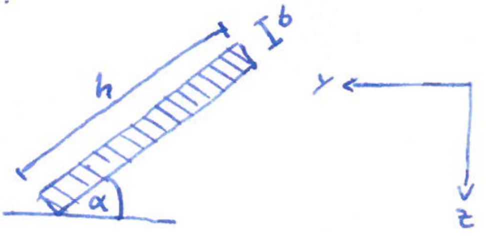
- Flächenträgheitsmomente haben die Dimension [Länge]^4
- I_{yy} und I_{zz} sind stets positiv, während I_{yz} auch negative Werte annehmen kann.
- Ist eine der Koordinatenachsen eine Symmetrieachse des Querschnitts, so verschwindet das Zentrifugalmoment.

Projektion dünnwandiger Profile:

$$I_y = \frac{h^3 \cdot b}{12} \sin(\alpha)^2$$

$$I_z = \frac{h^3 b}{12} \cos(\alpha)^2$$

$$\alpha = 45° : I_y = I_z = \frac{h^3 \cdot b}{24}$$



---

[1] Im folgenden wird auf die Darstellung der Einheitsvektoren verzichtet.

1.2 Flächenträgheitsmomente bezogen auf parallelverschobene Koordinaten

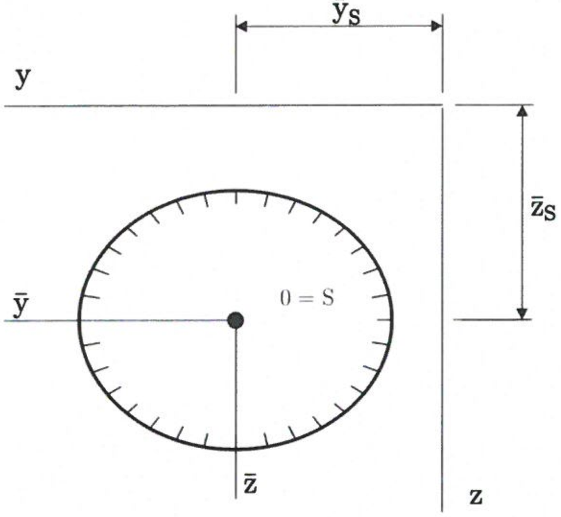
Bezüglich der parallelverschobenen Koordinatenachsen gilt:

Trägheitstensor : I_y und I_z normal,
$I_x = I_y + I_z$

$$I_{yy} = \bar{I}_{yy} + (\bar{\mathrm{z}}_\mathrm{s})^2\mathrm{A}$$

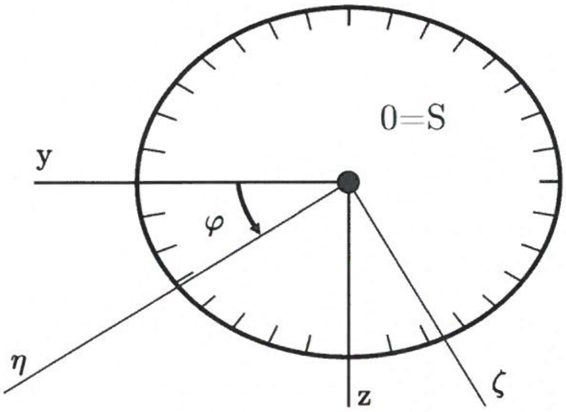
$$I_{zz} = \bar{I}_{zz} + (\bar{\mathrm{y}}_\mathrm{s})^2\mathrm{A}$$

$$I_{yz} = \bar{I}_{yz} - \bar{\mathrm{y}}_\mathrm{s}\bar{\mathrm{z}}_\mathrm{s}\mathrm{A}$$



Der jeweils zweite Summand (auf der rechten Seite) heißt *Steiner* Anteil.

1.3 Flächenträgheitsmomente bezogen auf gedrehte Koordinatenachsen



Koordinatentransformation

$$\eta = \mathrm{y}\cos\varphi + \mathrm{z}\sin\varphi$$

$$\zeta = -\mathrm{y}\sin\varphi + \mathrm{z}\cos\varphi$$

Die Flächenträgheitsmomente I_η, I_ζ und $I_{\eta\zeta}$ sind bezogen auf die um den Winkel φ gedrehten Koordinatenachsen η und ζ.

$$\begin{aligned}
I_{\eta\eta} &= \tfrac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) &&+ \tfrac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\cos 2\varphi &&+ I_{yz}\sin 2\varphi \\
I_{\zeta\zeta} &= \tfrac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) &&- \tfrac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\cos 2\varphi &&- I_{yz}\sin 2\varphi \\
I_{\eta\zeta} &= &&- \tfrac{1}{2}(I_{yy} - I_{zz})\sin 2\varphi &&+ I_{yz}\cos 2\varphi
\end{aligned}$$

1.4 Das polare Flächenträgheitsmoment

Das polare Flächenträgheitsmoment I_P ist bei Drehung der Koordinatenachsen invariant.

$$I_P = I_{\eta\eta} + I_{\zeta\zeta} = I_{yy} + I_{zz}$$

1.5 Hauptträgheitsmomente

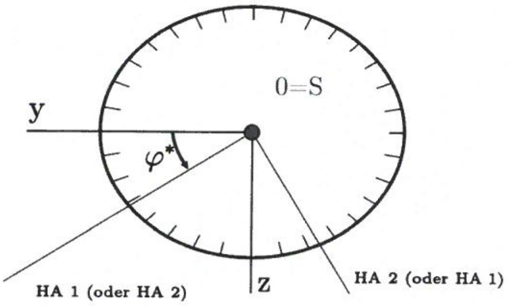
Hauptträgheitsachsen sind Achsen, deren Ursprung im Schwerpunkt liegt und zu denen die Flächenträgheitsmomente Extremwerte (Maximum und Minimum) annehmen. Das Zentrifugalmoment I_{yz} bezogen auf die Hauptträgheitsachsen ist gleich Null. Der Winkel zwischen dem y-z-Bezugssystem und den Hauptträgheitsachsen heißt φ^*. Ist ein Querschnitt achsensymmetrisch, so verschwindet sein Zentrifugalmoment bezüglich dieser Achse. Jede Symmetrieachse ist eine Hauptachse (HA).

Hauptträgheitsmomente

(Auch $I_{1,2}$)

$$I_{max} = I_1 = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4(I_{yz})^2}$$

$$I_{min} = I_2 = \frac{1}{2}(I_{yy} + I_{zz}) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_{yy} - I_{zz})^2 + 4(I_{yz})^2}$$



Winkel φ^*

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}}$$

SI - Umrechnungen:

1 Meter = 100cm = 1000 mm

$1 \frac{N}{mm^2} = 1000 \frac{kN}{m^2}$

$1 \frac{N}{mm} = 1 \frac{kN}{m}$

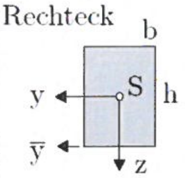
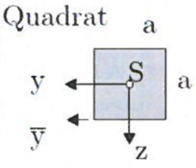
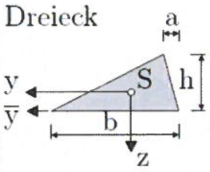
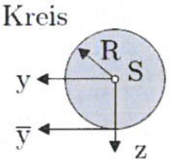
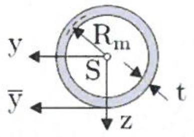
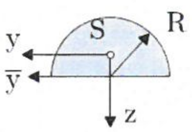
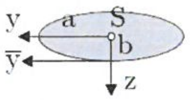
$1 mm^4 = 0{,}0001\ cm^4 = 10^{-12} m^4$

$cm^3 = 10^3 mm^3$

$kNm = 10^6 Nmm$

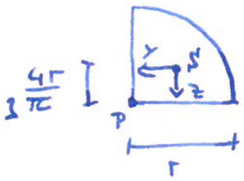
$\frac{kN}{mm^2} = 100 \frac{kN}{cm^2}$

$I_y + I_z = I_p$

Fläche	I_y	I_z	I_{yz}	I_p	$I_{\bar{y}}$
Rechteck 	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	$\frac{bh}{12}(h^2+b^2)$	$\frac{bh^3}{3}$
Quadrat 	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	0	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{a^4}{3}$
Dreieck 	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh}{36}(b^2 - ba + a^2)$	$-\frac{bh^2}{72}(b-2a)$	$\frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - ba + a^2)$	$\frac{bh^3}{12}$
Kreis 	$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0	$\frac{\pi R^4}{2}$	$\frac{5\pi}{4}R^4$
dünner Kreisring $t \ll R_m$ 	$\pi R_m^3 t$	$\pi R_m^3 t$	0	$2\pi R_m^3 t$	$3\pi R_m^3 t$
Halbkreis 	$\frac{R^4}{72\pi}(9\pi^2 - 64)$	$\frac{\pi R^4}{8}$	0	$\frac{R^4}{36\pi}(9\pi^2 - 32)$	$\frac{\pi R^4}{8}$
Ellipse 	$\frac{\pi}{4}ab^3$	$\frac{\pi}{4}ba^3$	0	$\frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$	$\frac{5\pi}{4}ab^3$

Quelle: Gross, Hauger, Schröder, Wall, Technische Mechanik 2, Springer Verlag, 9. Auflage

Viertelkreis



$I_y = r^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = I_z$

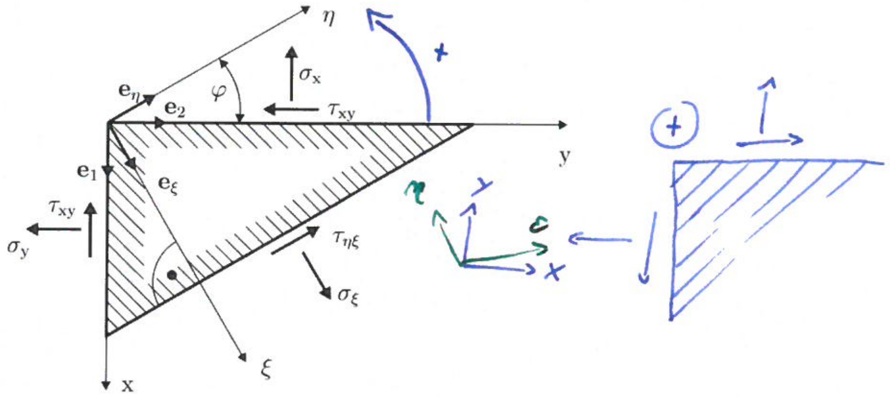
$I_{yz} = r^4\left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)$

$I_{yp} = \frac{\pi \cdot r^4}{16} = I_{zp}$

$I_{yzp} = \frac{r^4}{16}$

2 Der ebene Spannungszustand

2.1 Spannungstransformation

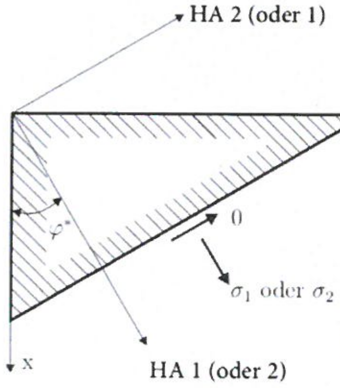


$$\begin{aligned}
\sigma_\xi &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) &+& \tfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos(2\varphi) &+& \tau_{xy}\sin(2\varphi)\\
\sigma_\eta &= \tfrac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) &-& \tfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos(2\varphi) &-& \tau_{xy}\sin(2\varphi)\\
\tau_{\eta\xi}=\tau_{\xi\eta} &= &-& \tfrac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin(2\varphi) &+& \tau_{xy}\cos(2\varphi)
\end{aligned}$$

Analoge Berechnung funktioniert auch mit ε anstelle von σ

2.2 Hauptnormalspannungen

Die Hauptnomalspannungen ergeben sich für das um den Winkel φ^* gedrehte Basissystem, in dem die Schubspannungen zu Null und die Normalspannungen extremal werden.



Winkel $\varphi^* \hat{=}$ Richtung σ_I und σ_{II}

$$\tan(2\varphi^*) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

Hauptnormalspannungen σ_1, σ_2:

$\sigma_1 = \sigma_2 \longrightarrow$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_x) \overset{\sigma_1}{\underset{\sigma_2}{\pm}} \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y-\sigma_x)^2+4\tau_{xy}^2}$$

$\tau_{xy} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{xy}$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ $\quad [\frac{N}{m^2}]$ (z.B)

2.3 Maximale Schubspannungen

$$\tau_{xy,max} = \sqrt{\left(\tfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

bei

$$\varphi^{**} = \varphi^* \pm 45°$$

Sonderfall bei Dehnung: EA, ΔT = konstant: $EA\,u'' = -n$

Invarianten des Spannungstensors: $I_\sigma = \mathrm{Spur}(\sigma) = \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$

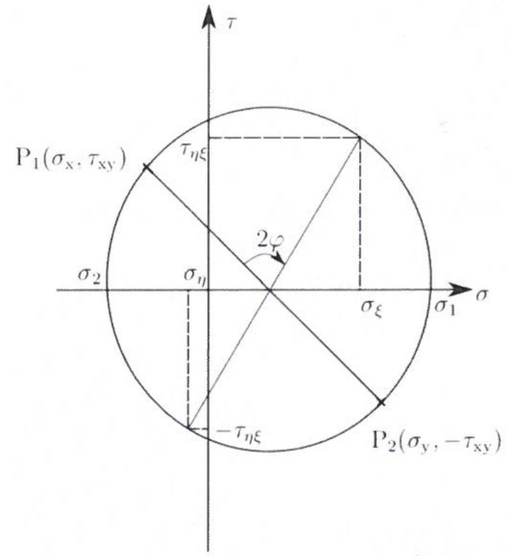
$II_\sigma = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}(\sigma)^2 - \mathrm{Spur}(\sigma^T\sigma))$

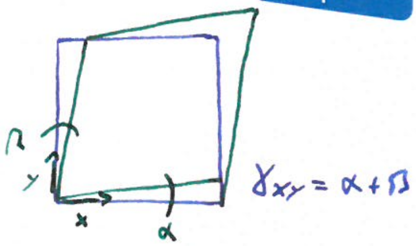
$= \frac{1}{2}((I_\sigma)^2 - \underbrace{(\sigma_x^2+\tau_{xy}^2+\tau_{xy}^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2))}_{\text{gilt nur bei } \begin{pmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & 0\\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z\end{pmatrix} = \sigma}$

$III_\sigma = \det(\sigma)$

Wenn ε in Prozent: $0{,}7\,\% \xrightarrow{:100} \hat{=}\, 0{,}007$

2.4 Der Mohr'sche Spannungskreis





Konstruktion:

1. Die Punkte $P_1(\sigma_x,\tau_{xy})$ und $P_2(\sigma_x, -\tau_{xy})$ in ein σ/τ- Diagramm einzeichnen und verbinden.
2. Kreis um den Schnittpunkt von der Gerade P_1-P_2 mit der σ-Achse ziehen.
3. Die Gerade um 2φ im Uhrzeigersinn drehen.
4. σ_ξ, σ_η und $\tau_{\eta\xi}$ ablesen.

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} \cdot \frac{1}{2}$$

"Vergleichsspannung (Tresca)" $\hat{=}\ \sigma_I - \sigma_{II}$

2.5 Verzerrungszustand

Allgemein:

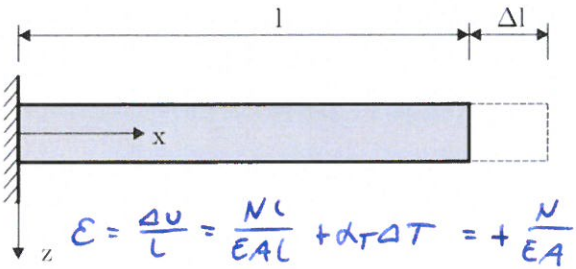
$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i}\right)$$

wobei u(x) der Verschiebungsvektor ist.
Dehnungen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \quad \tau_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

Beispiel: Stabverlängerung infolge der Kraft F



$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{l} = \frac{N l}{EAl} + \alpha_T \Delta T = + \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T$$

$$\varepsilon = u'(x)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T \qquad = + \frac{F}{EA} + \alpha_T \Delta T$$

2.6 Stoffgesetz (Hooksches Gesetz)

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha\Delta T$$

$= 0$ beim 2D-Fall ("Eben")

mit

ν := Querkontraktionszahl
α := Temperaturausdehnungskoeffizient
$\Delta T = (T_i - T_a)$:= Temperaturdifferenz
$E = 2G(1+\nu)$:= Elastizitätsmodul
G := Schubmodul

Verschiebung: ε_{xz} und τ_{xz} dann auch 0

$$\Delta u = \int_\ell \frac{N}{EA} + \alpha_t \cdot \Delta T d\ell = \frac{N}{EA} l + \alpha_T \Delta T l$$

$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$ "Hauptdehnungen"

$\tan(2\varphi) = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \to \varphi_2 = \varphi_1 + 90°$ "Richtung der Hauptdehnungen"

$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ "Maximale Winkelverzerrung"

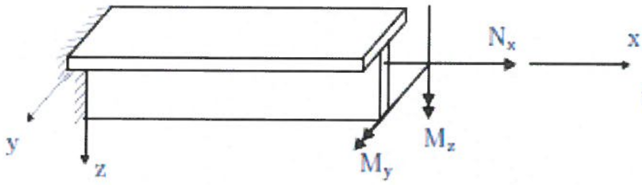
$\varepsilon_{x,y} = \frac{\Delta l}{l} \quad (\varepsilon_{xy} = 0 = \gamma_{xy})$ "In zwei Dimensionen"

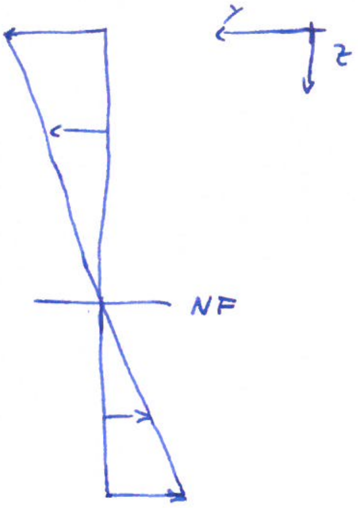
3 Normalspannung aus Biegung und Längskraft

3.1 Voraussetzungen

- Konstanter Querschnitt in Stablängsrichtung (x - Richtung)
- y - und z -Achsen sind Hauptträgheitsachsen des Querschnitts

3.2 Normalspannung infolge N_x, M_y und M_z



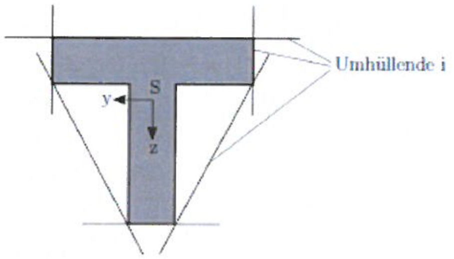


A:= Querschnittsfläche

Neutrale Faser : $\sigma(y,z) = 0 = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

3.3 Kernfläche



Der Kern eines Querschnittes ist der Querschnittsteil, in dem eine exzentrische Normalkraft angreifen muss, um im gesamten Querschnitt nur Normalspannungen eines Vorzeichens hervorzurufen. Die neutrale Faser liegt am Rand bzw. außerhalb des Querschnittes.

Trägheitsradien des Querschnitts:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{A} \qquad [mm^2]$$

Bestimmung der Eckpunkte der Kernfläche $P_i(y_{F,i}|z_{F,i})$:

$$y_{F,i} = -\frac{i_z^2}{y_{0,i}} \quad , \quad z_{F,i} = -\frac{i_y^2}{z_{0,i}}$$

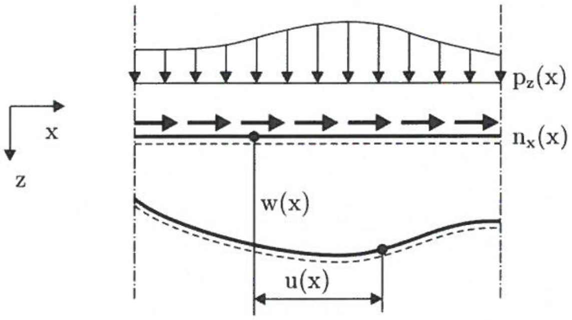
Mit $y_{0,i}$ und $z_{0,i}$ Schnittpunkte der umhüllenden Geraden i mit der y- bzw. z-Achse.

4 Differentialgleichung der Biegelinie

Darstellung des Verschiebungsvektors (allgemein):

Voraussetzungen:
- Prismatischer Stab mit gerader Balkenachse und einfach symm. Querschnitt
- Dünner Stab
- Querschnitt bleibt formtreu
- kleine Verschiebung
- Werkstoff homogen, isotrop, linear elastisch

$$\mathbf{u} = \mathrm{u}\,\mathbf{e}_1 + \mathrm{v}\,\mathbf{e}_2 + \mathrm{w}\,\mathbf{e}_3$$



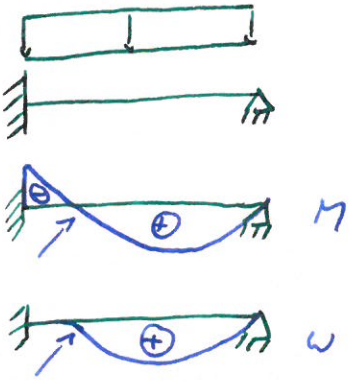


Abbildung 1: Darstellung eines ebenen Balken unter Belastung

Die Deformation der Stabachse wird bei ebenen Systemen durch folgende Differentialgleichungen bestimmt (Schubverformung wird vernachlässigt):

$$\begin{aligned} \mathrm{EI_y(x)w^{(4)}(x)} &= \mathrm{p_z(x)} \\ \mathrm{EI_y(x)w^{(3)}(x)} &= -\mathrm{Q_z(x)} \quad ! \\ \mathrm{EI_y(x)w^{(2)}(x)} &= -\mathrm{M_y(x)} \\ \mathrm{EI_y(x)w'(x)} &= -\mathrm{EI_y(x)}\varphi\mathrm{(x)} \end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned} \mathrm{EA(x)u^{(2)}(x)} &= -\mathrm{n_x(x)} \\ \mathrm{EA(x)u'(x)} &= \mathrm{N_x(x)} \end{aligned}$$

Die bei der Integration auftretenden Konstanten werden durch die statischen und geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt.

System stat. bestimmt : $f = 3n - (r + z)$; n Systeme, r Auflagerkräfte, z Gelenkkräfte

Momentenverlauf bestimmen

$EI\,w''(x) = -M$ ist Diffgleichung der Biegelinie q Belastung

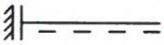
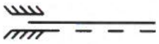
System stat. unbestimmt

$EI\,w^{(4)}(x) = q$ ist Diffgleichung der Biegelinie

$-\circ-$: $M = 0$

Randbedingungen:

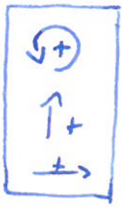
System stat. bestimmt : zwei RB pro Teilsystem
System stat unbestimmt : vier RB pro Teilsystem

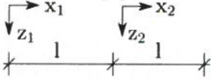
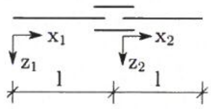
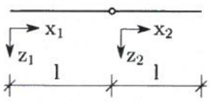
Lagerung	Geom. RB	stat. RB
Freies Ende 		N = 0, Q = 0, M = 0
vertikal verschieblich gelagert 	u = 0	Q = 0, M = 0
horizontal verschieblich gelagert 	w = 0	N = 0, M = 0
unverschieblich gelagert 	w = 0, u = 0	M = 0
vertikal verschiebliche Einspannung 	u = 0, w′ = 0	Q = 0
horizontal verschiebliche Einspannung 	w = 0, w′ = 0	N = 0
Einspannung 	u = 0, w = 0, w′ = 0	

Übergangsbedingungen:

$F = R \cdot s = w \cdot c_F$

$w = \frac{F}{c_F}$



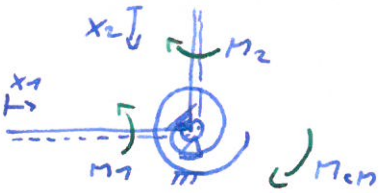
Gelenk	Übergangbedingung
Querkraftgelenk 	$u_1(x_1 = l) = u_2(x_2 = 0)$ $w_1(x_1 = l) \neq w_2(x_2 = 0)$ $w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0)$
Normalkraftgelenk 	$u_1(x_1 = l) \neq u_2(x_2 = 0)$ $w_1(x_1 = l) = w_2(x_2 = 0)$ $w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0)$
Momentengelenk  Unter Umständen : $Q_1(l) = Q_2(0)$	$u_1(x_1 = l) = u_2(x_2 = 0)$ $w_1(x_1 = l) = w_2(x_2 = 0)$ $w_1'(x_1 = l) \neq w_2'(x_2 = 0)$

$w(x)$: Durchbiegung

$w'(x)$: Biegewinkel

$w''(x)$: Moment

$u(x)$: Dehnung



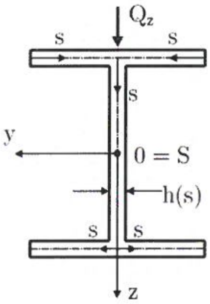
$$M_{cm} = c_m \cdot \phi = c_m \cdot w_1'(x_1 = l) = EI w_1''(x_1 = l) + EI w_2''(x_2 = l)$$

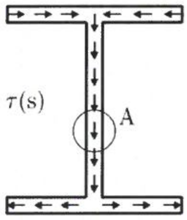
$$= M_2(x_1 = l) - M_2(x_2 = l)$$

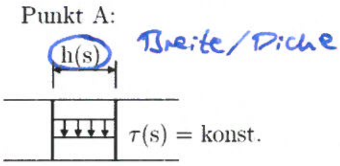
5 Schubspannungen infolge Querkraft

5.1 Symmetrische dünnwandige Querschnitte

Einführung einer Koordinate s entlang der Profilmittellinie. Die Schubspannungen $\tau(s)$ verlaufen in Richtung der Profilmittellinie und die Verteilung ist über die Profildicke konstant.







Allgemein: **Schubspannung infolge Q_z**

Um y-Achse

statisches Moment $S_y(z) = \int_A z \cdot \boxed{h} ds$

Schubfluss $t(s) = -\frac{Q_z \cdot S_y}{I_y}$

Schubspannung $\tau(s) = \frac{t(s)}{h(s)} = -\frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot h(s)}$

Allgemein: **Schubspannung infolge Q_y**

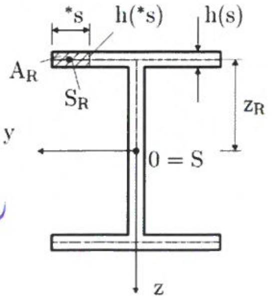
Um z-Achse

statisches Moment $S_z(y) = \int_A y \cdot h\, ds$

Schubfluss $t(s) = -\frac{Q_y \cdot S_z}{I_z}$

Schubspannung $\tau(s) = \frac{t(s)}{h(s)} = -\frac{Q_y \cdot S_z}{I_z \cdot h(s)}$

Für eine bestimmte Faser $S^* =$ konst.:



$$\tau(s^*) = -\frac{Q_z \cdot s_y(s^*)}{I_y \cdot h(s^*)}$$

mit dem statischen Moment der Restfläche

$$S_y(s^*) = A_R \cdot z_R = \int_A z\, dA = \int_0^{s^*} z(s) \cdot h(s)\, ds$$

Für Q_y analoges Vorgehen.

1. koordinate s ((aufvariable)einzeichnen
2. Querschnitt mit z-h-Linie (z-Abstand $\cdot h(s)$)
3. Querschnitt mit statischen Momet
   $S_y = \int z$-h-Linie ds
4. Schubfluss t(s): $t(s) = -\frac{Q_z}{I_y} \cdot S_y$
5. Schubspannung $\tau(s)$: $\tau(s) = \frac{t(s)}{h(s)}$

Verlauf bleibt gleich

6.3 Lage des Schubmittelpunktes M bei dünnwandig offenen Profilen

Def.: Der Schubmittelpunkt M ist der Punkt, durch den die Wirkungslinie der Querkraft gehen muss, damit sich der Querschnitt nicht verdreht, also keine Torsion erfährt.

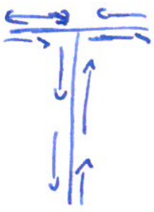
- Symmetrieachsen sind geometrische Orte von M. Bei Doppelsymmetrie gilt $\mathrm{M} = \mathrm{S}$
- Schneiden sich bei Polygonquerschnitten sämtliche Profilmittellinien in einem Punkt, so ist dies der Schubmittelpunkt M.

Berechnung der Koordinaten des Schubmittelpunktes:

- Berechnung der Teilschubkräfte $\mathrm{T_i} = \int \mathrm{t(s)}\,\mathrm{ds}$
- Wahl eines Bezugspunktes B , der den Abstand $\mathrm{y_m}$ vom Schwerpunkt hat
- Momentengleichgewicht um den Punkt B berechnen und nach $\mathrm{y_m}$ auflösen. Das liefert den Abstand zwischen Schubmittelpunkt $\mathrm{M} = \mathrm{B}$ und Schwerpunkt

6 Schubspannung infolge Torsion

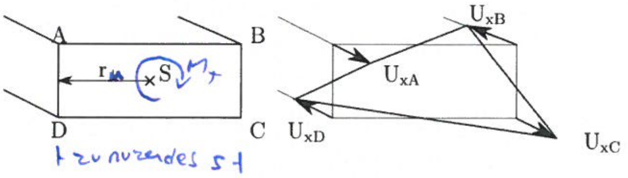
Über die Länge des Stabes



Verdrillung: $\vartheta(x) = \frac{M_T(x)}{GI_T}$, [rad/mm] Verdrehung: $\varphi = \int \vartheta(x)\,dx$ [rad]

Verwölbung: $u_x(s) = \int_s \left[\frac{M_T}{2GA_m h(s)} - r_\perp \vartheta\right] ds + c$ (für dünnw. QS)

mit Torsionsmoment M_T, Schubmodul G, Torsionsträgheitsmoment I_T und umschlossener Fläche A_m



6.1 Kreisförmiger Vollquerschnitt

T.-trägheitsmoment	Widerstandsmoment	Schubspannung	Größte Schubs.
$I_T = \frac{\pi R^4}{2}$	$W_T = \frac{I_T}{R} = \frac{\pi R^3}{2}$	$\tau = \frac{M_T}{I_T} r$	$\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}$

6.2 Dünnwandige Profile

mit Stablängen h und Stabdicken t:

Dünnw. geschlossene Profile

A_m: Flächeninhalt t: Dicke des Profils

T.-trägheitsmoment

...für dünnw. Kreis-QS $I_T = \frac{4A_m^2 t}{U}$

...für zusammeng. Rechtecke $I_T = \frac{4A_m^2}{\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{t_i}}$

T.-widerstandsmoment $W_T = 2A_m t_{min}$

Schubspannung $\tau = \frac{M_T}{2A_m t}$

Größte Schubs. $\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}$

Dünnw. offene Profile

T.-trägheitsmoment	T.-widerstandsmoment	Schubspannung	Größte Schubs.
$I_T = \frac{1}{3}\xi \sum_{i=1}^{n} t_i^3 h_i$	$W_T = \frac{I_T}{t_{max}}$	$\underset{M}{\tau} = \frac{M_T}{I_T} t_i$	$\tau_{max} = \frac{M_T}{W_T}$

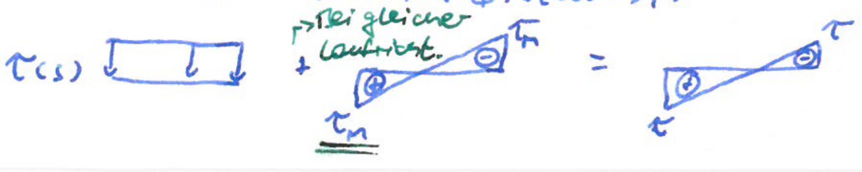
[Länge⁴]

Profilbeiwert ξ:

Querschnittsform	∟	[	T	I	I IPB	▭	○
ξ- Werte	0,99	1,12	1,12	1,31	1,29	1,0	1,0

M_T z.B. $Q_z \cdot y$

Schubspannungsverlauf an Stelle A,

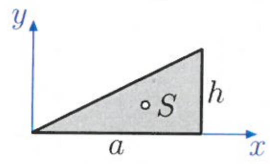
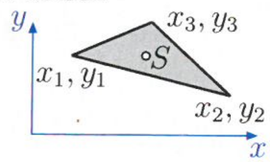
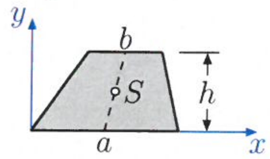
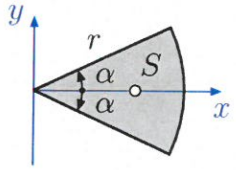
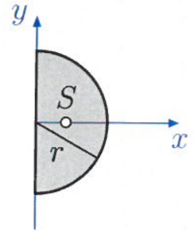
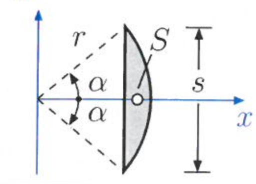


Institut für Statik und Dynamik
der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Tim Ricken

Technische Mechanik I

Flächenschwerpunkte

Fläche	Flächeninhalt	Schwerpunktslage
rechtwinkliges Dreieck  	$A = \frac{1}{2}ah$	$x_s = \frac{2}{3}a\,,\ y_s = \frac{h}{3}$
Dreieck  	$A = \frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]$	$x_s = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\,,$ $y_s = \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$
Trapez  	$A = \frac{h}{2}(a+b)$	S liegt auf der Seitenhalbierenden, $y_s = \frac{h}{3}\,\frac{a+2b}{a+b}$
Kreisausschnitt  	$A = \alpha\, r^2$	$x_s = \frac{2}{3}r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,,\ y_s = 0$
Halbkreis  	$A = \frac{\pi}{2}\,r^2$	$x_s = \frac{4\,r}{3\,\pi}, y_s = 0$
Kreisabschnitt  	$A = \frac{1}{2}r^2\,(2\alpha - \sin(2\alpha))$	$x_s = \frac{s^3}{12\,A} = \frac{4}{3}\,r\,\frac{\sin^3(\alpha)}{2\alpha-\sin(2\alpha)}\,,$ $y_s = 0$

TM2 Klausur 30.9.22 13:30 $\boxed{1}$

①

a) Schubmodul: Wiederstand gegen Linear-elastische Verformung infolge Querkraft.

E-Modul: Beschreibt Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung.

Querkontraktionszahl: Beschreibt Verhältnis der relativen Änderung der Dicke zur relativen Änderung der Dicke.

$\sigma = \varepsilon E$

$E = 2G(1+\nu)$ $\quad G \mathrel{\hat{=}}$ Schubmodul $\quad \nu \mathrel{\hat{=}}$ Querkontraktionszahl

b) Über E-Modul und ε Spannung σ ermitteln oder σ ist bereits gegeben.

$P_1(\sigma_x, \tau_{xy})$ und $P_2(\sigma_y, -\tau_{xy})$ in ein σ-τ-Diagramm einzeichnen und verbinden. Kreis um Schnittpkt. der Geraden P_1P_2 mit σ-Achse ist Mohrscher Spannungskreis.

c) Bei stat. überbestimmten Systemen.

$f = 3 \cdot 3 - (6+4) \neq 0$ -> Es können therm. Spannungen auftreten

d) 1. Senkrechtbleiben der QS: Balkenquerschnitte, die vor der Verbiegung senkrecht auf der Balkenachse standen, stehen auch nach der Verbiegung senkrecht auf der deformierten Balkenachse.

2. Ebenbleiben der QS: Die QS bleiben auch nach der Verbiegung eben und verwölben sich nicht.

e) - Das y-z-Achsensystem muss das Hauptachsensystems eines $\overset{\text{Balken}}{}$QS sein

- Kräftegleichgewicht wird nicht am deformierten Balken betrachtet.

②

I: $I_y = \frac{(20\sqrt{41})^3 \cdot 6}{12} \cdot \sin(38{,}7)^2 + 90^2 \cdot 20\sqrt{41} \cdot 6$

$I_z = \frac{(20\sqrt{41})^3 \cdot 6}{12} \cdot \cos(38{,}7)^2 + 50^2 \cdot 20\sqrt{41} \cdot 6$

$I_{yz} = 0 - (90) \cdot 50 \cdot 20\sqrt{41} \cdot 6$

II: $I_y = 0 + 130^2 \cdot 100 \cdot 3$

$I_z = \frac{3 \cdot 100^3}{12} + 50^2 \cdot 100 \cdot 3$

$I_{yz} = 0 - (-130)(-50) \cdot 100 \cdot 3$

III: $I_y = \frac{3 \cdot 60^3}{12} + 100^2 \cdot 60 \cdot 3$

$I_z = 0 + 100^2 \cdot 60 \cdot 3$

$I_{yz} = 0 - (-100)(-100) \cdot 60 \cdot 3$

IV: $I_y = \frac{6 \cdot 260^3}{12} + 0$

$I_z = 0 + 0$

$I_{yz} = 0$

$I_{y,ges} = 2 \cdot I_{y,1} + 2 \cdot I_{y,2} + 2 \cdot I_{y,3} + I_{y,4}$

$= 3{,}590 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$

$I_{z,ges}$ und $I_{yz,ges}$ analog

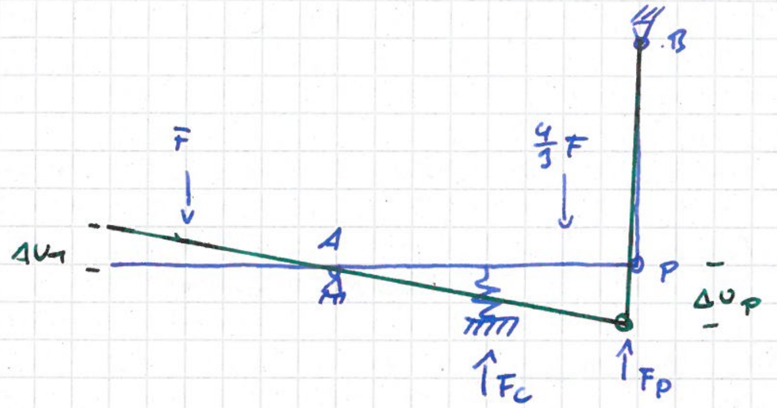
$I_{z,ges} = 1{,}072 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$

$I_{yz,ges} = -584626 \text{ mm}^4$

TM 2 Klausur 30.9.22

④

a)



$F_c = c_F \cdot \Delta u_c = \frac{EA}{6l} \cdot \varphi \cdot 2l$

$\Delta u_1 = \varphi \cdot 3l \qquad \Delta u_P = \varphi \cdot 4l$

$\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad : \quad F \cdot 2l + F_c \cdot 2l + F_P \cdot 4l - \frac{4}{3} F \cdot 3l = 0 \qquad (I)$

$\Delta u_P = \frac{N}{EA} 3l + \alpha_T \Delta T l$ N hier F_P

$F_P = \frac{EA\, \Delta u_P}{3l} = \frac{1}{3l}(EA \cdot \varphi \cdot 4l)$

Alles in (I) einsetzen:

$0 = F \cdot 2l + c_F \cdot \varphi \cdot 2l \cdot 2l + \frac{1}{3l}(EA \cdot \varphi \cdot 4l) \cdot 4l - \frac{4}{3} F \cdot 3l$

$\varphi = \cancel{\frac{2}{25}} \frac{1}{3} \frac{F}{AE}$

$\Delta u_P = \varphi \cdot 4l = \cancel{\frac{12}{25} \frac{Fl}{AE}} \frac{4}{3} \frac{Fl}{AE}$

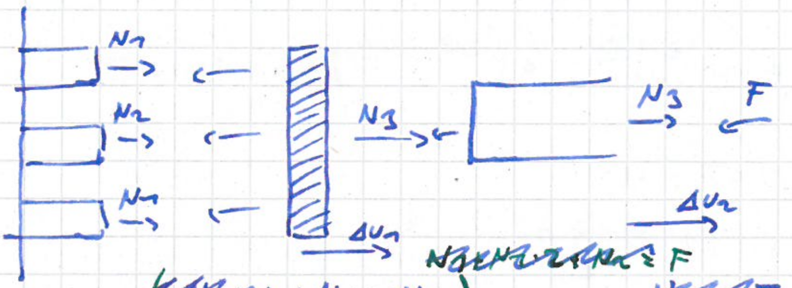
b)

F_P ist jetzt $F_P = \frac{AE\, \Delta u_P}{3l} - AE \alpha_T \Delta T \quad ; \alpha_T > 0$

Bei $\Delta T > 0$: Geringere Ausdehnung

$\Delta T < 0$: Größtere Ausdehnung

⑤



~~$N_3 + N_2 + N_1 = F$~~

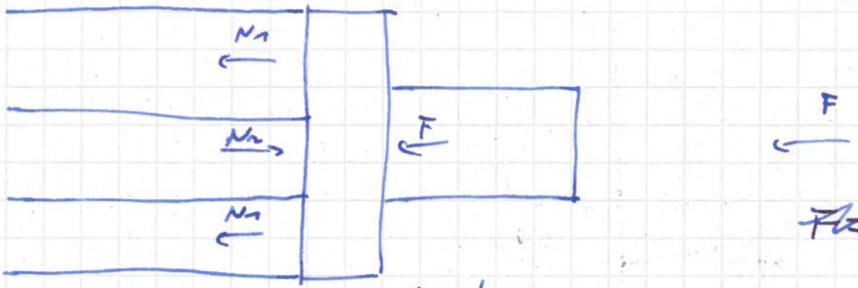
~~$N_3 = F$~~ ~~$\Delta u_2 = \Delta u_1 = 0$~~

(~~$N_1 + N_2 + N_1 = N_3$~~
~~$N_1 + N_2 + N_1 = F$~~)

~~$\varepsilon_1 = \frac{\Delta u_1}{l} = \frac{N_1}{EA_1}$ [illegible] $N_1 = \frac{EA_1 \cdot \Delta u_1}{l}$~~

~~$\varepsilon_2 = \frac{\Delta u_1}{l} = \frac{N_2}{EA_2}$ [illegible] $N_2 = \frac{EA_2 \cdot \Delta u_1}{l} - EA_2 \alpha_T \Delta T$~~

~~$\Delta u_2 = \frac{F}{EA} 2l$ [illegible] $F = \frac{EA\, \Delta u_2}{2l}$~~



↳ ΔU_A ↳ ΔU_B

Schnitt durch drei Stäbe: $F = -2 \cdot N_1 + N_2$

$$F = -2 \cdot \frac{EA\Delta U}{L} + \left(\frac{2EA\Delta U}{L} - 2EA\alpha_T\Delta T\right) \quad (I)$$

Schnitt durch dicken Balken: $F = N_3$

$$F = \frac{4EA\Delta U_2}{2L}$$

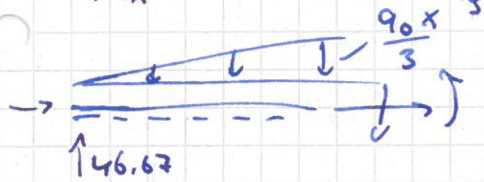
$$\rightarrow \Delta U_2 = \frac{F \cdot L}{2AE} = -\Delta U_1 \quad (II)$$

(II) in (I)

$\Delta T = -\frac{F}{2AE\alpha_T}$ ↯ Nicht wie in Lösung ?!?!

TM2 Klausur 30.9.22

⑥ a)



$Q = 46{,}67 - \frac{90x}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{2}$

$Q(x) = 0 \rightarrow x = 2{,}64$

$M(x) = 46{,}67x - \frac{90x}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{3}x$

$\Rightarrow M(x=2{,}64) = 82{,}3 \text{ kNm}$

b) $\sigma_x = \overset{\neq 0}{\cancel{\frac{N}{A}}} + \frac{M_y}{I_y} z - \overset{= 0}{\cancel{\frac{M_z}{I_z}}} y$

$I_y = \frac{l_2^4}{12} - \frac{l_1^4}{12} = 4218{,}75 - 0{,}08333 l^4 \quad \text{cm}^4$

$M_y = 82{,}3 \text{ kNm} = 8230 \text{ kNcm}$

$\sigma_x = 220 \frac{N}{mm^2} =$

$z = \pm \frac{l_2}{2}$

$N = 8{,}1 \text{ kN}$

$A = l_2^2 - l_1^2$

$\sigma_x = 220 = \frac{8{,}1 \cdot 1000}{190^2 - l^2} - \frac{82{,}3 \cdot 1000 \cdot 1000}{\frac{150^4}{12} - \frac{l^4}{12}} \cdot (-75)$

$\rightarrow l \geq 173{,}9 \text{ mm}$

⑦

a) 4 Teilsysteme mit je 4 RB, weil stat. unbestimmt. → 16 RB.

b)

1. $w_1(0) = 0$
2. $w_1''(0) = \cancel{0}\ \frac{M}{EI}$
3. $w_2(0) = 0$
4. $w_4(0) = 0$
5. $w_1(2l) = w_2(l) = 0$
6. $w_1(2l) = u_3(l)$
7. $w_1'(2l) = w_3'(l)$
8. $-w_2''(l) = 0$
9. $w_4(l) = w_3(0)$
10. $w_4'(l) = w_3'(0)$
11. $w_4''(l) = w_3''(0)$
12. $w_3''(l) = w_1''(2l)$
13. $\pm C_M \cdot w_4'(0) = EI\, w_4''(0)$
14. $w_3(l) = u_2(l)$
15. $u_2(l) = F \cdot C_{M,1}$
16. $w_2'(0) = 0$

Querkräfte können auch noch genutzt werden!

⑨ ~~[illegible]~~

~~gesucht~~

~~⑩~~ ⑨

a) $\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$

$N = -20\ kN$

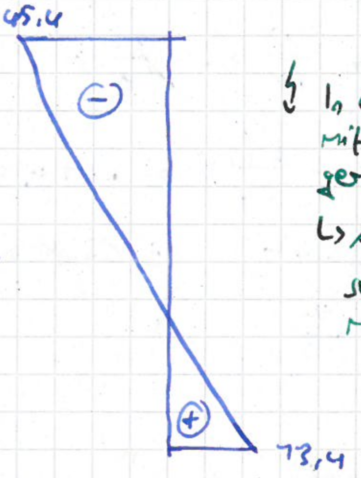
$M_y = 20\ kN \cdot 50{,}48\ mm$

$M_z = 0$

$A = 20 \cdot 60 + 20 \cdot 20 + 40 \cdot 20 = 2400\ mm^2$

$I_y = 137{,}27 \cdot 10^4\ mm^4$

$\sigma_x(z) = -8{,}333 + 0{,}735\ z$



↯ In Lösung wurde mit A = 2800 gerechnet

↳ Ah, ne, ist so doch auch richtig

b) Neutrale Faser muss außerhalb des QS liegen.

~~13,4~~

~~[illegible] 8,333 + 0,735 z~~

~~[illegible] 29,6 mm~~

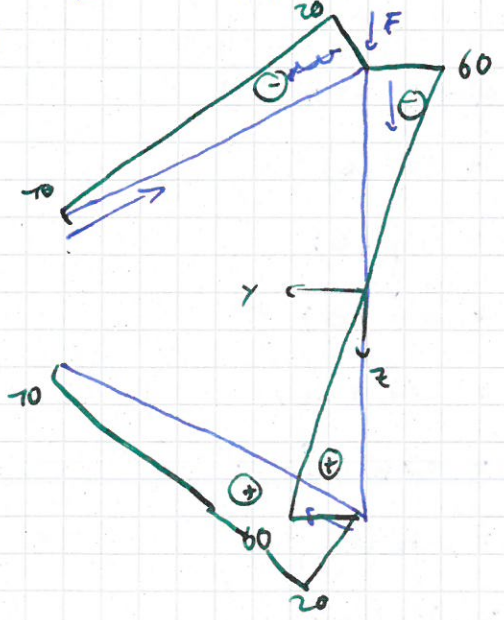
$M_y = 20\ kN \cdot z_F$

$\sigma_x(z) = -8{,}333 + \frac{20000\ z_F}{137{,}27 \cdot 10^4} \cdot z$

$0 = -8{,}333 + \frac{20000}{137{,}27 \cdot 10^4} z_F \cdot 29{,}52$

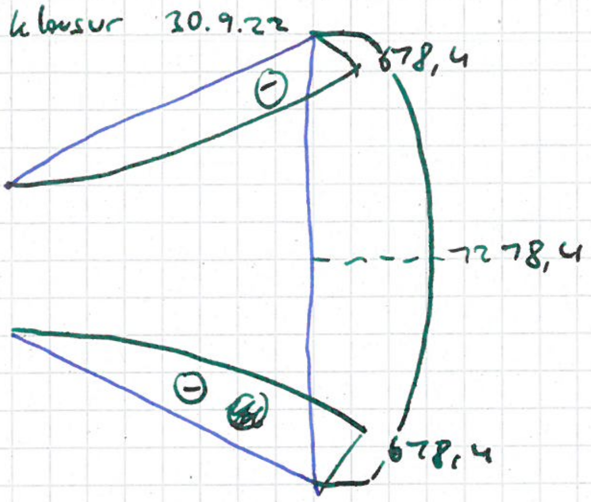
$z_F = 19{,}4\ mm$

⑩

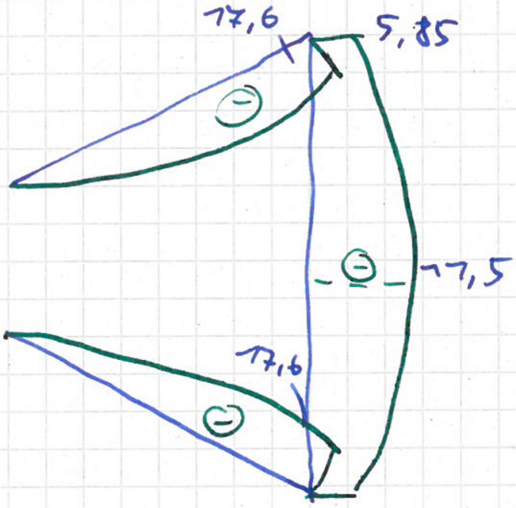


z-h-Linie

TM2 Klausur 30.9.22



S_y



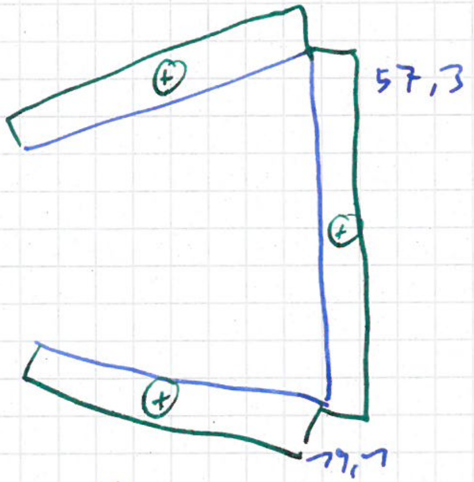
$$\tau(s) = -\frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot h(s)}$$

$$= -0{,}0284 \cdot \frac{S_y}{h(s)}$$

b) $I_T = \frac{1}{3} \cdot 1{,}1 \cdot \left(1^3 \cdot 47{,}2 + 1^3 \cdot 47{,}2 + 3^3 \cdot 40\right) = 426{,}2$

~~Hebelarm~~ $S_x = 8{,}14$; $M_T = F \cdot 8{,}14$

$\tau_M = \frac{M_T}{I_T} t_i$ 19,1



c) $\varphi = \int_l \vartheta(x)\,dx$ $\qquad \vartheta(x) = \frac{M_T}{GI_T} = 0{,}000236 \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$

$\varphi = \int_0^l \vartheta(x)\,dx = 2{,}36 \cdot 10^{-4}\, l\, [\text{rad}]$

d) Im Schubmittelpunkt.

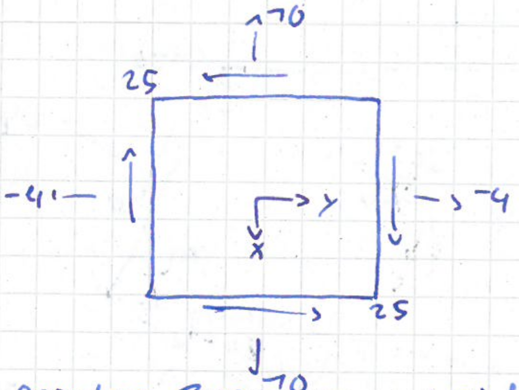
TM2 Klausur 6.4.22

①

a) $\sigma_x = 10\ \frac{kN}{m^2}$

$\sigma_y = -4\ \frac{kN}{m^2}$

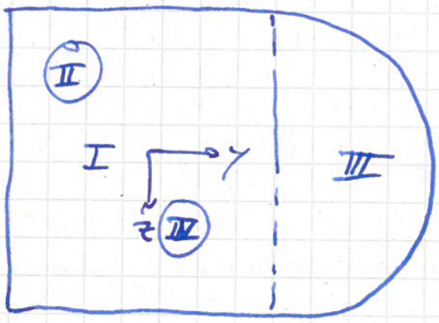
$\tau_{xy} = \overset{25}{\cancel{50}}\ \frac{kN}{m^2}$



b)
- Prismatischer Stab mit gerader Biegeachse und einfach symmetr. QS
- Dünner Stab
- kleine Verschiebung

c) Tonti-Diagramm veranschaulicht und klassifiziert Variablen und die Feldgleichunge in der Mechanik und stellt diese in Beziehung zueinander.

②



I: $I_{y,1} = \frac{8l\cdot(12l)^3}{12} + 0 = 1152\, l^4\, cm^4$

$I_{z,1} = \frac{12l\cdot(8l)^3}{12} + (2,41l)^2\cdot 8l\cdot 12l = 1069,6\, l^4\, cm^4$

$I_{yz1} = 0 = 0\, cm^4$

II $I_{y,2} = \frac{\pi\cdot(2l)^4}{4} + (2l)^2\cdot\pi\cdot(2l)^2 = 20\, l^4\, cm^4\cdot\pi$

$I_{z,2} = \frac{\pi\cdot(2l)^4}{4} + (3,41l)^2\cdot\pi\cdot(2l)^2 = 158,7\, l^4\, cm^4$

$I_{yz2} = 0 \mp 2l\cdot 3,41l\cdot\pi\cdot(2l)^2 = -85,7\, l^4\, cm^4$

III $I_{y,3} = \frac{\pi\cdot(6l)^4}{8} + 0 = 162\, l^4\, cm^4\cdot\pi$

$I_{z,3} = \frac{(6l)^4}{72\pi}(9\pi^2-64) + (4,14l)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi(6l)^2 = 1111,5\, l^4\, cm^4$

$I_{yz,3} = 0 = 0\, cm^4$

IV $I_{y,4} = \frac{\pi\cdot(2l)^4}{4} + (2l)^2\cdot\pi\cdot(2l)^2 = 20\, l^4\, cm^4\cdot\pi$

$I_{z,4} = \frac{\pi\cdot(2l)^4}{4} + (3,59l)^2\cdot\pi\cdot(2l)^2 = 174,5\, l^4\, cm^4$

$I_{yz,4} = 0 \mp 2l\cdot 3,59l\cdot\pi\cdot(2l)^2 = -90,2\, l^4\, cm^4$

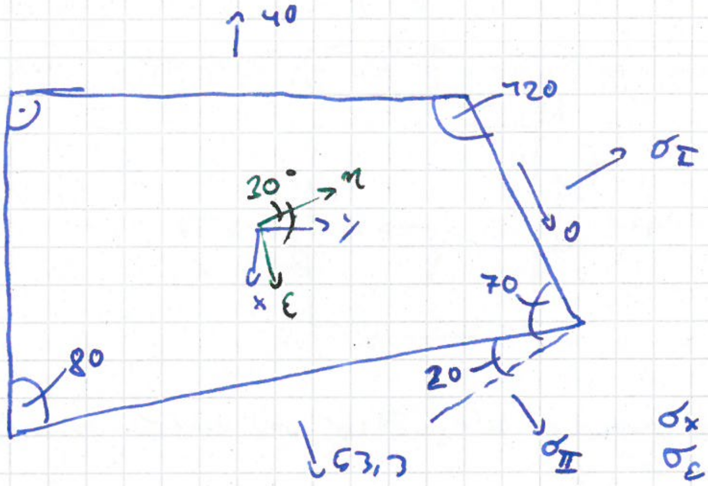
$I_{y,ges} = 1535,27\, l^4\, cm^4$

$I_{z,ges} = 1848\, l^4\, cm^4$

$I_{yz,ges} = -175,9\, l^4\, cm^4$

③

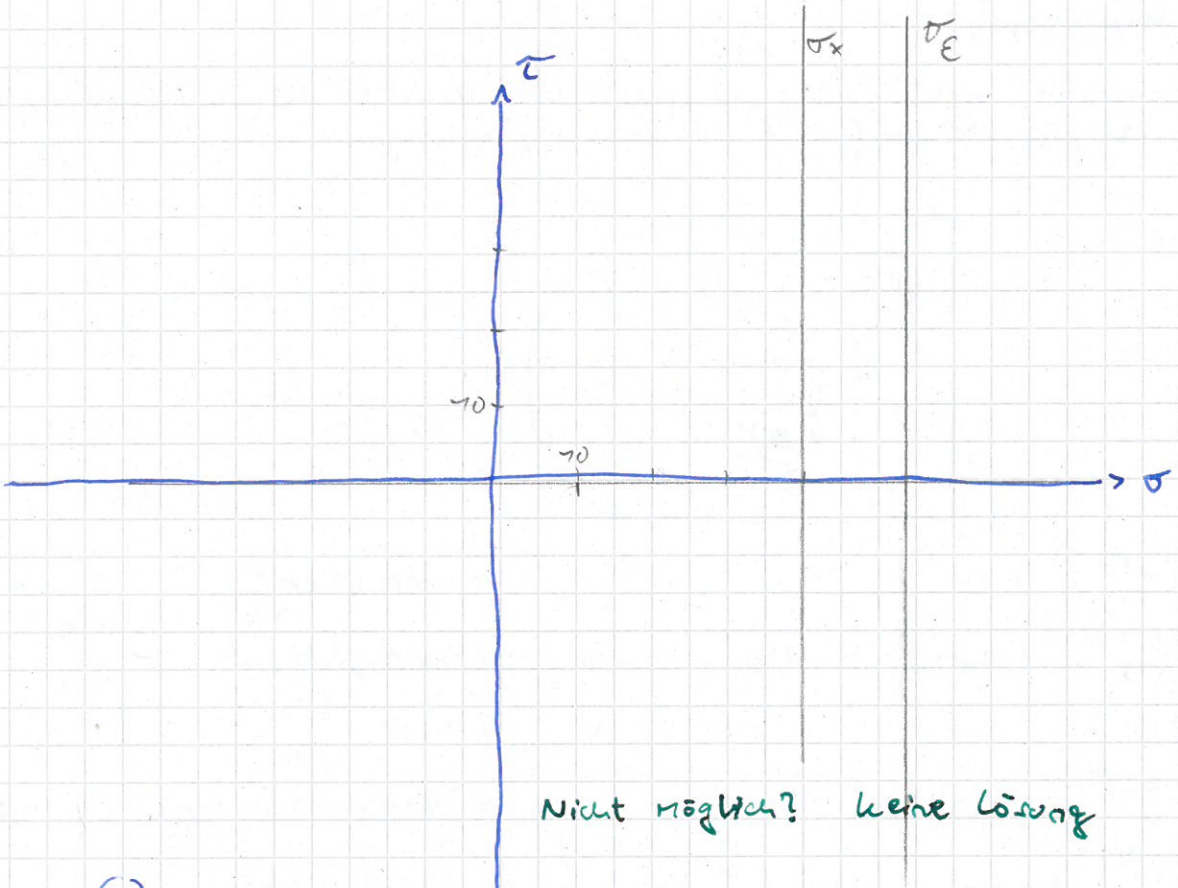
√2/



$\sigma_x = 40$

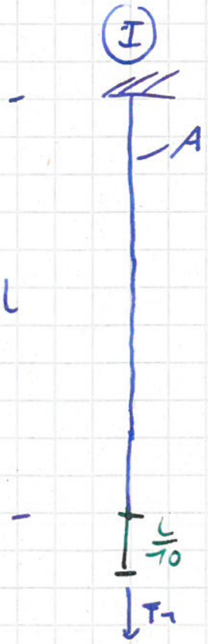
$\sigma_\xi = 53,3$

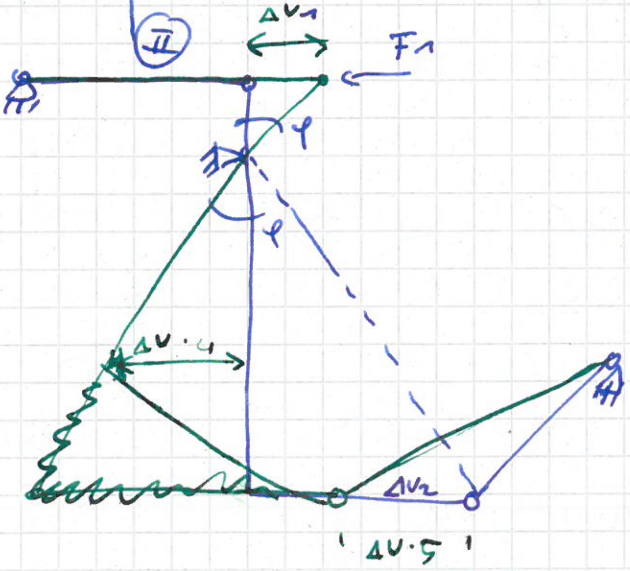
a



Nicht möglich? keine Lösung

④





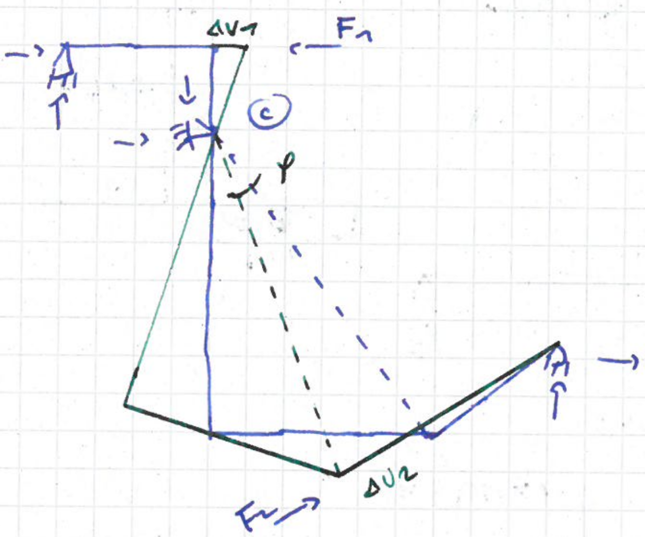
$\Delta v \cdot 5 = \varepsilon \cdot 2l$

Zeichnung auf nächster Seite nochmal ordentlicher

Ⓘ $F_1 = \frac{E_0 A}{4}$

$\Delta v = \frac{l}{10} = \frac{F_1}{E_u A} \cdot l \rightarrow E_u = \frac{5E_0}{2}$

TM2 klausur 6.4.22



$$\overset{V_1}{\cancel{F_1}} = \varphi \cdot l \qquad \overset{V_2}{\cancel{F_1}} = \varphi \cdot 5l = \varepsilon \cdot l \cdot 2 \rightarrow \varphi = 0{,}02$$

$$\curvearrowleft \sum M_c = 0 : F_1 \cdot l + F_2 \cdot 5l = 0$$

$$F_1 = -\cancel{3} F_2 \cdot 5 \qquad I$$

$$\Delta U_1 = \frac{F_1}{E_\omega A} l \cdot 2 + \alpha_T \Delta T \cdot 2l = \varphi \cdot l$$

$$\Delta U_2 = \frac{F_2}{E_0 A} \cdot 2l + 0 = \varphi \cdot 5l$$

$$F_1 = \frac{A \cdot \Delta U_1 E_\omega}{2l} - A E_\omega \alpha_T \Delta T \qquad II$$

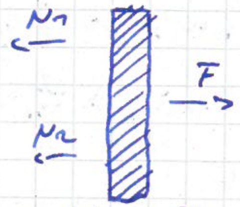
$$F_2 = \frac{A E \Delta U_2}{2l} \qquad III$$

II und III in I, ΔU_1 und ΔU_2 mit φ darstellen

$$\varphi = \frac{2 \alpha_T \Delta T E_\omega}{E_\omega + 25 E_0} = 0{,}02 \quad ; \quad E_\omega = \frac{5}{2} E_0 \text{ aus vorheriger Aufgabe}$$

$$0{,}02 = \frac{2 \alpha_T \Delta T \frac{5}{2} E_0}{\frac{5}{2} E_0 + 25 E_0} \longrightarrow \alpha_T = \frac{0{,}11}{\Delta T}$$

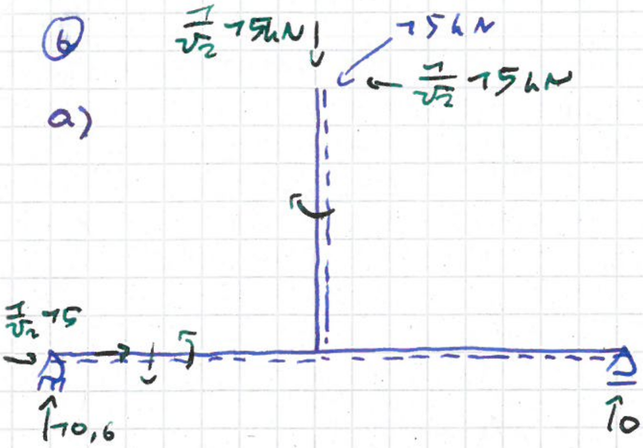
⑤ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad ; \quad \sigma_1 > \sigma_2 \quad ; \quad N_1 > N_2$

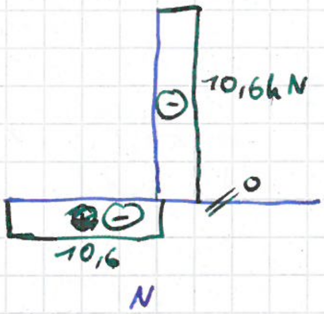


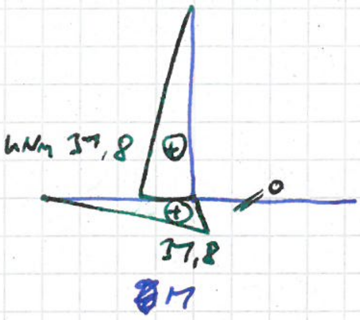
$N_2 + N_1 = F$

⑥

a)







b) Moment Maßgebend:

$M_y = 31{,}8\,kNm \quad , N = -10{,}6\,kN$

$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z$ $\quad$ z hier $\frac{h}{2} = -0{,}025\,m$

$A = 0{,}05 \cdot b$

$I_y = \frac{b \cdot 0{,}05^3}{12}$ $\quad [1 \frac{N}{mm^2} \hat{=} 1 \frac{kN}{m^2}]$

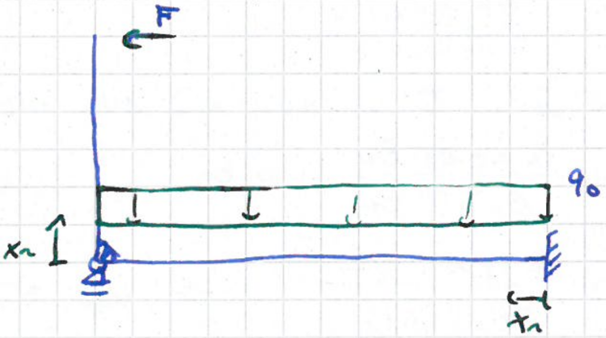
$\sigma_x \overset{!}{\leq} 235 \frac{N}{mm^2}$

$235 = -\frac{10{,}6}{0{,}05\, b} + \frac{31{,}8}{I_y} \cdot -0{,}025$ $\quad$ Auflösen nach b

$b = 325{,}7\,mm$

b muss mind. 0,326 m lang sein.

⑦



System nicht stat. bestimmt

$EI\,w^{(4)}(x_1) = q_0$

$EI\,w'''(x_1) = q_0 x + C_1$

$EI\,w''(x_1) = \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$

$EI\,w'(x_1) = \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

$EI\,w(x_1) = \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$

$EI\,w^{(4)}(x_2) = 0$

$EI\,w'''(x_2) = C_5$

$EI\,w''(x_2) = C_5 x + C_6$

$EI\,w'(x_2) = \frac{1}{2} C_5 x^2 + C_6 x + C_7$

$EI\,w(x_2) = \frac{1}{6} C_5 x^3 + \frac{1}{2} C_6 x^2 + C_7 x + C_8$

TM2 Klausur 6.4.22

Randbedingungen:

$w_1(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$

$w_1'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$w_1(6L) = 0 \rightarrow \frac{1}{24} q_0 \cdot (6L)^4 + \frac{1}{6} C_1 \cdot (6L)^3 + \frac{1}{2} C_2 (6L)^2 = 0$ I

$-w_1''(6L) = \cancel{x} -w_2''(0) \rightarrow 2qL^2 = \frac{1}{2} q_0 (6L)^2 + C_1 6L + C_2$ II

$w_1(6L) = w_2(0) \rightarrow 0 = C_8$

$w_1'(6L) = w_2'(0) \rightarrow \frac{1}{6} q_0 (6L)^3 + \frac{1}{2} C_1 (6L)^2 + C_2 (6L) = C_7 \rightarrow C_7 = -7{,}5\, L^3 q_0$

$-w_2'''(2L) = F \rightarrow C_5 = -F$

$-w_2''(2L) = 0 \rightarrow C_5 \cdot 2L + C_6 = 0 \rightarrow C_6 = 2F\cancel{\,}L$

~~I und II nach C1 und C2 auflösen~~
I und II nach C_1 und C_2 auflösen

$C_1 = -3{,}25\, L q_0 \qquad C_2 = 3{,}5\, L^2 \cdot q_0$

$w_1(x_1) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24} q_0 x^4 \cancel{+} - \frac{3{,}25}{6} L q_0 x^3 + \frac{3{,}5}{2} L^2 q_0 x^2\right)$

$w_2(x_2) = \frac{1}{EI}\left(+ \frac{\overset{q_0 \cdot L}{\cancel{3{,}25}}}{6} L^3 q_0 x^3 + \cancel{q}\, q_0 L^2 x^2 \cancel{3} - 7{,}5\, L^3 q_0 x\right)$

$= \frac{1}{EI}\left(\cancel{[illegible]} + q_0 L^2 x^2 - 7{,}5\, q_0 L^8 x\right)$

$-\frac{1}{6} q_0 L\, x^3$

⑧

a) $N = -F_x = -40\ kN$

$M_y = -\frac{q_0}{2} \cdot x^2 ,\ x = \frac{L}{2} \Rightarrow M_y = -500\ kNcm$

$M_z = F_y \cdot \frac{L}{2} = 30\ kNcm$

b) $\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$

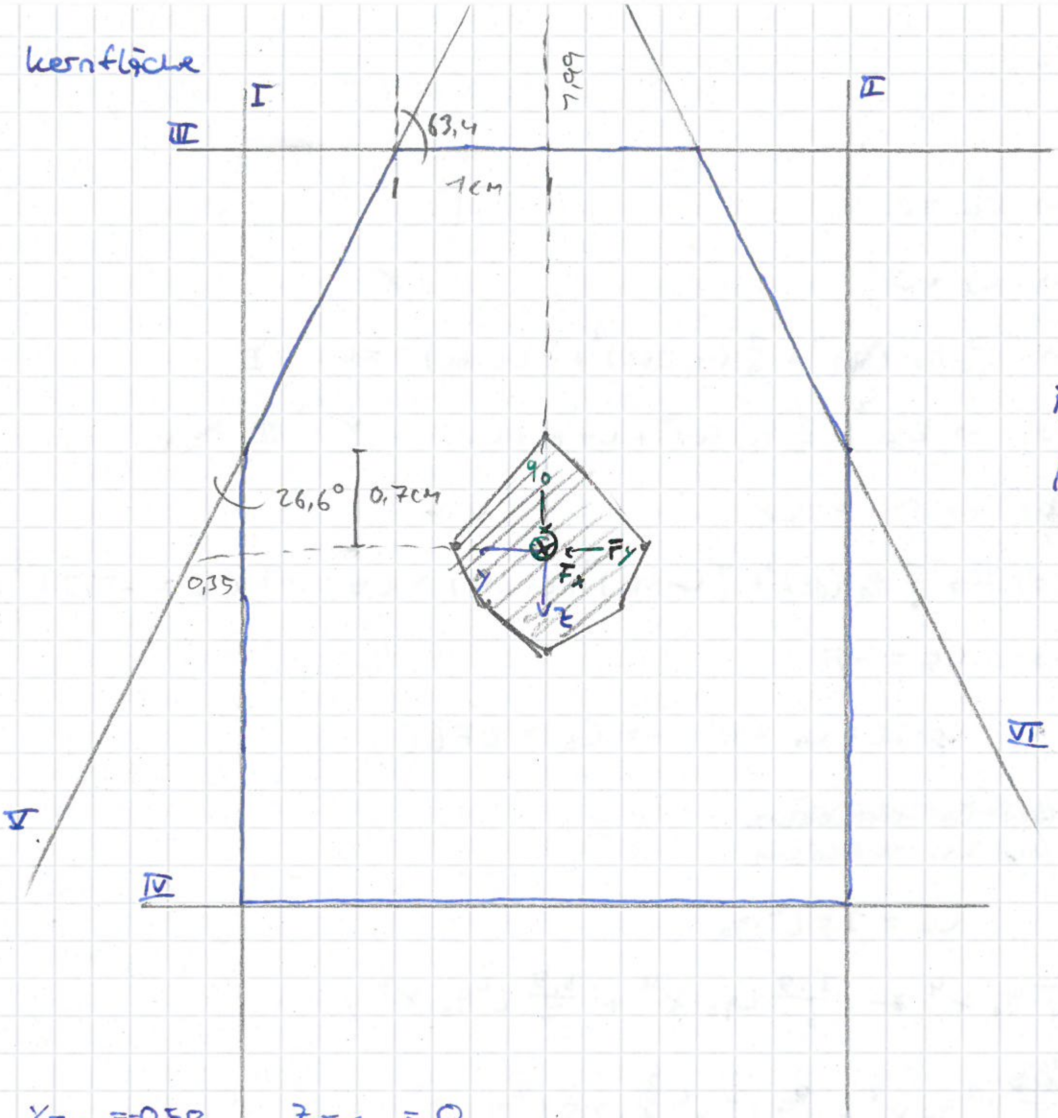
$\sigma_x = -7{,}43\, y - 14{,}79\, z - 2{,}22$

~~σ_{x}~~

c) Max bei ~~[illegible]~~ $(y,z) = (-2, -2{,}7)$ Min bei $(y,z) = (2, 2{,}3)$

$\sigma_x(-2,-2{,}7) = 40{,}57\ \frac{kN}{cm^2}$ $\sigma_x(2, 2{,}3) = -39{,}097\ \frac{kN}{cm^2}$

d) Kernfläche



$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = 1,878\ cm^2$

$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = 1,167\ cm^2$

I: $y_{F,1} = -0,58$ $z_{F,1} = 0$

II: $y_{F,2} = 0,58$ $z_{F,2} = 0$

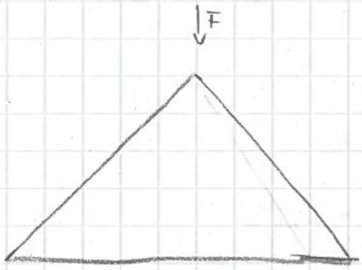
III: $y_{F,3} = 0$ $z_{F,3} = 0,69$

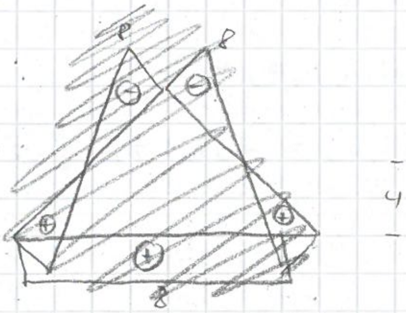
IV: $y_{F,4} = 0$ $z_{F,4} = -0,82$

V: $y_{F,5} = -0,49$ $z_{F,5} = 0,40$

VI: $y_{F,6} = -0,49$ $z_{F,6} = -0,40$

⑨





Zunächst Schwerpunkt bestimmen

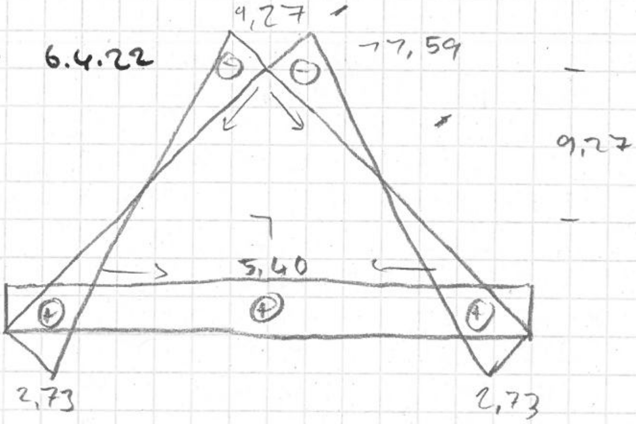
$S_y = 0$ (Symmetrie)

$S_z = \sum_i \frac{A_i z_i}{A_i}$

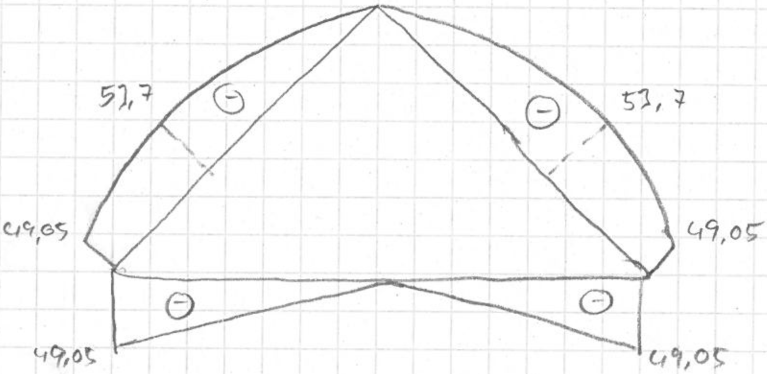
$= 9,27\ cm$

TM2 Klausur 6.4.22

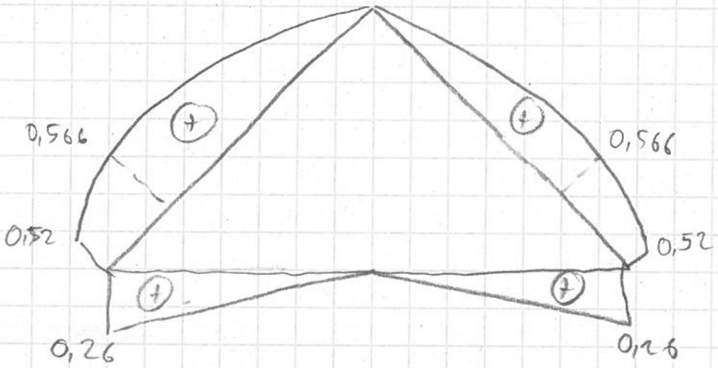
a)



Z-h-Linie $[cm^2]$

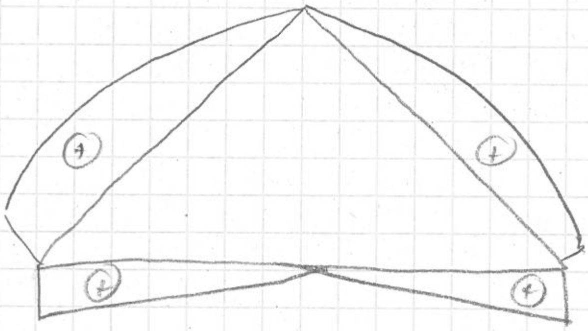


Stat. Moment $[cm^3]$



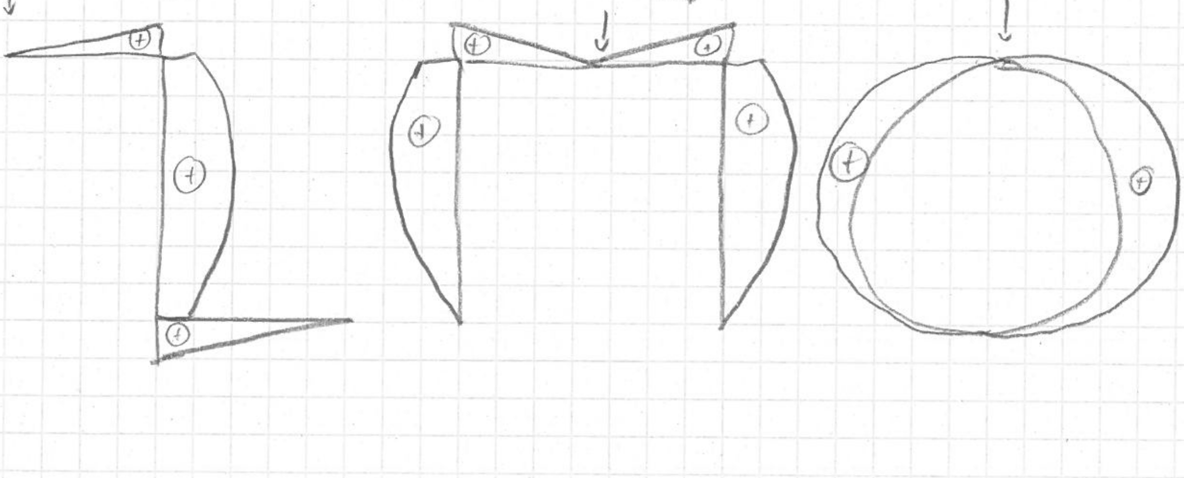
Schubspannung $\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$

b)

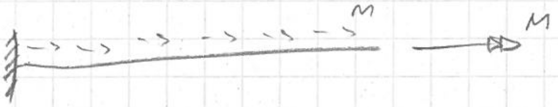


Verlauf bleibt unverändert

c)



⑩



a) $M_T = M + (m\cdot l - m x) = M + m(l-x)$

b) $\tau(x) = \frac{M_T}{2A_m t(x)} = \frac{M+m(l-x)}{2\cdot(\pi\cdot r^2)\, t(x)}$; $\tau(x) = konst.$

$t(x) = \frac{m(l-x)+M}{2\pi r^2 \cdot \tau_0}$

c) $I_T = \frac{4A_m^2 t}{U} = \frac{4(\pi\cdot r^2)^2 \cdot t(x)}{2r\cdot\pi} = \frac{(m(l-x)+M)\cdot r}{\tau_0}$

TM 2 Klausur 1.10.21 $\boxed{1}$

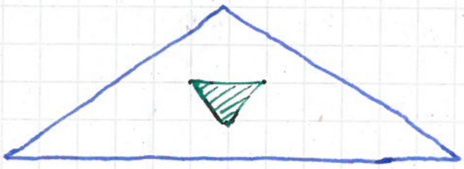
①

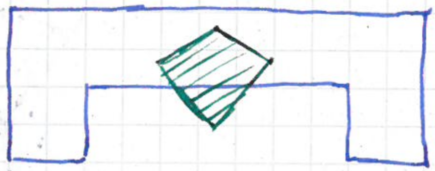
a) Normalspannungshypothese: Größte Hauptnormalspannung maßgebend für Materialbeanspruchung

b) Schubspannungshypothese (Tresca): Größte Schubspannung ist maßgebend.

c) Hypothese der Gestaltänderungsenergie: Maximaler Energieanteil ist maßgebend, der zur Änderung der Gestalt bei gleichbleibenden Volumen benötigt wird.

d)





e) Allgemeiner Verzerrungszustand: Homogener, isotroper und linear-elastischer Festkörper wird für Herleitung angenommen.

f) Flächenmoment 2. Ordnung: FTM ist geometrisches Maß für Steifigkeit eines Querschnittes

g) "Einfache Biegung" Voraussetzungen: Prismatischer Stab mit gerader Balkenachse und einfach symmetr. Querschnitt, dünner Stab, QS des Balkens bleibt formtreu, sehr kleine Verschiebung.

h) Wahre Spannung bezieht sich auf die Aktuelle Fläche, bei der Ingenieursspannung wird die Referenzfläche betrachtet.

②

a) Vollquerschnitt

I: $I_{y,1} = \frac{\pi R^4}{8} + 0$

II: $I_{y,2} = \frac{20 \cdot 5^3}{12} + 0$

$I_{y,ges} = 2 \cdot I_{y,1} + I_{y,2} = 2094,1 \, cm^4$ ↯ Inlösung $\frac{1}{12}$ vergessen? $\rightarrow I_y = 1985,7 cm^4$

Dünnwandiger Querschnitt, $S_y = 0$, $S_z = 3,87 \, cm$

I: $I_{y,1} = 0 + (-3,87)^2 \cdot 1 \cdot 40$

II: $I_{y,2} = \frac{(10\sqrt{2})^3 \cdot 1}{12} \sin(45)^2 + 1,13^2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 1$

III: $I_{y,3} = 0 + (6,13)^2 \cdot 1 \cdot 20$

$I_{y,ges} = I_{y,1} + 2 \cdot I_{y,2} + I_{y,3} = 1622,4 \, cm^4$

1): steifer, aber mehr Material nötig, 2) geringere Steifigkeit, aber sehr viel weniger Materia

$\boxed{2}$

b) I: $I_{z,1} = \frac{1\cdot 40^3}{12} + 0$ $I_{yz,1} = 0$

II: $I_{z,2} = \frac{(10\sqrt{2})^3\cdot 1}{12}\cdot\cos(45) + 20^2\cdot 1\cdot 10\sqrt{2}$ $I_{yz,2} = 0 - 20\cdot 1{,}13\cdot 10\sqrt{2}\cdot 1$

III: $I_{z,3} = \frac{1\cdot 20^3}{12} + 0$ $I_{y,z,3} = 0$

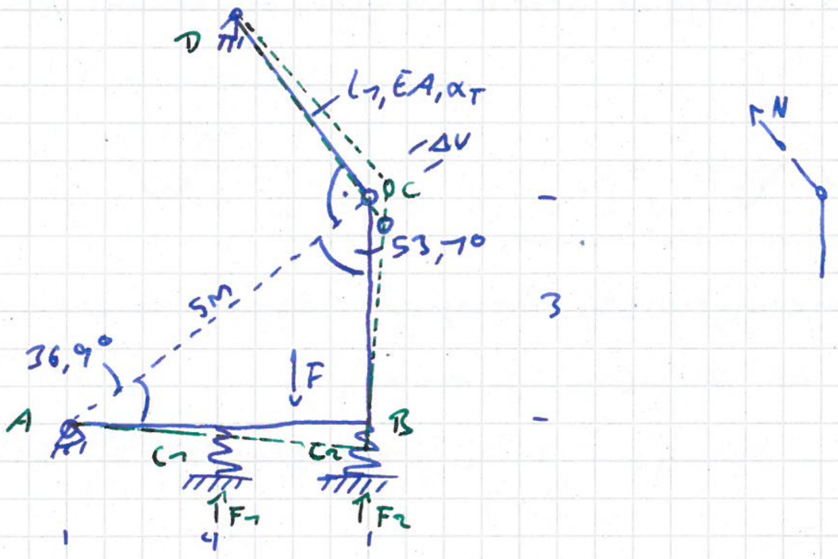
$I_{yz,ges} = I_{z,1} + 2 I_{z,2} + I_{z,3}$

$I_{z,ges} = 17549\ cm^4$ ↯ Fehler in Lösung bei "$10^3\cdot\sqrt{2}$" -> eigentlich "$(10\sqrt{2})^3$"

Sind bereits Hauptträgheitsachsen

③

a)



$F_1 = c_1\cdot s_1$ $F_2 = c_2\cdot s_2$ $s_2 = 2\cdot s_1$

$s_1 = \varphi\cdot 2m$ ↯

$s_2 = \varphi\cdot 4m$

$\Delta u = \varphi\cdot 5m$

$\curvearrowleft \sum M_A = 0$: $F_1\cdot 2 - F\cdot 3 + F_2\cdot 4 + N\cdot 5 = 0$

$\Delta u = \frac{N}{EA} l_1 + \Delta T \alpha_T l_1 \rightarrow N = \frac{EA\cdot\Delta u}{l}$

$(c_1\cdot\varphi\cdot 2m)\cdot 2 - (c_1\cdot l)\cdot 3 + (\frac{c_1}{2}\cdot\varphi\cdot 4m)\cdot 4 + (\frac{EA\cdot(\varphi\cdot 5m)}{l})\cdot 5 = 0$; $EA = c$

$\varphi = \frac{3l^2}{12l+25}$ ↯ Identischer Ansatz wie in Lösung -> dennoch anderes Ergebnis.

$\Delta u = \varphi\cdot 5m = \frac{15 l^2}{12l+25}$

b) $F = -Cl$, $\Delta u = 0$

$N = \frac{A\cdot E\cdot\Delta u}{l_1} - A\cdot E\cdot\alpha_T\Delta T$ Einsetzen in GGB, nach ΔT auflösen

~~[illegible]~~

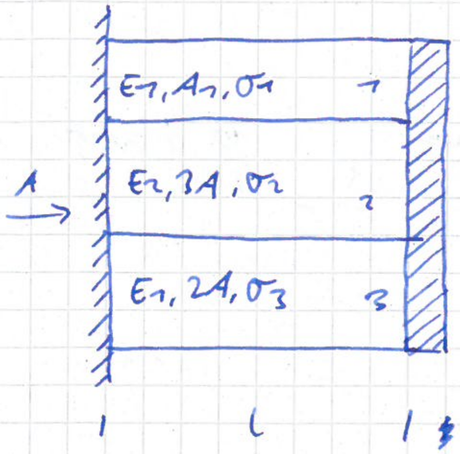
$\Delta u = \frac{N}{EA} l_1 + \alpha_T \Delta T l_1 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \frac{15 l^2}{12l+25} + \alpha_T\Delta T l_1 = 0 \rightarrow \Delta T = \frac{l_1}{12l+25}$

TM 2 Klausur 1.10.21 $\boxed{31}$

④

a)



E_1 , $E_2 = \frac{3}{2} E_1$, A, l, N

Alle Δu gleich, alle l gleich

$-A = N_1 + N_1 + N_3$ $\qquad$ $N = N_1 + N_2 + N_3$ $\quad$ I

$\varepsilon_1 = \frac{\Delta u}{l} = \frac{N l}{EA l} \longrightarrow N_1 = \frac{\Delta u}{l} EA_1 = \frac{\Delta u}{l} EA$ $\quad$ II

$\varepsilon_2 = \frac{\Delta u}{l} = \frac{N}{EA} \longrightarrow N_2 = \frac{\Delta u}{l} EA_2 = \frac{\Delta u}{l} \frac{9}{2} EA$ $\quad$ III

$\varepsilon_3 = \frac{\Delta u}{l} = \frac{N}{EA} \longrightarrow N_3 = \frac{\Delta u}{l} EA_3 = \frac{\Delta u}{l} 2EA$ $\quad$ IV

II, III, IV in I einsetzen... $\sigma = E\varepsilon$

$\Delta u = \frac{2}{15} \frac{lN}{AE}$

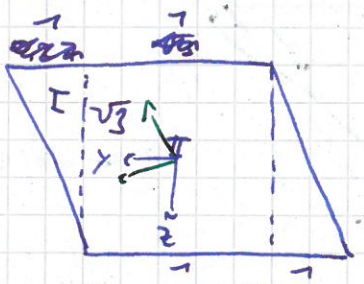
$N_1 = \frac{2N}{15} \rightarrow \sigma_1 = \frac{2}{15} \frac{N}{A}$

$N_2 = \frac{3N}{5} \rightarrow \sigma_2 = \frac{3}{5} \frac{N}{A}$

$N_3 = \frac{4N}{15} \rightarrow \sigma_3 = \frac{4}{15} \frac{N}{A}$

⑤

a)



I: $I_{y,1} = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{36} (\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}$

$I_{z,1} = \frac{\sqrt{3} \cdot 1^3}{36} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}$ $\qquad$ $I_{y,z} = \frac{\sqrt{3}^2 \cdot 1^2}{72} + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 0{,}5 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}$

$= -0{,}2977 \text{ cm}^4$

II $I_{y,2} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3})^3}{12} + 0$

$I_{z,2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 1^3}{12} + 0$

$I_{y,ges} = 2 \cdot I_{y,1} + I_{y,2} = 0{,}8660 \text{ cm}^4$ $\qquad$ $I_1 = 3{,}353 \text{ cm}^4$

$I_{z,ges} = 3{,}379 \text{ cm}^4$ $\qquad$ $I_2 = 0{,}8378 \text{ cm}^4$ $\quad$ ↯

Fehler in meiner Rechnung

b) Weiterrechnen mit Werten aus Lösung : $I_y' = \sqrt{3}\ cm^4$

$I_z' = \frac{\sqrt{3}}{3}\ cm^4$

$M_y = \frac{q_0}{2} \cdot l^2 = \frac{8 \cdot 10^{-5}}{2} \cdot 2-\sqrt{3} \cdot \frac{1}{200\ cm} = \overset{0,0139}{\cancel{0,0\ldots}}\ kNcm$ $\quad l := \frac{l}{2}$ hier

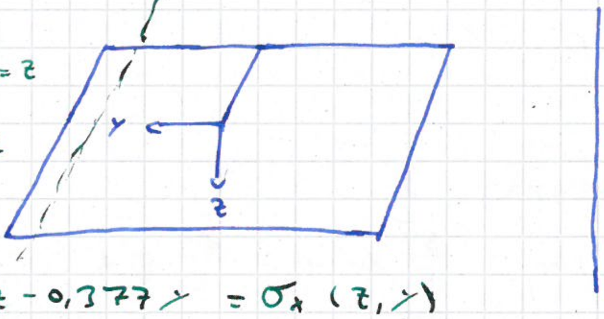
$M_z = F_y \cdot l = 0,9238\ kNcm$

$N = F_x = 2\ kN$

$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$

$= 0,5774 + 0,008025 z - 1,600 y$ ↯

c)



↯ startet bei: 11 = z

→ richtige Formel

lautet:

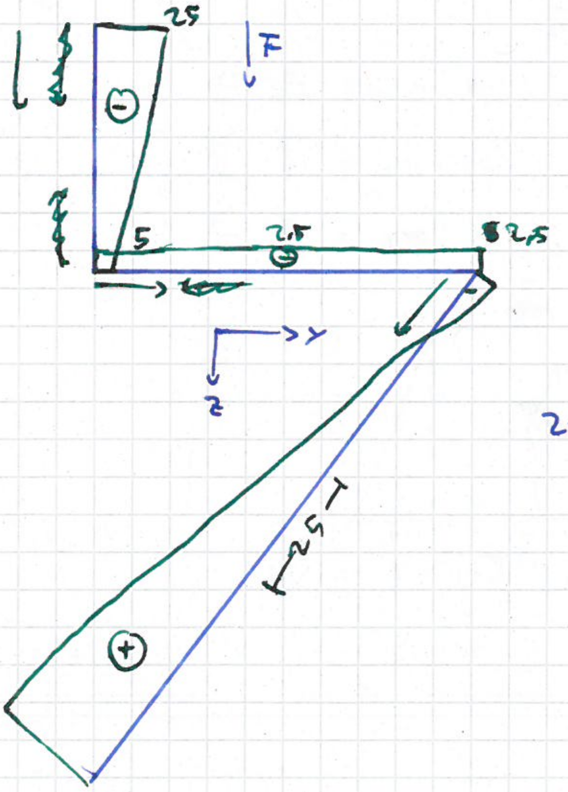
$+0,5774 - 0,089 z - 0,377 y = \sigma_x (z, y)$

$z = -4,24 \cdot (y - 1,52)$

d) $(y, z) = (2, \overset{\sqrt{3}}{1,73})$ → $\sigma_x = -1,478$ $\quad \sigma_x = 0,338$

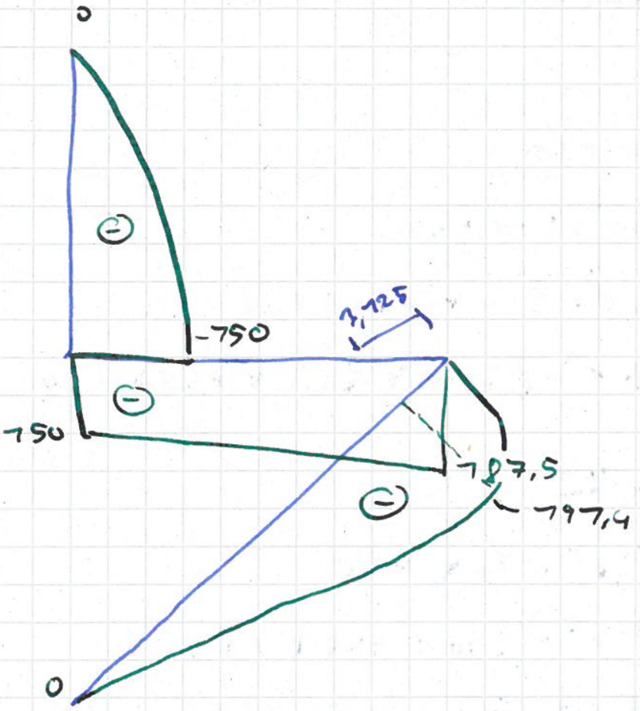
(Punkt ganz am Rand des Querschnittes wählen)

⑥
a)

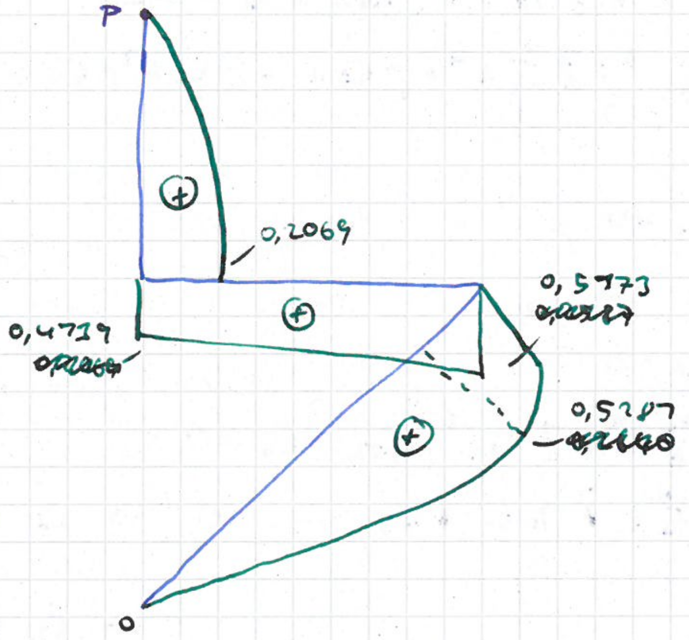


2-4-Linie [cm²]

TM2 Klausur 1.10.21



Statisches Moment [cm³]



Schubspannung [cm⁴]

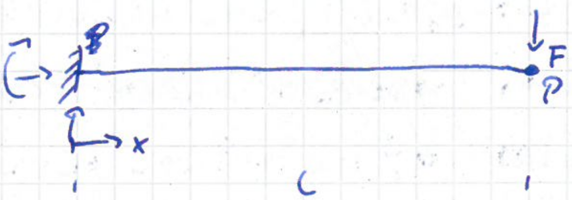
$$\tau = -\frac{Q_z S_y}{I_y \cdot h(s)}$$

$$= -0{,}002759 \cdot \frac{S_y}{h(s)}$$

b)

$\circlearrowleft \sum M_P = 0: \quad M_P - Q_y \cdot y_M = 0$

???



c)

$M_T = 65{,}41$ kN aus vorheriger Aufgabe

$I_T = \frac{1}{3} \cdot 1{,}12 \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^3 h_i = 44{,}8$ cm⁴

$\tau = 1{,}462 \cdot t_i \quad \rightarrow$

$\tau_1 = 2{,}92 \frac{kN}{cm^2}$

$\tau_{2,3} = 1{,}46 \frac{kN}{cm^2}$

⑦

System stat. unbestimmt

$$2EI\,w_1(x_1)^{(4)} = q_0$$

$$2EI\,w_1(x_1)''' = q_0 x + C_1$$

$$2EI\,w_1(x_1)'' = \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$$

$$2EI\,w_1(x_1)' = \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$2EI\,w_1(x_1) = \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

$$EI\,w_2^{(4)}(x_2) = q_0 - \frac{q_0 x}{l}$$

$$EI\,w_2'''(x_2) = -\frac{q_0}{2l} x^2 + q_0 x + C_5$$

$$EI\,w_2''(x_2) = -\frac{q_0}{6l} x^3 + \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_5 x + C_6$$

$$EI\,w_2'(x_2) = -\frac{q_0}{24l} x^4 + \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} C_5 x^2 + C_6 x + C_7$$

$$EI\,w_2(x_2) = -\frac{q_0}{120l} x^5 + \cancel{\frac{1}{6}}\frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{6} C_5 x^3 + \frac{1}{2} C_6 x^2 + C_7 x + C_8$$

Randbedingungen

$w_1(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$

$w_1'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$w_2(0) = 0 \rightarrow C_8 = 0$

$-w_2''(l) = 0 \rightarrow -\frac{q_0}{6} l^2 + \frac{1}{2} q_0 l^2 + C_5 l + C_6 = 0$

$-w_2'''(l) = 0 \rightarrow +\frac{q_0}{2} l \mp q_0 l \mp C_5 = 0 \rightarrow C_5 = -\frac{q_0 \cdot l}{2}$

$\rightarrow C_6 = \frac{q_0 l^2}{6}$

$w_1(l) = 0$

$\hookrightarrow \frac{1}{24} q_0 l^4 + \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 = 0$

$w_1'(l) = w_2'(0)$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ $\Rightarrow \frac{1}{6} q_0 l^3 + \frac{1}{2} C_1 l^2 + C_2 \cdot l = C_7$

$w_1''(l) = w_2''(0) \Rightarrow \frac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 \cdot l + C_2 = \frac{q_0 \cdot l^2}{6}$ ← Hier in der Lösung Fehler: ein $x = l$ und nicht $= 0$ gesetzt

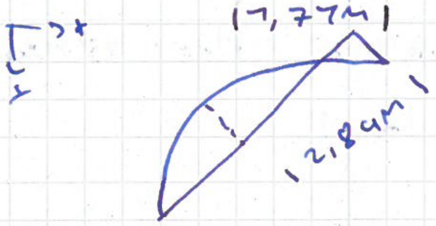
$C_1 = -\frac{3 q_0 l}{8} \qquad C_2 = \frac{q_0 l^2}{24} \qquad C_7 = \frac{q_0 l^3}{48}$

$$w_1(x_1) = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{24} q_0 x^4 \mp \frac{13}{16} q_0 l x^3 + \frac{q_0 l^2}{48} x^2\right)$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{\cancel{2}EI}\left(-\frac{q_0}{120l} x^5 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{q_0 l}{12} x^3 + \frac{q_0 l^2}{12} x^2 + \frac{q_0 l^3}{48} x\right)$$

TM2 Klausur 1.10.21

⑧



a) Moment maßgebend:

$M_y = 11{,}95$ kNm

$N = 31{,}94$ kN

$x_1 = 6m - 1{,}71m = 4{,}29m$

Normalkraft maßgebend:

$M_y = 0$ kNm

$N = 49{,}19$ kN

$x_2 = 3m$

b) $\sigma_{x,1} = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z$ hier: $z \overset{!}{=} \pm\frac{1}{2} b$; $A = a \cdot b$; $b = 6$ cm ; $I_y = \frac{a \cdot b^3}{12} = 18a$

$\frac{31{,}94kN}{6 \cdot a cm} + \frac{11{,}95kN}{18 a cm^4} z \leq 220 \frac{N}{mm}$

$a \geq$ ~~[illegible]~~ $108{,}1$ mm

$\sigma_{x,2} = \frac{49{,}19kN}{6 \cdot a} + 0 \leq 220 \frac{N}{mm}$

$a \geq 3{,}71$ mm

-> a muss mindestens 108,1 mm lang sein.

⑨

a) $\sigma = E\varepsilon$; $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$; $\varepsilon_y = \ldots$

[illegible]   LGS mit drei Gleichungen lösen

[illegible] $\sigma_x = 250$ MPa   140

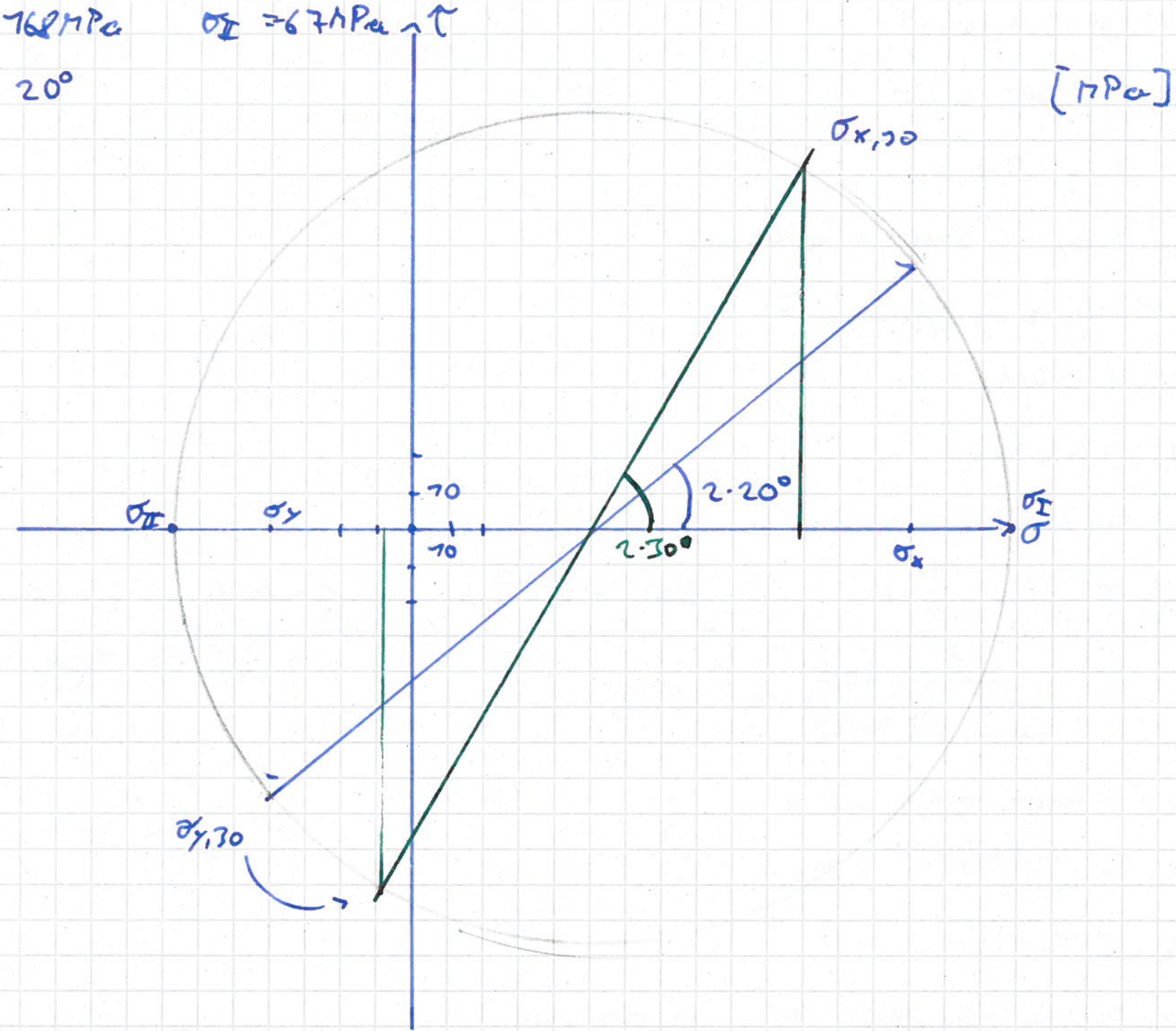
[illegible] $\sigma_y = 70$ MPa ↯ -40

$\gamma_{xy} = 0{,}03760$ $\sigma_z = 330$ MPa   75 b)

$\sigma_x = 140 MPa$ $\sigma_y = -40 MPa$ $\tau_{xy} = 75 MPa$

c) $\sigma_I = 168 MPa$ $\sigma_{II} = 67 MPa$

$\varphi = 20°$



d)

$\sigma_{x,30} = 104 MPa$

$\sigma_{y,30} = -8 MPa$

e) $\sigma_{Tr.} = \sigma_I - \sigma_{II} = 235 MPa$

TM2 Klausur 7.4.21

①

a) Deviationsmoment ist Null, sobald eine Symmetrie existiert.

b) Pos. Spannungen zeigen am pos. Schnittufer in pos. Koordinatenrichtung

c) Homogener Spannungszustand: Kraft verteilt sich gleichmäßig in Körper und Spannung ist (in eine Richtung) im ganzen Körper konstant.

d) Bei stat. Überbestimmten Systemen kommt es bei Temp. Belastungen zu zusätzlichen Wärmespannungen.

e) Zusammenhang Federkraft – Federweg ist linear über Federkonstante gegeben, $F = C \cdot s$.

②

Schwerpunkt: $S_y = 0\,cm$; $S_z = \sum_i \frac{A_i z_i}{A_i} = 22{,}22\,cm$

I: $I_{y,1} = 0 + (-22{,}22)^2 \cdot 80 \cdot 1$

$I_{z,1} = \frac{1 \cdot 80^3}{12} + 0$

II: $I_{y,2} = \frac{(20\sqrt{2})^3 \cdot 1}{12} \cdot \sin(45)^2 + (-12{,}22)^2 \cdot 20\sqrt{2} \cdot 1$

$I_{z,2} = \frac{(20\sqrt{2})^3 \cdot 1}{12} \cdot \cos(45)^2 + (30)^2 \cdot 20\sqrt{2} \cdot 1$

III: $I_{y,3} = 0 + (-2{,}22)^2 \cdot 40 \cdot 1$

$I_{z,3} = \frac{1 \cdot 40^3}{12} + 0$

IV: $I_{y,4} = \frac{50^3 \cdot 2}{12} \cdot \sin(36{,}87)^2 + 12{,}78^2 \cdot 50 \cdot 2$

$I_{z,4} = \frac{50^3 \cdot 2}{12} \cos(36{,}87)^2 + 40^2 \cdot 50 \cdot 2$

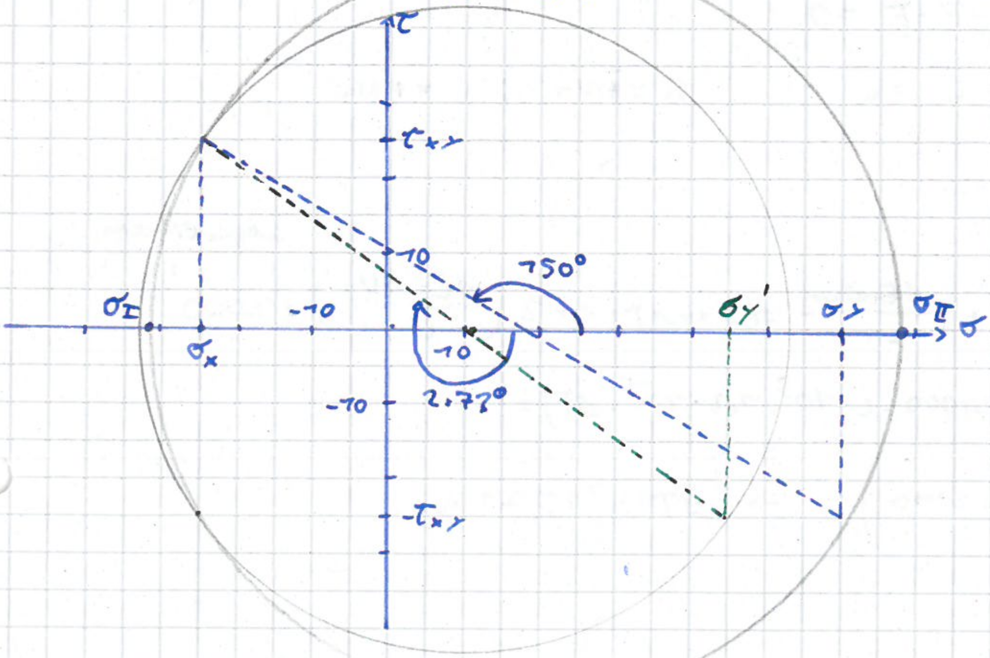
$I_y = I_{y,1} + I_{y,2} + I_{y,3} + I_{y,4} = 97694{,}1\,cm^4$

$I_z = I_{z,1} + I_{z,2} + I_{z,3} + I_{z,4} = 447463{,}9\,cm^4$

③

a)

b)



$\sigma_y = 60\,MPa$

$\sigma_x = -25\,MPa$

$\tau_{xy} = 20\,MPa$

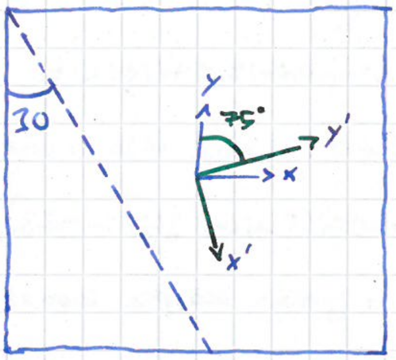
$\sigma_I = -31\,MPa$

$\sigma_{II} = 67\,MPa$

$\tau_{max} = \pm 49\,MPa$

$\varphi = \frac{150}{2} = 75°$

c)



d)

KS um 30° gegen Uhrzeigersinn drehen -> 60° in Uhrzeigersinn im Mohrschen Spannungskreis -> $\sigma_\eta = 79\,MPa$, $\tau_{\eta\xi} = 49\,MPa$

e)

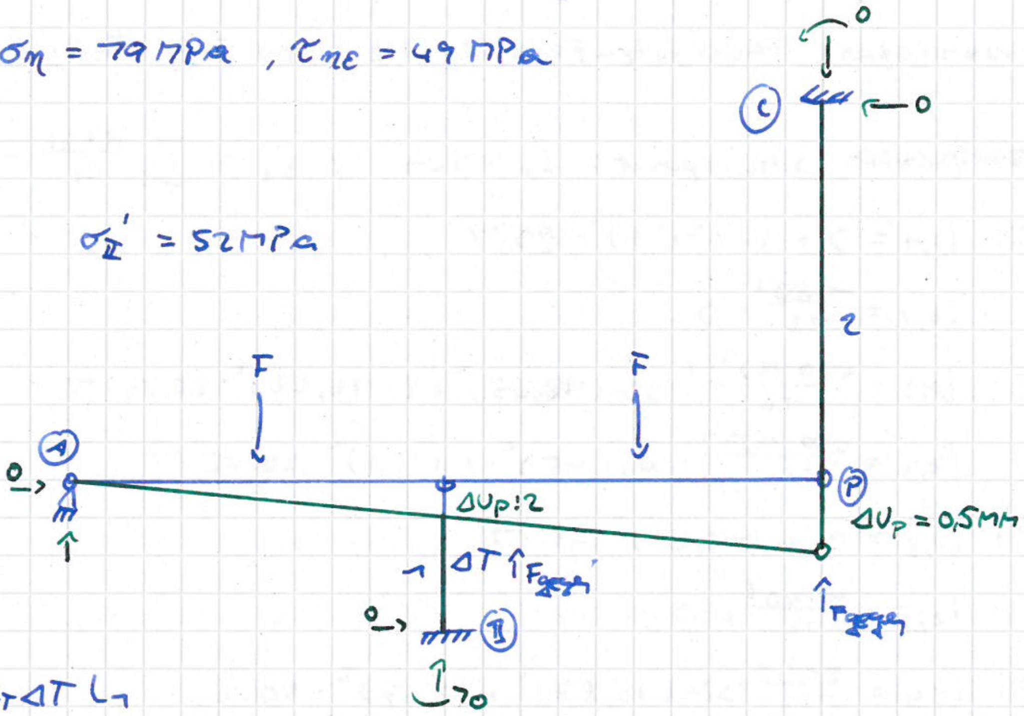
$\sigma_y' = 45\,MPa$

f) $\sigma_I' = -32\,MPa$ $\sigma_{II}' = 52\,MPa$

④

Ges. ΔT

a)



$\Delta u_1 = \frac{N_1}{EA} \cdot l_1 + \alpha_T \Delta T\, l_1$

$\Delta u_2 = \frac{N_2}{EA} \cdot l_2 + \alpha_T \Delta T\, l_2$

$\circlearrowleft \sum M_A = 0: \quad -F \cdot 2{,}5 - F \cdot 7{,}5 + B \cdot 5 - C \cdot 10 = 0$

$\circlearrowleft \sum M_P = 0: \quad -A \cdot 10 + F \cdot 7{,}5 + F \cdot 2{,}5 - B \cdot 5$

$\uparrow \sum V = 0: \quad A + B - C - F - F = 0$

$A = -C \; ; \; B = 2C + 2 \; ; \; C = C$ $\quad B = \mp N_1 \; ; \; C = +N_2$

$\Delta u_1 = \frac{1}{2} \cdot \Delta u_P$

~~[illegible]~~

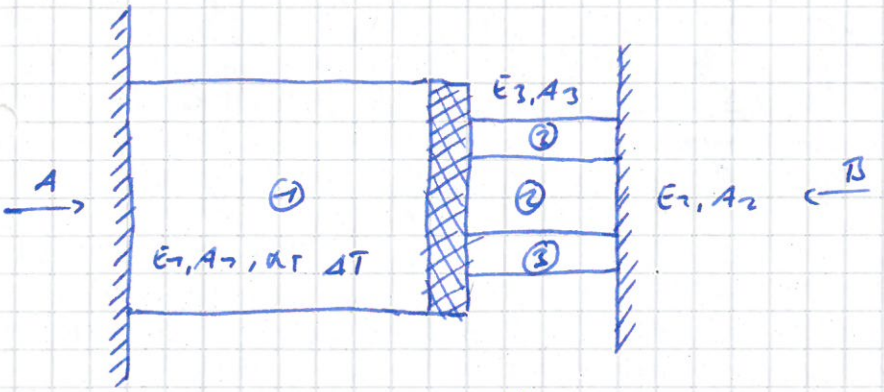
wegen Einheiten

$\mp N_1 = \pm 2 N_2 + 2 \quad \rightarrow \quad +\left(\frac{AE_1 \Delta u_1}{l_1} - AE_1 \alpha_T \Delta T\right) = +2\left(\frac{AE_2 \Delta u_2}{l_2}\right) + 2000$

$-\left(\frac{20000 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}25}{2000} - 20000 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta T\right) =$

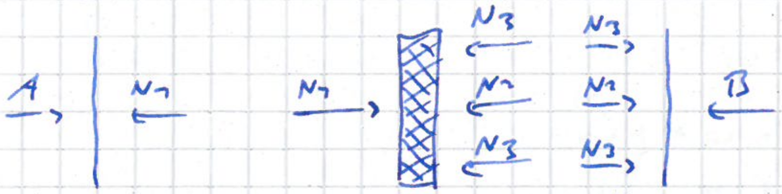
$= -2 \cdot \left(\frac{40000 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0{,}5}{5000} - 2000\right) \quad \rightarrow \quad \Delta T = 13{,}71\,k$

b)



Δu für alle Stäbe gleich!

1)



$A = N_1$ $\qquad N_1 = N_3 + N_3 + N_2$ $\qquad N_3 + N_3 + N_2 = B$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \alpha_T \Delta T = \frac{N_1}{EA_1} + \alpha_T \Delta T = \frac{\Delta u}{L_1} \quad \rightarrow N_1 = EA_1\left(\frac{\Delta u}{L_1} - \alpha_T \Delta T\right)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} + \alpha_T \Delta T = \frac{\Delta u}{L_2} = \frac{N_2}{EA_2} \quad \rightarrow N_2 = EA_2\left(\frac{\Delta u}{L_2}\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} + \alpha_T \Delta T = \frac{\Delta u}{L_3} = \frac{N_3}{EA_3} \quad \rightarrow N_3 = EA_3\left(\frac{\Delta u}{L_3}\right)$$

Einsetzen in GGB:

$$EA_1\left(\frac{\Delta u}{L_1} - \alpha_T \Delta T\right) = 2\cdot\left(EA_3 \frac{\Delta u}{L_3}\right) + EA_2 \frac{\Delta u}{L_2}$$

$\Delta u = -0{,}06545$ mm

$N_1 = -183{,}27$ kN $\qquad \sigma_1 = -3{,}055$ MPa

$N_2 = -52{,}360$ kN $\qquad \sigma_2 = -1{,}309$ MPa $\qquad$ ↯ Andere Werte als in Lösung

$N_3 = -65{,}45$ kN $\qquad \sigma_3 = -13{,}09$ MPa

2) Δu bereits berechnet : $\Delta u = -0{,}06545$ mm

⑤

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \cancel{\frac{M_z}{I_z}}^{\rightarrow = 0} y$$

Länge des Balkens nicht bekannt. Entsprechendes N kann nicht berechnet werden.

Querschnitt 1: $\qquad$ N maßgebend $\qquad$ M maßgebend

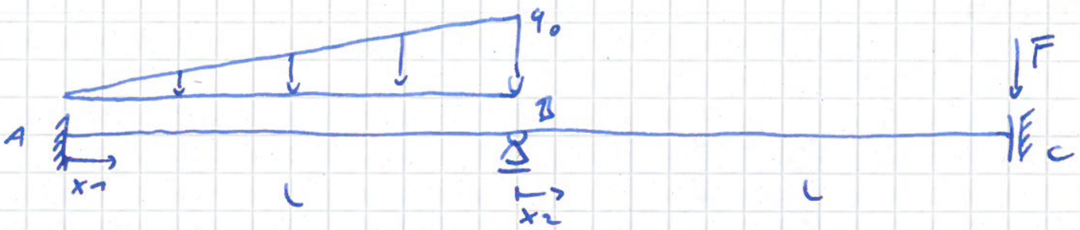
$$\sigma_{max} = \frac{-4{,}011}{876} + \frac{-2{,}994}{441791} \cdot \frac{60}{2} = -208{,}2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max} = \frac{-1{,}42}{876} + \frac{3{,}364}{441791} \cdot \frac{-60}{2} = -230{,}2 \text{ MPa}$$

Querschnitt 2: $\qquad \sigma_{max} = -227{,}9$ MPa $\qquad \sigma_{max} = -251{,}8$ MPa

Es muss der Doppel-T-Träger genutzt werden, weil beim Hohlkreis, ist M maßgebend, σ_{max} überschritten wird.

⑥ 4 1



System nicht stat. bestimmt.

$$EI\,w^{(4)}(x_1) = q_0 = \frac{q_0}{L}x$$

$$EI\,w'''(x_1) = \frac{q_0}{2L}x^2 + C_1$$

$$EI\,w''(x_1) = \frac{q_0}{6L}x^3 + C_1 x + C_2$$

$$EI\,w'(x_1) = \frac{q_0}{24L}x^4 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EI\,w(x_1) = \frac{q_0}{120l}x^5 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

$$EI\,w^{(4)}(x_2) = 0$$

$$EI\,w'''(x_2) = C_5$$

$$EI\,w''(x_2) = C_5 x + C_6$$

$$EI\,w'(x_2) = \frac{1}{2}C_5 x^2 + C_6 x + C_7$$

$$EI\,w(x_2) = \frac{1}{6}C_5 x^3 + \frac{1}{2}C_6 x^2 + C_7 x + C_8$$

Randbedingungen:

$w_1(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$

$w_1'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

I $w_1(L) = 0$

$w_2(0) = 0 \rightarrow C_8 = 0$

II $w_2'(0) = w_1'(l)$ IV $w_1''(l) = w_2''(0)$

III $w_2'(L) = 0$ V $-EIw_2'''(L) = F$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$C_1 \mathrel{\hat=} a$ $C_6 \mathrel{\hat=} d$

$C_2 \mathrel{\hat=} b$ $C_7 \mathrel{\hat=} e$

$C_5 \mathrel{\hat=} c$

$C_1 = \frac{39 \cdot l q_0}{100}$ $C_2 = -\frac{17}{75}q_0 l^2$ $C_5 = -q_0 l$ $C_6 = \frac{47}{100}q_0 l^2$ $C_7 = \frac{9}{100}q_0 l^3$

$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{120l}x^5 + \frac{13}{200}l q_0 x^3 - \frac{17}{150}q_0 l^2 x^2\right)$$

$$w_2(x_2) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}q_0 l x^3 + \frac{47}{200}q_0 l^2 x^2 + \frac{9}{100}q_0 l^3 x\right)$$

TM2 Klausur 7.4.21

⑦

a) $S_z = 20\,cm$ (wegen Symmetrie)

$S_y = \sum_i \frac{A_i y_i}{A_i} = 15,71\,cm$

b) $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot \cancel{z}$

$+0,1 = \frac{N}{280} + \frac{M_y}{12000} \cdot (-20)$

$-0,6 = \frac{N}{280} + \frac{M_y}{12000} \cdot 20$

$N = -70\,kN$; $M_y = -1260\,kNcm$

c) $M_y = F \cdot l$

$0,1 = \frac{F}{280} + \frac{F \cdot l}{12000} \cdot (-20)$

$-0,6 = \frac{F}{280} + \frac{F \cdot l}{12000} \cdot (20)$

$F = -70\,kN$; $l = 18\,cm$

Kein M_z → $F_y = 0\,cm$

$F_z = 18\,cm$

d)

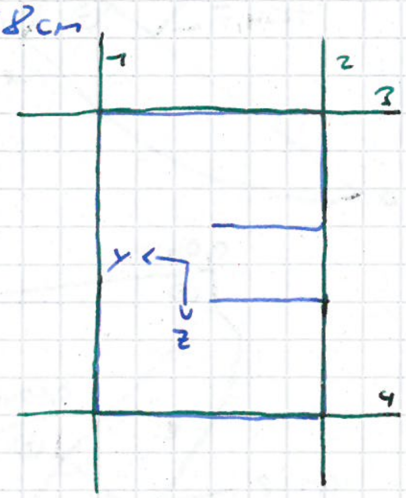
$i_y^2 = 257,1$ $i_z^2 = 143,5$

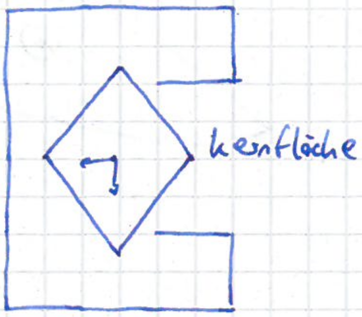
$y_{F,1} = -10,0\,cm$ $z_{F,1} = 0\,cm$

$y_{F,2} = \overset{9,13}{\cancel{10,0}}\,cm$ $z_{F,2} = 0\,cm$

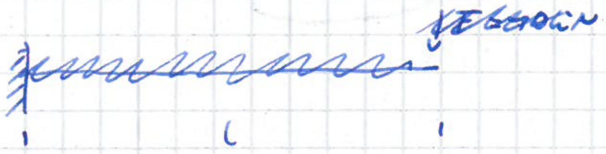
$y_{F,3} = 0\,cm$ $z_{F,3} = -12,86$

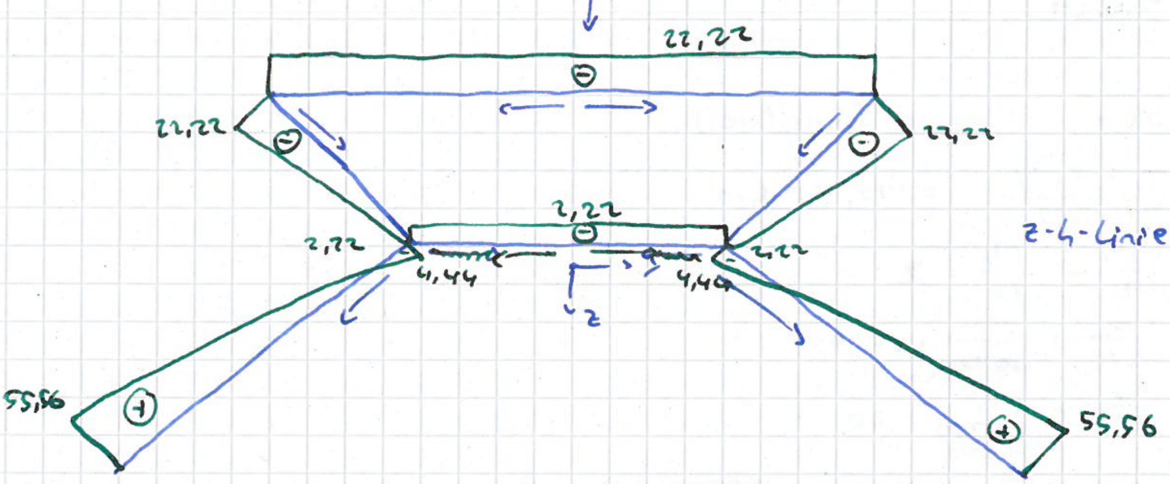
$y_{F,4} = 0\,cm$ $z_{F,4} = 12,86$



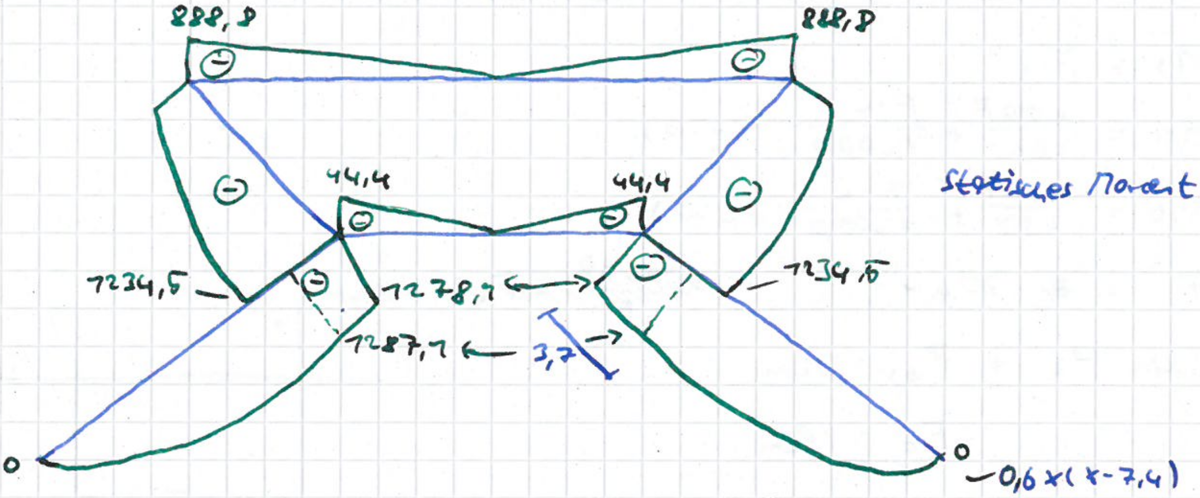


⑧

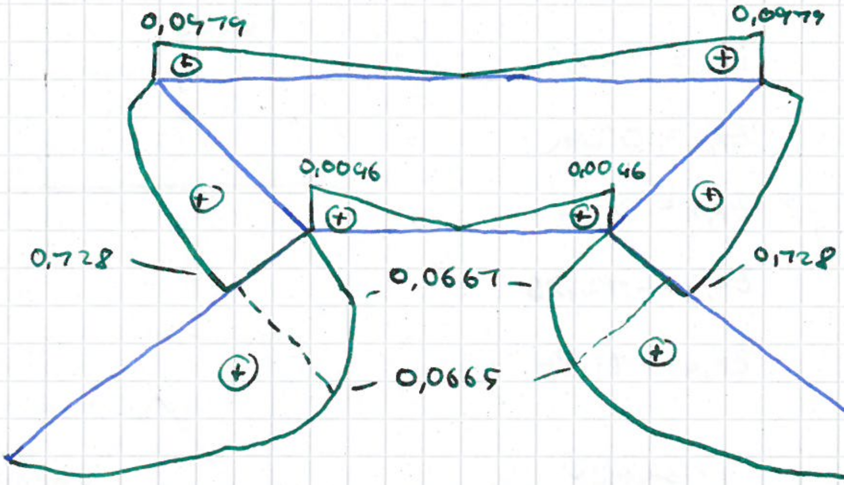




z-h-Linie [cm²]



Statisches Moment [cm³]



Schubspannung $\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$

$$\tau(s) = -\frac{Q_z \, S_y}{I_y \, h(s)}$$

$$= -1{,}034 \cdot 10^{-4} \cdot$$

$$: h(s) \cdot S_y$$

TM2 Klausur 9.10.20

①

a) Isotropes Materialverhalten: Materialeigenschaften in alle Richtungen gleich

b) Brucharten: Sprödbruch, kleine Dehnung, plötzliches Versagen

Dehnbruch, große Dehnung allmähliches versagen

c) St. Venantsche Torsion: Torsion ohne Wölbbehinderung. QS dürfen sich aus ihrer Ebene heraus in x-Richtung verformen

d) Tonti-Diagramm: Veranschaulicht und klassifiziert Variablen und die Feldgleichungen in der Mechanik und stellt diese in Beziehung zueinander.

②

I: $I_y = \frac{4{,}5\cdot 80^3}{12} + 160^2\cdot 4{,}5\cdot 80$

$I_z = 0 + 200^2\cdot 4{,}5\cdot 80$

$I_{yz} = 0 \quad (-160)(-200)\cdot 4{,}5\cdot 80$

II $I_y = 0 + 200^2\cdot 4{,}5\cdot 400$

$I_z = \frac{4{,}5\cdot 400^3}{12} + 0$

$I_{yz} = 0$

III $I_y = \frac{2\cdot 400^3}{12} + 0$

$I_z = 0$

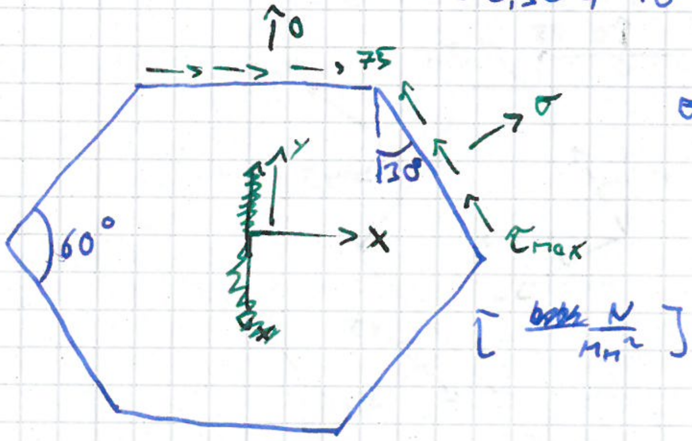
$I_{yz} = 0$

$I_{y,ges} = 2\cdot I_{y,I} + 2\cdot I_{y,II} + I_{y,III} = 1{,}7348\cdot 10^8\ mm^4$ ✓

$I_{z,ges} =$ 〃 〃 〃 $= 7{,}68\cdot 10^7\ mm^4$ ✓

$I_{yz,ges} =$ 〃 〃 〃 $= -2{,}304\cdot 10^7\ mm^4$ ✓

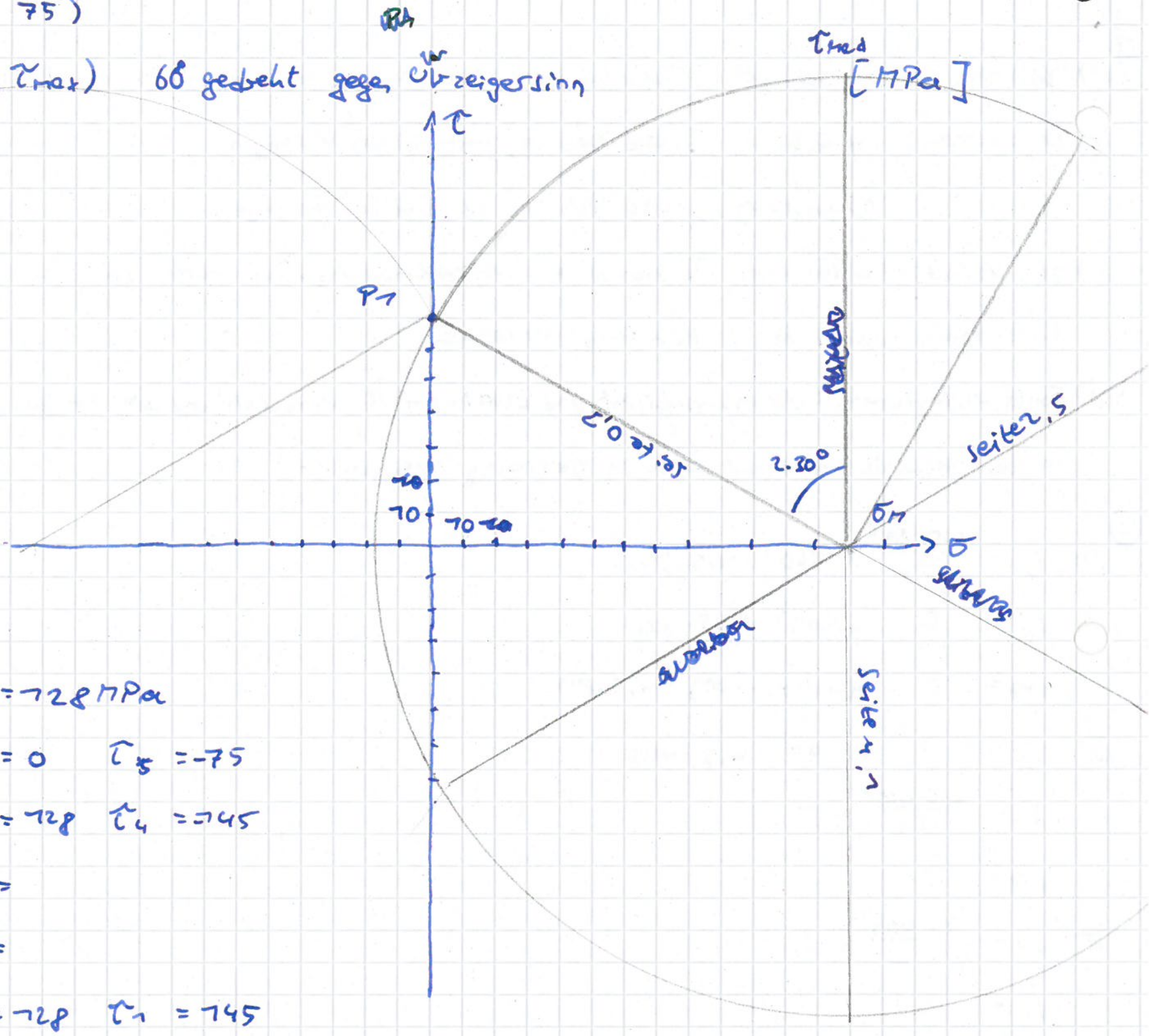
③



$\sigma_x = 0;\ \tau_{xy} = 75$

$P_1(0,\ 75)$

$P_2(\sigma?,\ \tau_{max})$ 60° gedreht gegen Uhrzeigersinn



$\sigma_{max} = 128\ MPa$

$\sigma_5 = 0 \quad \tau_5 = -75$

$\sigma_4 = 128 \quad \tau_4 = 145$

$\sigma_3 =$

$\sigma_2 =$

$\sigma_1 = 128 \quad \tau_1 = 145$

b)

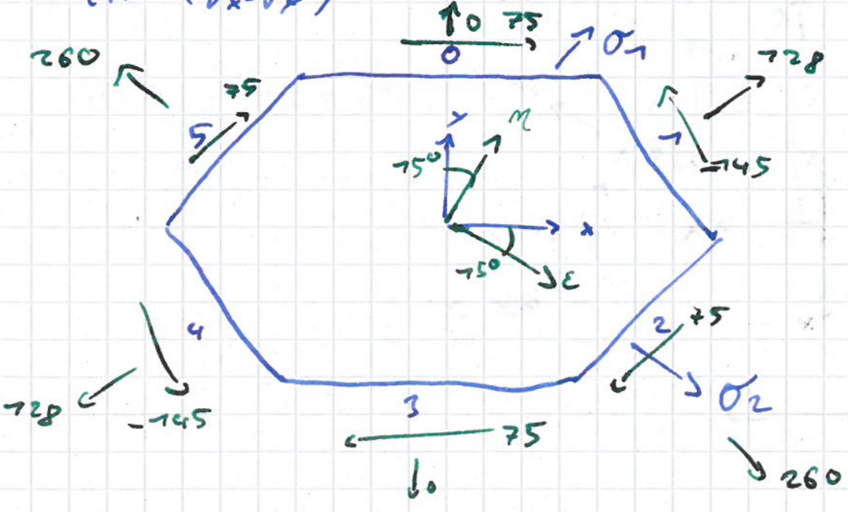
Hauptspannungen: $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 260$

$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) \pm \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}$

$\sigma_1 = -20\ \frac{N}{mm^2} \qquad \sigma_2 = 280\ \frac{N}{mm^2}$

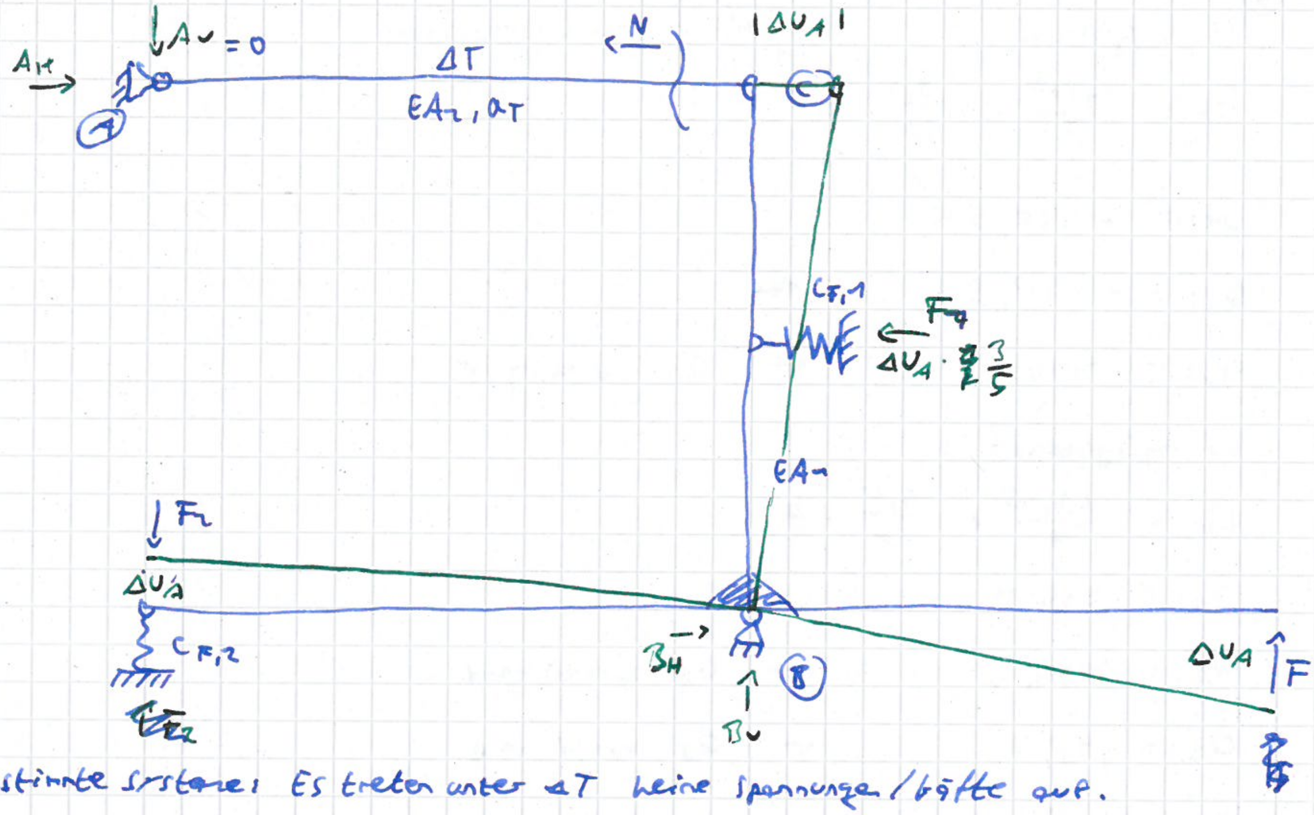
$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = -30° : 2 = -15°$

c)



TM2 Klausur 9.10.20 ③

④



a) Stat. bestimmte Systeme: Es treten unter ΔT keine Spannungen/Kräfte auf.

Stat. unbestimmte Systeme: Es treten unter ΔT Spannungen/Kräfte auf.

b)

$$\Delta U_A \cdot \frac{3}{5} = \frac{F_1}{c_{F,1}} \rightarrow F_1 = \Delta U_A \cdot \frac{3}{5} \cdot c_{F,1}$$

$$\Delta U_A = \frac{F_2}{c_{F,2}} \rightarrow F_2 = \Delta U_A \cdot c_{F,2}$$

$$\Delta U_A = \frac{N}{EA_2} l + \alpha_T \Delta T \cdot l \rightarrow N = \frac{A \cdot E \cdot \Delta U_A}{l} - A \cdot E \alpha_T \Delta T$$

$$\curvearrowleft \sum M_B = 0 : -F_2 \cdot l + F_1 \cdot \frac{3}{5} l + N \cdot l + F \cdot l = 0$$

Alles einsetzen...

$$0 = +(\Delta U_A c_{F,2}) l + (\Delta U_A \cdot \frac{3}{5} \cdot c_{F,1}) l \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{AE \Delta U_A}{l} - AE \alpha_T \Delta T\right) l + Fl$$

$$\Delta U_A = 0{,}329 \text{ m}$$

c) Gleiche Formel wie bei b), dieses Mal $\Delta U_A = 0$ und F gesucht

$$F = 10800 \text{ N}$$

⑤

M maßgebend:

$\sigma_x = \frac{-4,75}{A} + \frac{-9,5}{I_y}\, z$ ↗ hier $\frac{h}{4}$, weil dort max.

$Q_1 := -475,0$

$Q_2 := -278,3$

$Q_3 := -179,6$ ← Q_3 ausreichend

N maßgebend:

$\sigma_x = \frac{-67,25}{A} + \frac{5,5}{I_y} \cdot \frac{h}{2}$

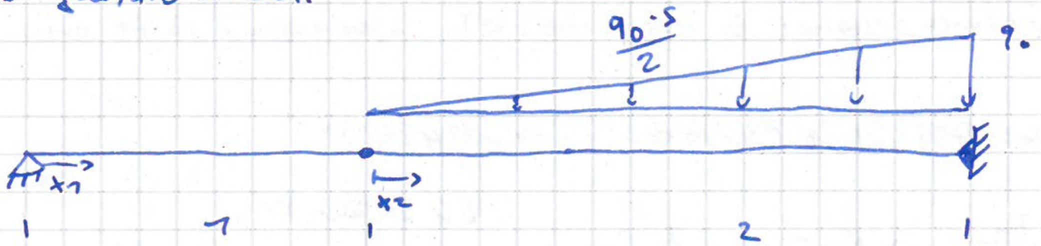
$Q_1 := 265,9$

$Q_2 := 154,3$ ← Q_2 ausreichend

$Q_3 := 98,7$ ← Q_3 ausreichend

Es muss Q_3 gewählt werden.

⑥



a) $f = 3 \cdot 2 - (5+2) \neq 0$ ⇒ System nicht stat. bestimmt

$EI w_1''''(x_1) = 0$

$EI w_1'''(x_1) = C_1$

$EI w_1''(x_1) = C_1 x + C_2$

$EI w_1'(x_1) = \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$

$EI w_1(x_1) = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$

$EI w_2''''(x_2) = \frac{q_0}{2} x$

$EI w_2'''(x_2) = \frac{q_0}{4} x^2 + C_5$

$EI w_2''(x_2) = \frac{q_0}{12} x^3 + C_5 x + C_6$

$EI w_2'(x_2) = \frac{q_0}{48} x^4 + \frac{1}{2} C_5 x^2 + C_6 x + C_7$

$EI w_2(x_2) = \frac{q_0}{240} x^5 + \frac{1}{6} C_5 x^3 + \frac{1}{2} C_6 x^2 + C_7 x + C_8$

Randbedingungen:

$W_1(0) = 0 \to \underline{C_4 = 0}$

$M_1(0) = 0 \to -W_1''(0) = 0 \to \underline{C_2 = 0}$

$M_1(\vec{l}) = 0 \to -W_1''(1) = 0 \to -C_1 \cdot 1 = 0 \to \underline{C_1 = 0}$

$W_2(2) = 0 \to \frac{90}{240} \cancel{x} 2^5 + \cancel{\frac{1}{6} C_5} \overset{=0}{\cdot 2^3} + \cancel{\frac{1}{2} C_6 \cdot 2^2}^{=0} + C_7 \cdot 2 + C_8 = 0$

$W_2'(2) = 0 \to \frac{90}{48} \cdot 2^4 + \cancel{\frac{1}{2} C_5} \overset{=0}{\cdot 2^2} + \cancel{C_6 \cdot 2}^{=0} + C_7 = 0$

$W_1(1) = U_2(0) \to \cancel{\frac{1}{6} C_1}^{=0} + C_3 = C_8$

$-W_2''(0) = 0 \to \underline{C_6 = 0}$

$a \hat{=} C_7$
$b \hat{=} C_8$

$-W_1''(1) = -W_2''(0) \to$

$Q_1(1) = Q_2(0) \to \underline{C_5 = 0}$

$C_7 = -\frac{4}{3}$

$C_8 = \frac{32}{15}$

$C_3 = \frac{32}{15}$

$W_1(x_1) = \frac{1}{EI}\left(\frac{32}{15} x\right)$

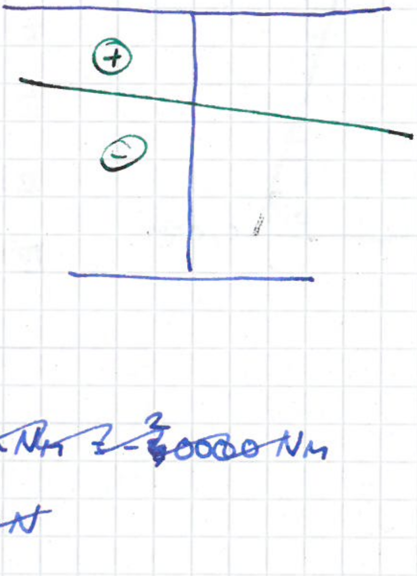
$W_2(x_2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{44N}{240} x^5 + (-\frac{4}{3}) x + \frac{32}{15}\right)$

$= \frac{1}{EI}\left(\frac{4}{240} x^5 \cancel{x} - \frac{4}{3} x + \frac{32}{15}\right)$

b)

$W_2'(x_2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{4}{48} x^4 - \frac{4}{3}\right)$

$W_2'(1) = -1{,}755 \cdot 10^{-5}$ rad $= -0{,}001235°$



~~4~~

~~a)~~ ~~$\sigma_x = \frac{F}{A} + \frac{M_y}{I_y} z$~~

~~$M = -q_0 \cdot \frac{1}{2} x^2$ bei $x = 200 \to M = -20 kNm = -20000 Nm$~~

~~$N = -1500 N$~~

~~$I_y = 0{,}05072 + 0{,}02076 + 0{,}0254 = 0{,}21496 m^4$~~

~~$\sigma_x = 0{,}388 + 0{,}0074 z$ Angriffsstelle ist nicht gegeben oder Fehler in Lösung?~~

6 | 1

⑦

a)

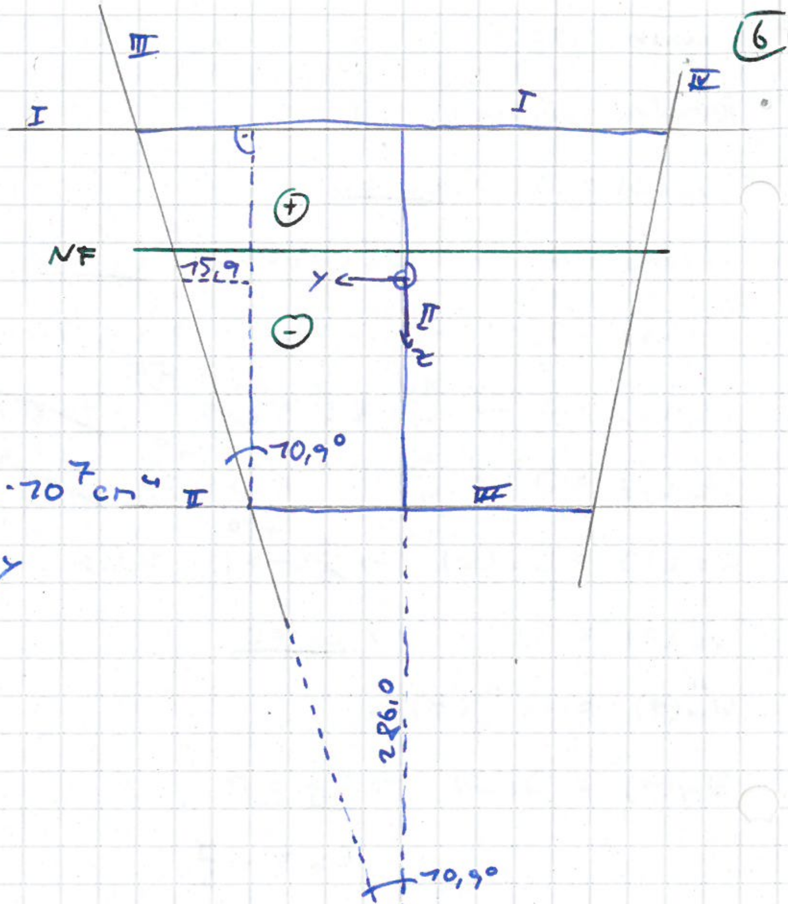
I: $S_y = 0$ cm
$$S_z = \sum \frac{A_i z}{A_i} = 47,4 \text{ cm}$$

$I_y = 5012326,7$ cm^4

II $I_y = 2016140$ cm^4

III $I_y = 8538866,7$ cm^4

$I_{y,ges} = 15567333,3$ cm^4 $= 1,557 \cdot 10^7$ cm^4



$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

$M_z = 0$

$M_y = -40 + \frac{1}{40\,000} x^2$ kNm

$N_x = 500$ N

$A = 6250$ cm^2

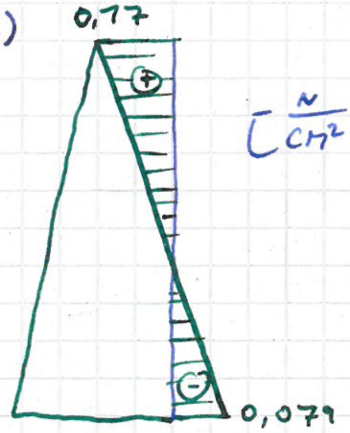
$\sigma_x(z) = 0,08 - 0,001927\ z$

↯ Angriffsstelle der ~~Kraft~~ Kraft F nicht gegeben. Vielleicht daher der Fehler?

$y = 0$

$z = 41,52$

b)



$\left[\frac{N}{cm^2}\right]$

c)

$i_y^2 = 2490,8$ $i_z^2 = 1694,1$

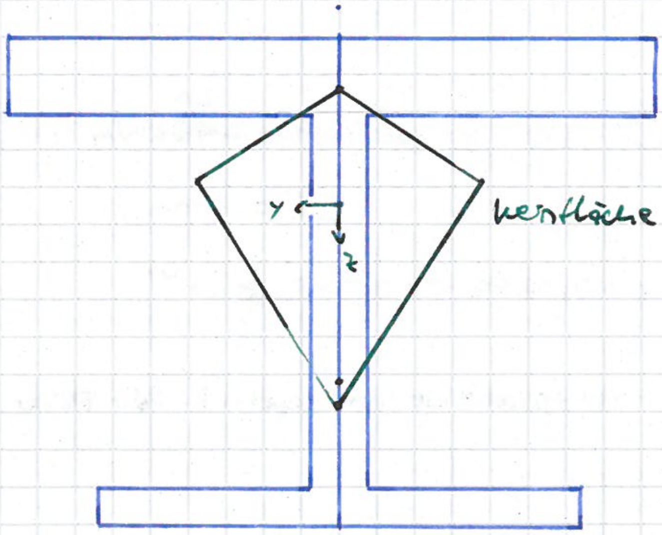
$I_z = 10588020,8$ cm^4

I: $y_{F,1} = 0$ $z_{F,1} = +52,5$

II: $y_{F,2} = 0$ $z_{F,2} = -30,2$

III: $y_{F,3} = -27,6$ $z_{F,3} = -6,76$

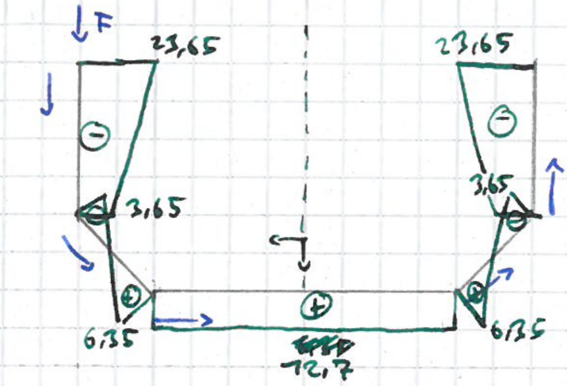
IV: $y_{F,4} = 27,6$ $z_{F,4} = -6,76$

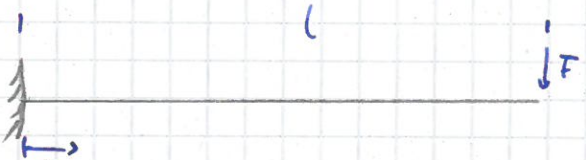


TM2 Klausur 9.10.20

⑧

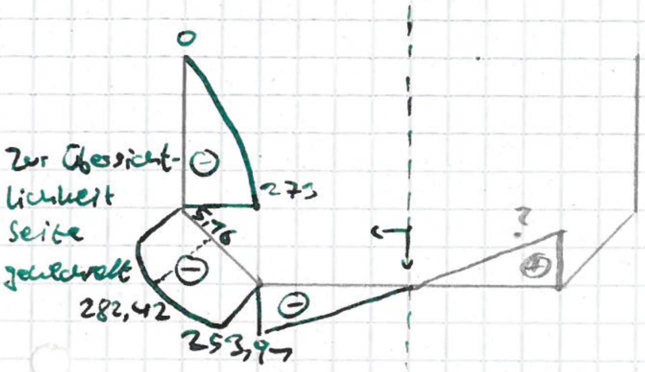
a)



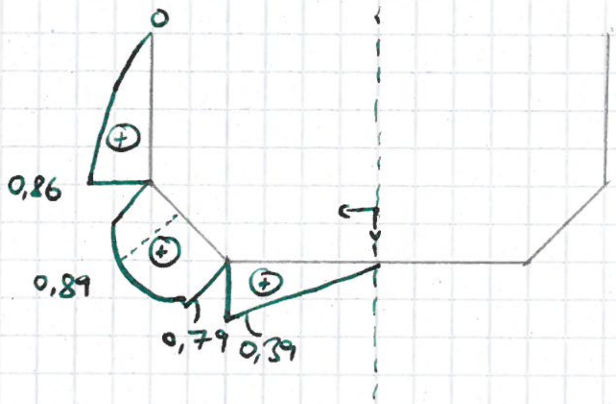


z-h-Linie [cm²]

$S_z = 13{,}65$



Statisches Moment [cm³]



$\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$ Schubspannung

$$\tau(s) = -\frac{Q_z\cdot S_y}{I_y\cdot h(s)} = -\frac{3{,}135}{h(s)}\cdot S_y$$

b) $\eta = 1{,}128$

$$I_T = \frac{1}{3}\cdot 1{,}12\cdot\sum_{i=1}^{n} t_i^3 h_i = \frac{1}{3}\cdot 1{,}12\cdot\left((1^3\cdot 20 + 1^3\cdot\sqrt{2}\cdot 10 + 2^3\cdot 20)\cdot 2\right)$$

$$= 144{,}96\ cm^4$$

$M_T = 900\ kNcm$

$\tau = \frac{M_T}{I_T} t_i = 6{,}21\ t_i$

$\tau = 6{,}21\ \frac{kN}{cm^2}$ bei $t_i = 1$

$\tau = 12{,}42\ \frac{kN}{cm^2}$ bei $t_i = 2$

⑨

$$I_T = \frac{4(200\cdot 100)^2}{2\cdot(\frac{200}{2}) + (\frac{100}{2})\cdot 2} = 5333333{,}3\ cm^4$$

$G = 25\ \frac{kN}{mm^2}$

$= 2500\ \frac{kN}{cm^2}$

$M_T = 1500\ kNcm$

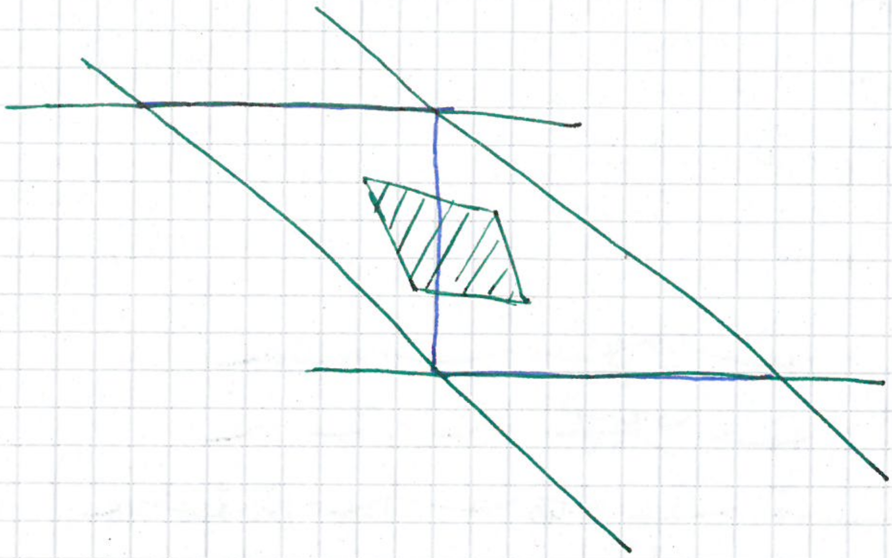
$\vartheta(x) = \frac{M_T}{G\cdot I_T} = 1{,}125\cdot 10^{-7}\ \frac{rad}{cm}$

~~[illegible]~~

$$U_x(s) = \int_s^{100}\left[\frac{M_T}{2GA_m h(s)} - r_t\vartheta\right] ds + C = 0{,}0001875$$

TM2 Klausur WS17/18 $\bar{0}$/

① a)



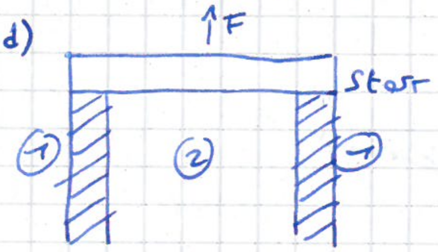
b) Zugversuch Schnitt der größten Schubspannung: 45°

c) Schubspannungs Hyp. : $\sigma_v = 2\tau_{max}$

Hyp. Gestaltänderung... : $\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$

Normalspannungshyp. : $\sigma_v = ||\sigma_1||$

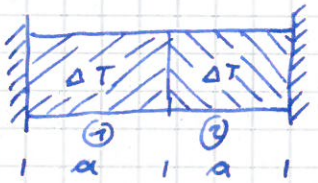
d)



$N_1 < N_2$ $E_1 < E_2$

$\sigma_1 < \sigma_2$ $A_1 < A_2$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

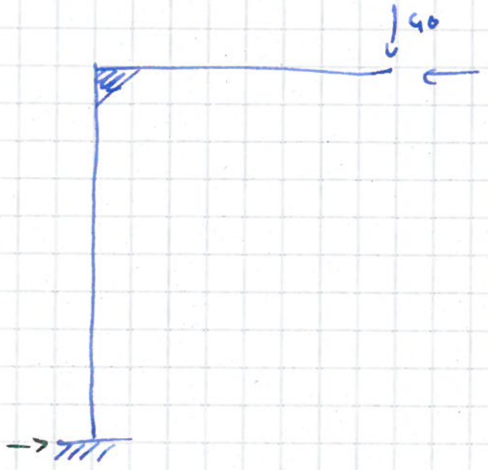


$N_1 = N_2$ $A_1 = A_2$

$\sigma_1 = \sigma_2$ $E_1 < E_2$

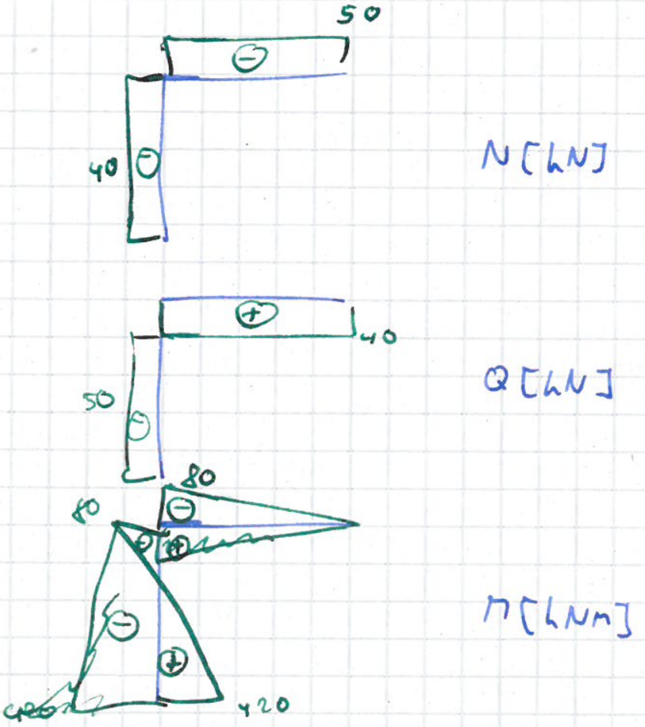
$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ $\alpha_1 = \alpha_2$

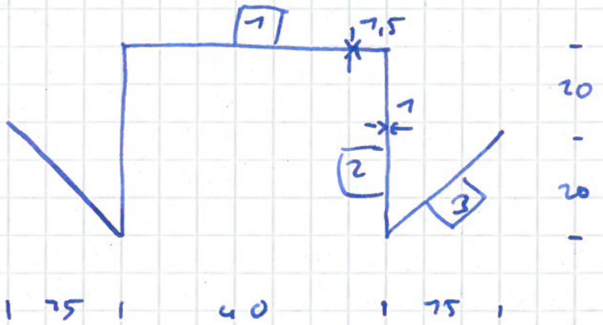
②



$\circlearrowleft \sum M_A$: $M_A + 40 \cdot 2 - 50 \cdot 10 = 0$

$M_A = 420$





~~$\boxed{1}$ $I_y = \cancel{\frac{40\cdot 1,5^3}{12}} = 0$ $I_z = \frac{1,5\cdot 40^3}{12}$ $I_{yz} = 0$~~

~~$\boxed{2}$ $\tilde I_y = \cancel{\frac{1\cdot 40^3}{12}}\ \frac{1\cdot 40^3}{12}$ $\tilde I_z = \cancel{\frac{40\cdot 20\cdot 1^3}{12}}$ $\tilde I_{yz} = 0$~~

~~$I_y = \tilde I_y + 20^2\cdot 40$ $I_z = \tilde I_z \cancel{+ 20^2}\cdot 40$ $I_{yz} = \tilde I_{yz} + 20\cdot 40$~~

~~$\boxed{3}$ $\tilde I_y = \frac{h^3\cdot 1}{12}\overset{\sin}{\cancel{\cos}}{}^2(\alpha)$ $\tilde I_z = \frac{h^3\cdot 1}{12}\cos^2(\alpha)$ $\tilde I_{yz} = 0$~~

~~$I_y = \tilde I_y + \overset{30}{\cancel{27,5}}{}^2\cdot A$ $I_z = \tilde I_z + \underset{27,5}{\cancel{30}}{}^2\cdot A$ $I_{yz} = \tilde I_z + 27,5\cdot 30\cdot A$~~

~~$I_y = \cancel{[illegible]}$ 89333 $I_z = \cancel{[illegible]}$ 45874 $I_{yz} = \cancel{[illegible]}$ 33605~~

[illegible]

~~Schwerpunkt: $S_y = 0$~~

~~$$S_z = \frac{1,5\cdot 40\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot \overset{40}{\cancel{20}}\cdot 20 + 2\cdot 30\cdot 1\cdot\sqrt{15^2+20^2}}{1,5\cdot 40 + 2\cdot 1\cdot 40 + 2\cdot 1\cdot\sqrt{15^2+20^2}}$$~~

~~$= 16,32$~~

~~$I_y = 89333 + 16,32^2\cdot A$~~ ↯

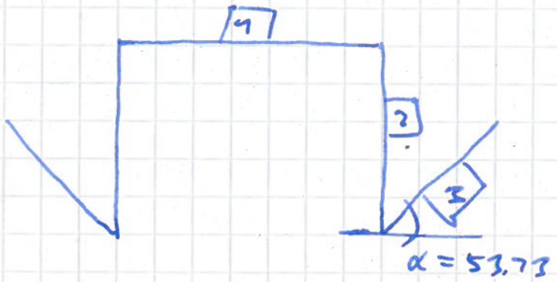
TM2 Klausur WS 17/18

② Schwerpunkt: $S_y = 0$

$$S_z = \frac{1{,}5\cdot40\cdot0 + 2\cdot1\cdot40\cdot20 + 2\cdot30\cdot1\cdot\sqrt{15^2+20^2}}{1{,}5\cdot40 + 2\cdot1\cdot40 + 2\cdot1\cdot\sqrt{15^2+20^2}}$$

$= 16{,}32$

$A = 190$



1: $I_{y_1} = 0 + 16{,}32^2\cdot40\cdot1{,}5 = 15981$

$I_{z_1} = \frac{1{,}5\cdot40^3}{12} = 8000$

2: $I_{y_2} = \frac{1\cdot40^3}{12} + (20-16{,}32)^2\cdot40$

$= 5875$

$I_{z_2} = 0 + 20^2\cdot40 = 16000$

3: $I_{y_3} = \frac{(\sqrt{15^2+20^2})^3\cdot1}{12}\cdot\sin(\alpha) + (30-16{,}32)^2\cdot\sqrt{15^2+20^2}$

$= 5720$

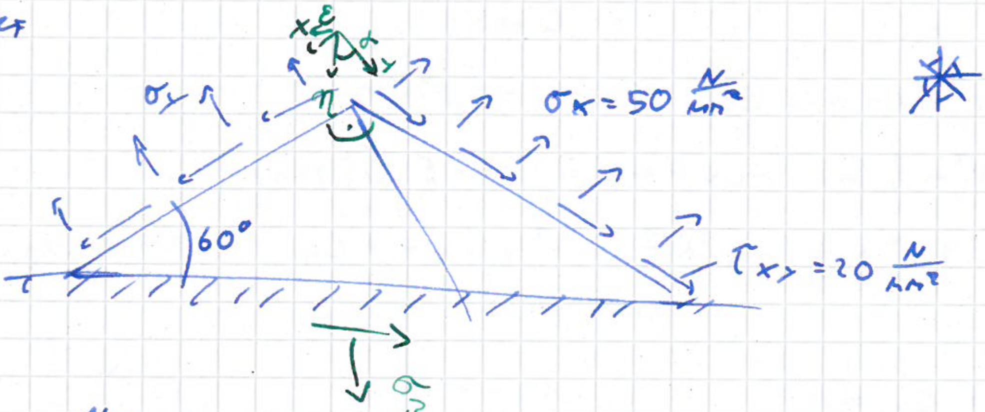
$I_{z_3} = \frac{(\sqrt{15^2+20^2})^3\cdot1}{12}\cdot\cos(\alpha) + (27{,}5)^2\cdot\sqrt{15^2+20^2}$

$= 11687$

Ges: $I_y = 39171$ $I_{yz} = 0 + 2\cdot2944 + 2\cdot9405$

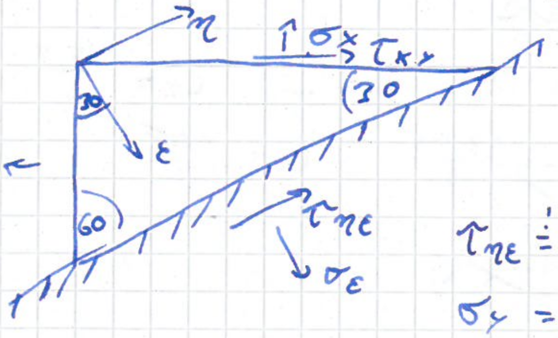
$I_z = 19{,}374$ $= 24698$

③



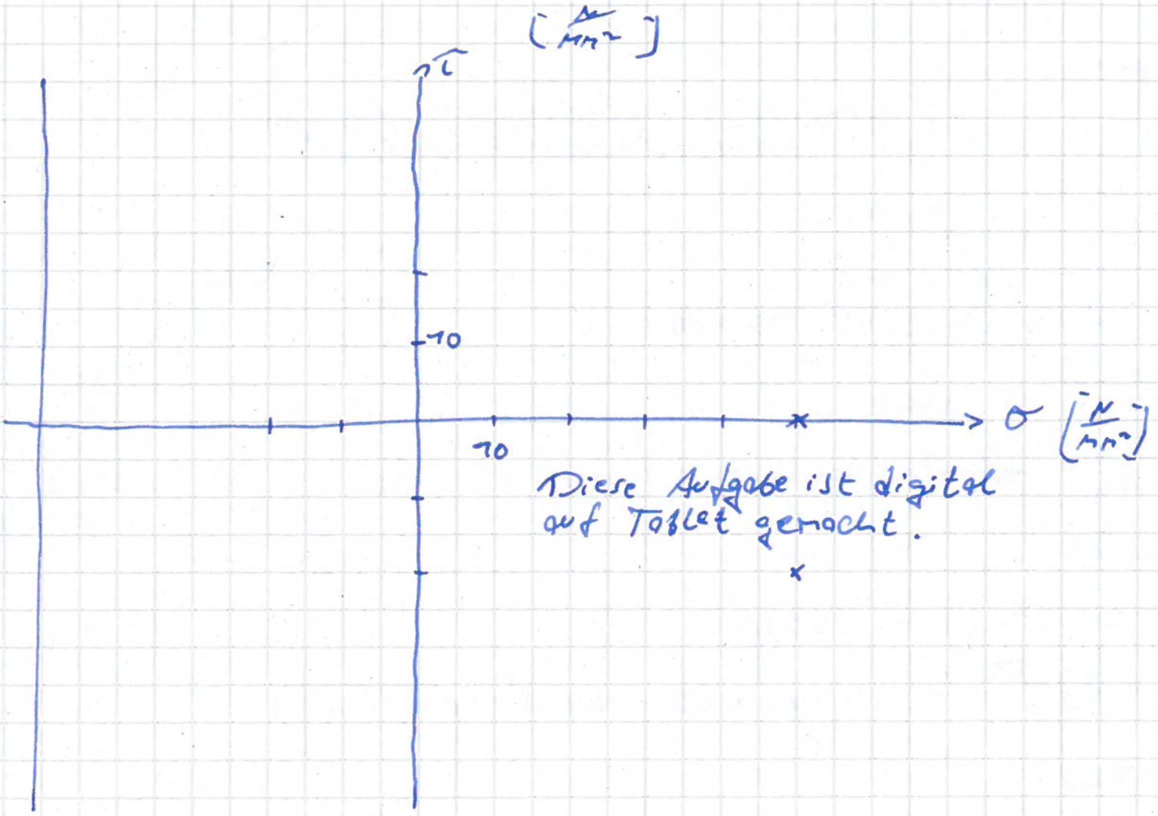
$\tau_{\eta\varepsilon}$ soll $10\,\frac{N}{mm^2}$ sein.

~~$\tau_{\eta\varepsilon} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin(2\alpha) + \tau_{xy}\sin(2\alpha)$~~



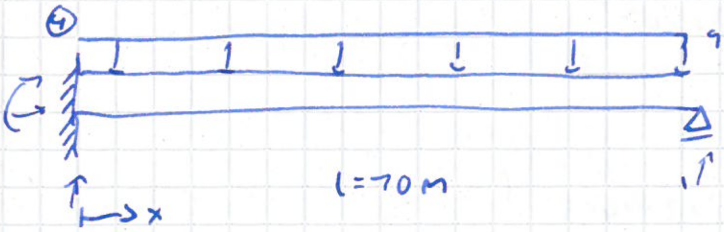
$\tau_{\eta\varepsilon} \overset{!}{=} 10\,\frac{N}{mm^2} = -\frac{1}{2}(50-\sigma_y)\sin(2\cdot30°) - 20\cos(2\cdot30)$

$\sigma_y = 96{,}19\,\frac{N}{mm^2}$



Diese Aufgabe ist digital auf Tablet gemacht.

④



$EI = 2{,}4 \cdot 10^4\, kNm^2$

$EA = \infty$

Stat. überbestimmtes System

$EI\, w^{(4)} = q$

$EI\, w''' = q x + C_1 \qquad = -Q(x)$

$EI\, w'' = \frac{1}{2} q x^2 + C_1 x + C_2 \qquad = -M(x)$

$EI\, w' = \frac{1}{6} q x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \qquad = -EI(x)\, \varphi(x)$

$EI\, w = \frac{1}{24} q x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \qquad =$ Durchbiegung

RB

$w(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$

$w'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$w(l) = 0 \rightarrow$ ~~[illegible] = 0~~ $\frac{1}{24} q \cdot l^4 + \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 = 0$

$w''(l) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} q l^2 + C_1 l + C_2 = 0 \qquad C_1 = \frac{-25q}{4} \qquad C_2 = \frac{25q}{2}$

~~[illegible] $\frac{lq}{3}$ [illegible] $= \frac{l^2 q}{6}$~~ ; ~~$C_1 = \frac{-20 \cdot q}{3}$~~ ; ~~$C_2 = \frac{50q}{3}$~~

~~$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24} q x^4 + \frac{2lq}{36} x^3 + \frac{l^2 q}{12} x^2\right)$~~

~~w_{max} bei $w'(x) = 0 \rightarrow x =$~~

TM 3 Klausur WS 17/18

~~$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24} q x^4 - \frac{20 \cdot q}{18} x^3 + \frac{50 \cdot q}{6} x^2\right)$~~

~~$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6} q x^3 - \frac{20 \cdot q}{6} x^2 + \frac{50 \cdot q}{3} x\right)$~~

~~wmax bei $w'(x) = 0$~~

~~$x =$~~

$$W(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24} q x^4 - \frac{25q}{24} x^3 + \frac{25q}{4} x^2\right) = \frac{q x^2}{EI}\left(\frac{1}{24} x^2 - \frac{25}{24} x + \frac{25}{4}\right)$$

$$W'(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6} q x^3 - \frac{25q}{8} x^2 + \frac{25q}{2} x\right)$$

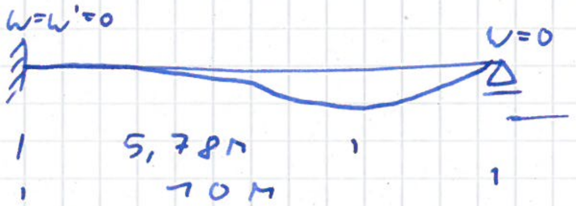
wmax bei $w'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5{,}78\,m$

$W(x = 5{,}78) =$ ~~$\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6} q \cdot 5{,}78^3\right.$~~ $-$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24} q\, 5{,}78^4 - \frac{25q}{24} 5{,}78^3 + \frac{25q}{4} 5{,}78^2\right) \overset{!}{\leq} \frac{10}{300}$$

$$\Rightarrow \quad q = 14{,}77\ kN/m^2$$

b)



$\frac{10m}{300} = 3{,}3\ cm$

c) Last q verringern

Geometrie des Querschnitts ändern

Anderes Material verwenden.

⑤

1) $a_1(t) = a_0 - \frac{a_0}{t_e 2} t$

$v_1(t) = a_0 t - \frac{a_0}{t_e 4} t^2 + C_1 \qquad ; C_1 = 0, \; v(0) = 0$

$V_1(t_e) = V_{e1} = a_0 t_e - \frac{a_0}{t_e 4} t_e^2$

$= a_0 t_e - \frac{1}{4} a_0 t_e$

$= \frac{3}{4} a_0 t_e$

$x_1(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 - \frac{a_0}{12 t_e} t^3 + C_2 \qquad ; C_2 = 0, \; x(0) = 0$

$x_1(t_e) = L \quad \rightarrow$ ~~t_e~~ $\frac{1}{2} a_0 t_e^2 - \frac{1}{12} a_0 t_e^2 = L = \frac{5}{12} a_0 t_e^2 = L$

$$t_e = \sqrt{\frac{12 L}{5 a_0}}$$

$$v_1(t_e) = a_0 \cdot \sqrt{\frac{12L}{5a_0}} - \frac{1}{4} a_0 \sqrt{\frac{12L}{5a_0}}$$

$$= \frac{3}{4} a_0 \sqrt{\frac{12L}{5a_0}}$$

$$= 1,16 \sqrt{\frac{L}{a_0}} \cdot a_0 \qquad ; \quad a_0 = \sqrt{a_0^2}$$

$$= 1,16 \sqrt{L \cdot a_0}$$

2) $a(x) = a_0 - \frac{a_0}{2 \cdot L} \cdot x$

$$v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2 \int_0^x a(x)\,dx} \qquad ; v_0 = 0$$

$$= \sqrt{2\left(a_0 x - \frac{a_0}{4 \cdot L} x^2\right)}$$

~~$v(t_e) = \sqrt{2\left(a_0\left(\sqrt{\frac{12L}{5a_0}}\right) - \frac{a_0}{4 \cdot L}\left(\sqrt{\frac{12L}{5a_0}}\right)^2\right)}$~~

$$v(L) = \sqrt{2\left(a_0 L - \frac{a_0}{4L} \cdot L^2\right)}$$

$$= \sqrt{2a_0 L - \frac{1}{2} a_0 L}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{\text{[illegible]}} a_0 L}$$

$\uparrow \frac{3}{2}$

b)

$a(v) = a_0 \frac{c_0}{c_0 + v} \qquad a_0 > 2 \frac{m}{s^2} \qquad c_0 = 250 \frac{m}{s}$

$$t(v) = \int_0^{\cancel{50}\,v} \frac{1}{a(v)}\,dv$$

$= \frac{v(v+500)}{1000} \Rightarrow v(t)$ ~~[illegible] 1000~~ $t \cdot 1000 : v^2 + 500v$

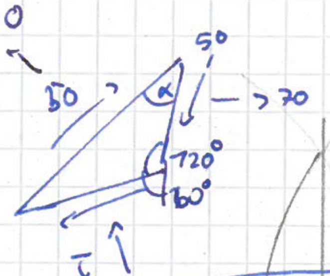
$t(v_e) = 27,5\ s. = \bar{t}_e$

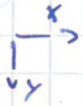
$v(t) = 10\left(\sqrt{5(2t+125)} - 25\right)$

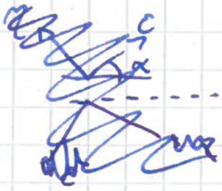
$x(t) = \frac{10}{3}\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{(2x+125)^3} - 25 \cdot (2x+125)\right)$

$x(\bar{t}_e) = 708,3\ m.$

①

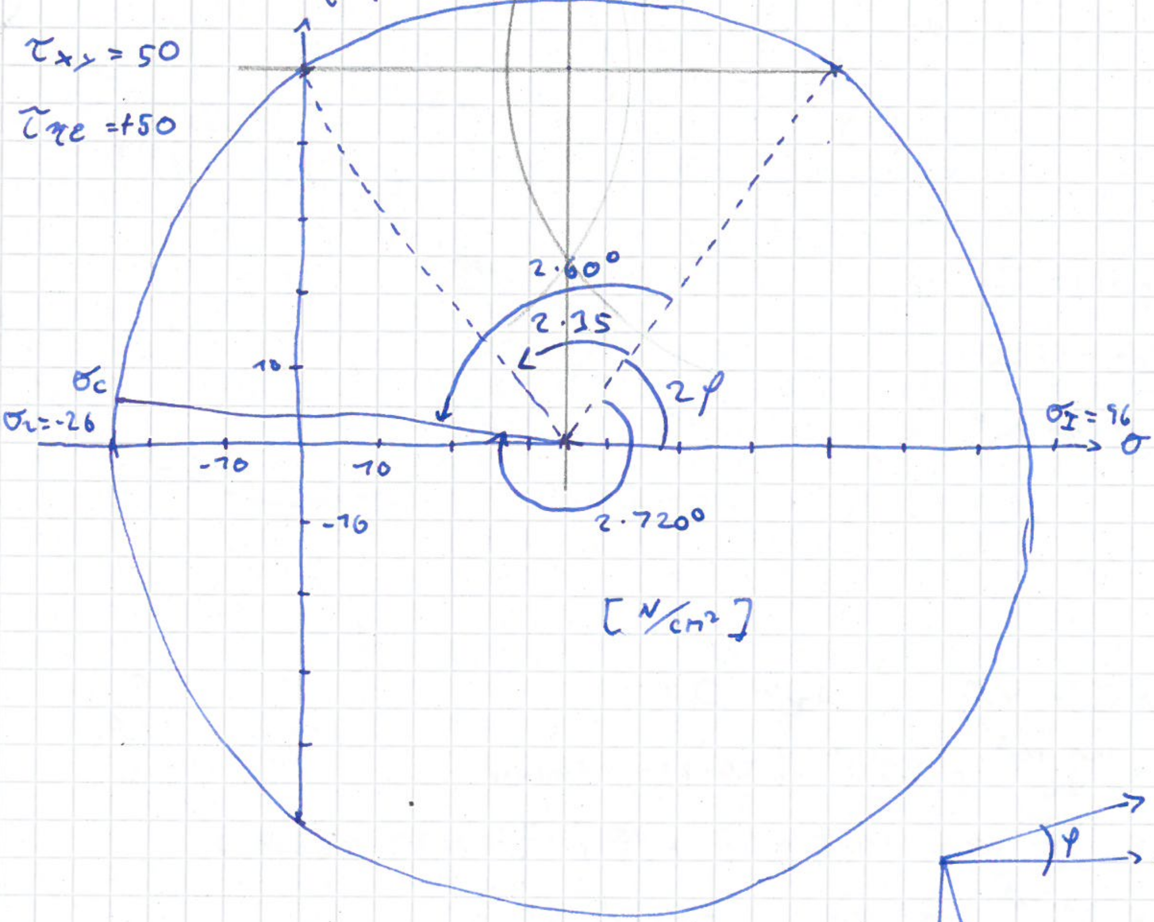


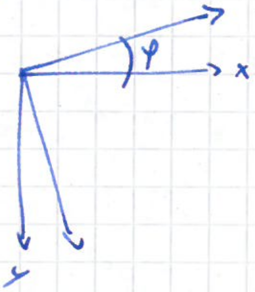




$\sigma_x = 70 \quad \tau_{xy} = 50$

$\sigma_\eta = 0 \quad \tau_{\eta\zeta} = +50$

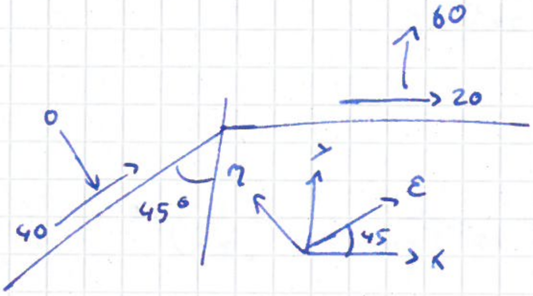




$\sigma_c = -25$

$\tau_c = 5$

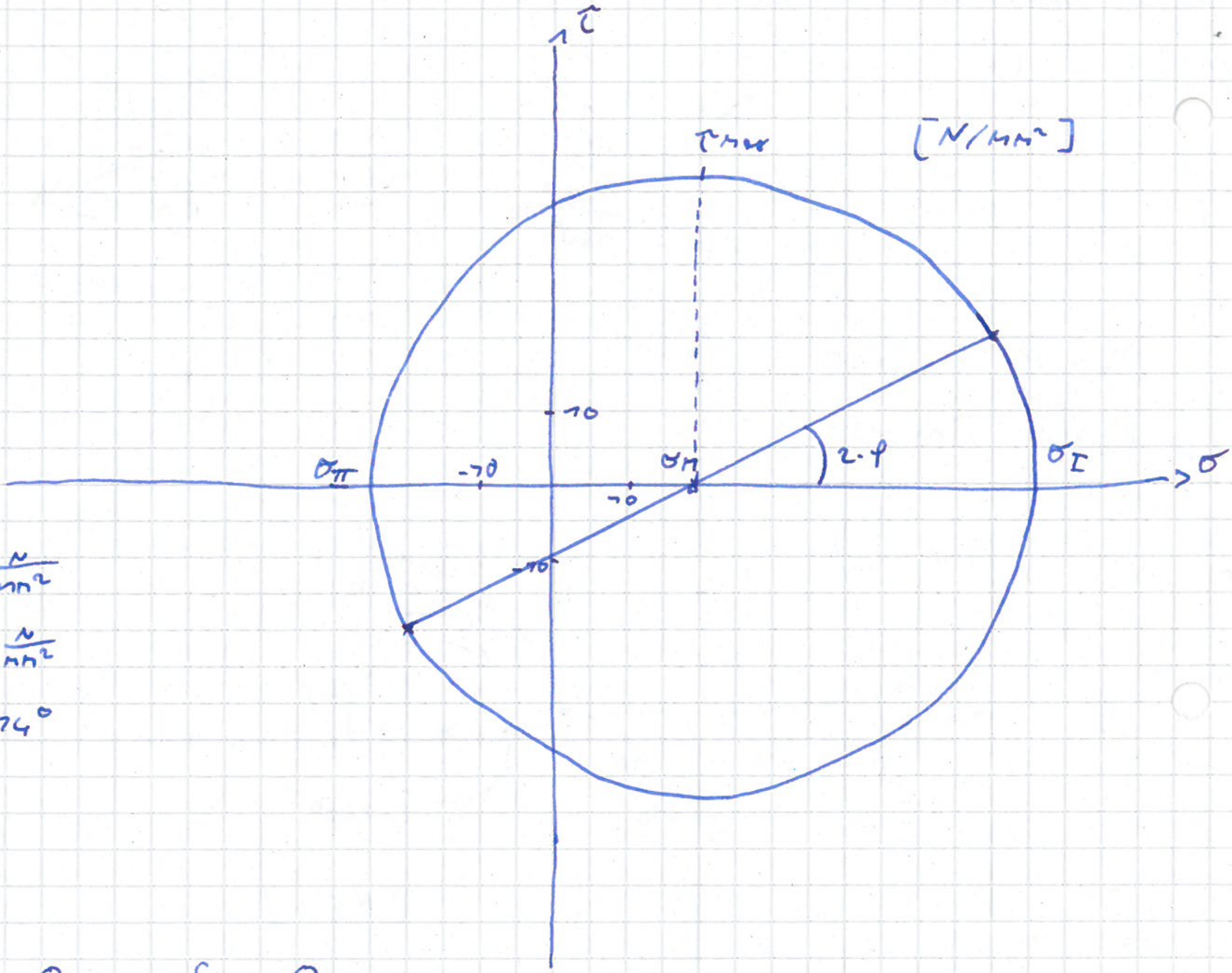
②



$\sigma_x = 60 \quad ; \quad \tau_{xy} = 20 = \tau_{yx}$

$\sigma_\eta = 0 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi) - \tau_{xy}\sin(2\varphi)$

$\sigma_y = -20$



$\sigma_I = 65 \frac{N}{mm^2}$

$\sigma_{II} = -25 \frac{N}{mm^2}$

$\varphi = 14°$

③

~~I: Iy~~ $S_y = 0$ $S_z = 0$

I: $I_y = \frac{20 \cdot 10^3}{36} + 23{,}3^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10 = 54844$

~~II~~ $I_z = \frac{20 \cdot 10}{36} (20^2 - 20 \cdot 0 + 0^2) + (\frac{20}{3})^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10 = 6666{,}7$

II: $I_y = \frac{20 \cdot 10^3}{12} + 15^2 \cdot 20 \cdot 10 = 46666{,}7$

$I_z = \frac{10 \cdot 20^3}{12} + 10^2 \cdot 20 \cdot 10 = 26666{,}7$

III $I_y = \frac{40 \cdot 40^3}{12} = 213333{,}3$

$I_z = \frac{40 \cdot 40^3}{12} = 213333{,}3$

IV $I_z = \frac{10^4}{72\pi} (9\pi^2 - 64) + \cdot (20 - \frac{4 \cdot 10}{3\pi})^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 10^2 = 40092{,}2$

$I_{zy} = \frac{\pi \cdot 10^4}{8} + 10^2 \cdot \frac{\pi}{2} 10^2 = 19634{,}9$

$I_y = 377085$

$I_z = 199873$

TM2 Repetetorium 2

①

b) System nicht statisch bestimmt -> Momentenverlauf ist nicht einfach ~~eindeutig~~ direkt
bestimmbar.
20 RB, vier je Teilsystem

a)
$U(x_1=0) = 0$
$W(x_1=0) = 0$
$w'(x_1=0) = 0$
$w(x_1=2l) = w(x_2=0) = U_4(x_4=0)$
$w'(x_1=2l) = w'(x_2=0)$
~~[illegible]~~)

$U_4(x_4=l) = W_5(x_5=0)$

$W_5(x_5=l) = 0$

$U_5(x_5=l) = 0$

$W_5''(x_5=l) = 0$

$W_4''(x_4=0) = 0$

$W_3(x_3=0) = 0$

$W_3''(x_3=0) = 0$

$W_2(x_2=2l) = 0$

$U_3(x_3=2l) = 0$

$W_5''(x_5=l) = 0$

$W_5''(x_5=0) = W_4''(x_4=l)$

$W_2''(x_2=2l) = W_3''(x_3=2l)$

$W_4'(x_4=l) = W_5'(x_5=0)$

$W_2'(x_2=2l) = W_3'(x_3=2l)$

$M_{cm} = c_m \cdot \phi = c_m \cdot W_2''(x_2=2l) = EI\, w_2''(x_2=2l) + EI\, w_3''(x_3=2l)$

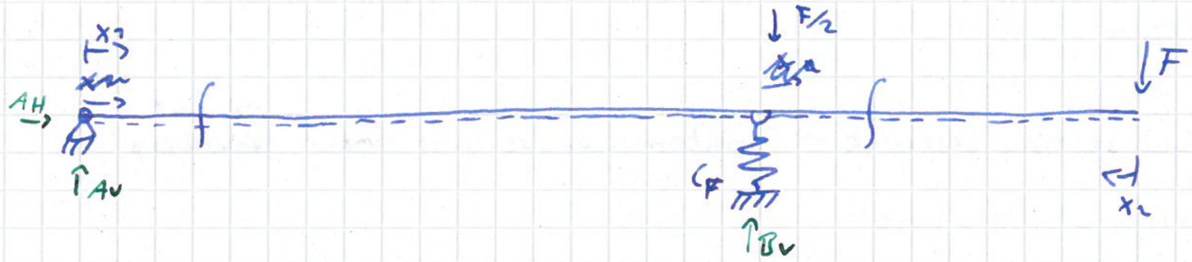
$W_3(x_3=2l) = U_2(x_2=2l)$

c) Momentenverlauf kann durch zweifaches ableiten der fertigen Biegeliniengleichung
erzeugt werden

②

2

a)



$A_H = 0$

~~[illegible]~~

~~$B_v = \frac{F}{2} + \frac{3F}{2} = 2F$~~

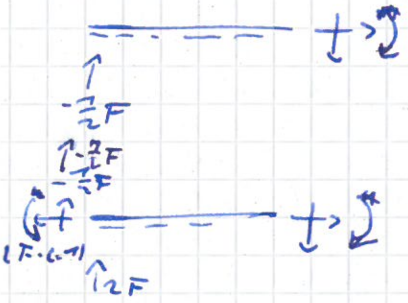
~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$\circlearrowleft \Sigma_{A}: B_v \cdot 2l - \frac{F}{2} 2l - F \cdot 3l = 0$

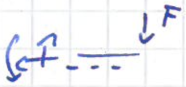
$B_v = 2F$

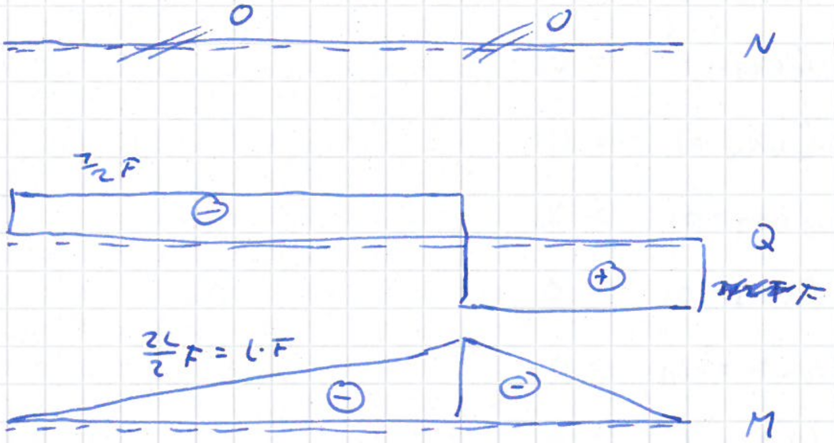
$\rightarrow A_v = -\frac{1}{2}F$



$\circlearrowleft \Sigma M_D: +lF - \frac{1}{2}F\,x = 0$

$M = -lF +$





b) $EI\,w'' = -M = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x_1$

$EI\,w' = \frac{1}{4} F x_1^2 + C_1$

$EI\,w = \frac{1}{12} F x_1^3 + C_1 x + C_2$

$EI\,w_1(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

~~[illegible]~~

~~$\frac{1}{12} x_1^3 (2l) + C_1 x_1 (2l) = \frac{l^3}{2EI} F$~~

~~$C_1 = \frac{(2EI - 3l) F l}{12 EI}$~~

$2F = c_F \cdot w_1(l)$

$= \frac{2EI}{l^3} \cdot \left(\frac{1}{12} F l^3 + C_1 l\right)$

$C_1 = \frac{Fl^2}{6}$

$EI\,w'' = -M = F \cdot x_2$

$EI\,w' = \frac{1}{2} F x_2^2 + C_3$

$EI\,w = \frac{1}{6} F x_2^3 + C_3 x_2 + C_4$

~~[illegible]~~

$w_2(l) = \frac{F_F}{c_F}$ $F_F = 2F$

$2F = c_F \cdot w_2(l)$

$= \frac{2EI}{l^3} \cdot \left(\frac{1}{6} F l^3 + C_3 l + C_4\right)$

$C_3 = \frac{-(6C_4 - 5Fl^3)}{6l}$

$w_1'(2l) = w_2'(l) \rightarrow C_3 = \frac{2Fl^2}{3}$

$C_4 = \frac{Fl^3}{6}$

TM2 Repetitorium 2

Biegelinien:

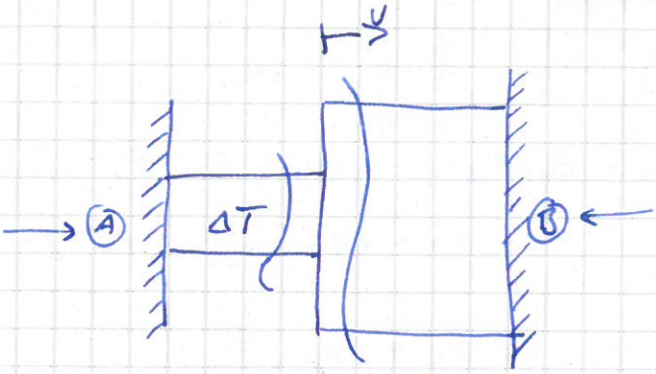
$$w_1(x_1) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{12} F x_1^3 + \frac{FL^2}{6} x_1\right)$$

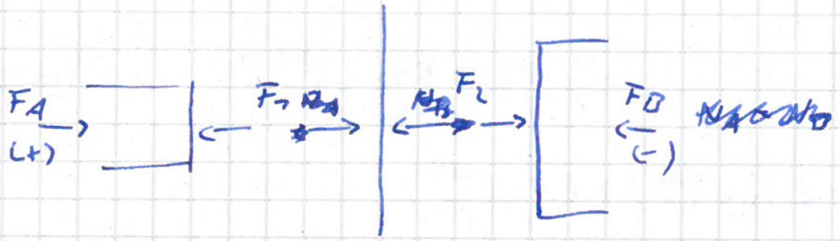
$$W_2(x_2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6} F x_2^2 + \frac{2FL^2}{3} x_2 + \frac{FL^3}{6}\right)$$

ϟ kein eigenes KS bilden!
Das aus Aufgabe muss genutzt werden.

③

a)





+Ausdehn

$FA = F_1$ $F_1 = F_2$ $F_2 = F_B$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta u}{L_1} = -\frac{F_1}{EA_1} + \alpha_T \Delta T \quad \rightarrow \quad F_1 = \left(-\frac{\Delta u}{L_1} + \alpha_T \Delta T\right) EA_1$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\Delta u}{L_2} = -\frac{F_2}{EA_2} \quad \rightarrow \quad F_2 = \left(+\frac{\Delta u}{L_1}\right) EA$$

-Quetsch

$$\left(-\frac{\Delta u}{L_1} + \alpha_T \Delta T\right) EA_1 = \left(+\frac{\Delta u}{L_2}\right) EA_2$$ Einsetzen

$\Delta u = 0{,}00004 \text{ m}$

$4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

$F_2 = 42 \text{ kN}$ ~~[illegible]~~

$F_1 = 42 \text{ kN} = F_A = F_B$

b)

$F_A = F_1$ $F_2 = F_1 + 10$ $F_2 = FA$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta u}{L_1} = -\frac{F_1}{EA_1} + \alpha_T \Delta T \quad \rightarrow \quad F_1 = EA_1\left(\alpha_T \Delta T - \frac{\Delta u}{L_1}\right)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\Delta u}{L_2} = -\frac{F_2}{EA_1} + \underbrace{\alpha_T \Delta T}_{=0}$$

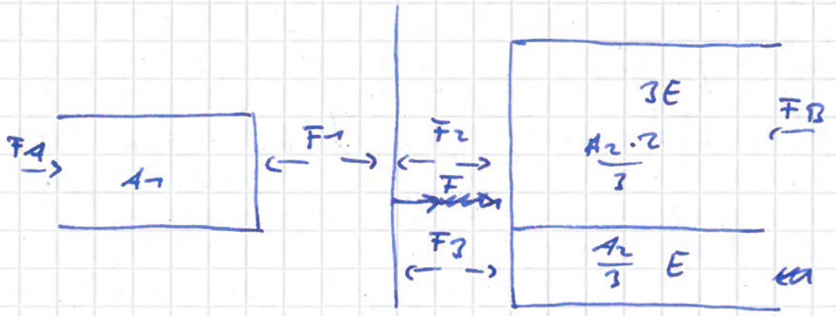
$$= -\frac{(F_1+10)}{EA_2} + \underbrace{\alpha_T \Delta T}_{=0} \quad \rightarrow \quad F_1 = EA_2\left(\frac{\Delta u}{L_2} - 10\right) \; ; F_2 = EA_2\left(\frac{\Delta u}{L_2}\right)$$

~~[illegible]~~ $F_2 = F_1 + 10$

~~[illegible] 0,00004~~ $\Delta u = 4{,}635 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

$F_1 = 38{,}67$ $F_2 = 48{,}67 = FA = F_B - 10$

c)



$F_A = F_1$ $\quad F_1 + 10 = F_2 + F_3$ $\quad F_B = F_2 + F_3$

$\varepsilon_1 = \frac{\Delta u}{l_1} = -\frac{F_1}{EA_1} + \alpha_T \Delta T$ $\quad \rightarrow F_1 = EA_1\left(-\frac{\Delta u}{l_1} + \alpha_T \Delta T\right)$

$\varepsilon_2 = -\frac{\Delta u}{l_2} = -\frac{F_2}{EA_2}$ $\quad \rightarrow F_2 = EA_2\left(\frac{\Delta u}{l_2}\right)$

$\varepsilon_3 = -\frac{\Delta u}{l_3} = -\frac{F_3}{EA_3}$ $\quad \rightarrow F_3 = EA_3\left(\frac{\Delta u}{l_2}\right)$ $\quad (l_2 = l_3)$

$EA_1\left(-\frac{\Delta u}{l_1} + \alpha_T \Delta T\right) + 10 = EA_2\left(\frac{\Delta u}{l_2}\right) + EA_3\left(\frac{\Delta u}{l_2}\right)$

$\Delta u = 2{,}459 \cdot 10^{-5}$ m

$F_1 = F_A = 50{,}12$ kN

$F_2 = +51{,}53$ kN

$F_3 = 8{,}59$ kN $\quad \rightarrow F_B = 60{,}12$ kN

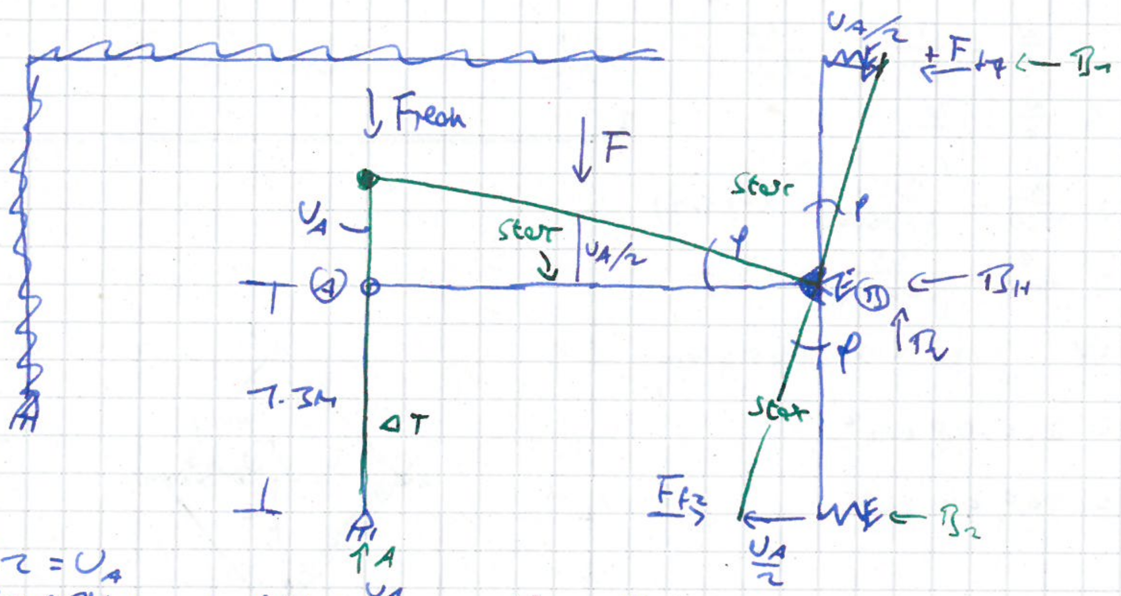
$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = 5{,}0120$ $\frac{kN}{m^2}$

$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = 25765$ $\frac{kN}{m^2}$

$\sigma_3 = \frac{F_3}{A_3} = 8590$ $\frac{kN}{m^2}$

TM 2 Repetetorium 2

④



$B_1 = -B_2$

$\varphi \cdot 2 = U_A$

; $\varphi \cdot 1 = \frac{U_A}{2}$ $\quad F_{f1} = -F_{f2}$

$+B_1 \cdot l$

$\curvearrowleft \sum M_B :$ $+F - A \cdot 2l + B_1 \cdot l - B_2 \cdot L + Fl = 0$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2} B_1 - \frac{1}{2} B_2 + \frac{1}{2} F$

$A = \frac{1}{2} C_F \cdot \frac{U_A}{2} + \frac{1}{2} C_F \frac{U_A}{2} + \frac{1}{2} F$

$A = C_F \frac{U_A}{2} \mp \frac{1}{2} F$

$F_1 = A = -5 \cdot 10^3 U_A \mp 5 \cdot 10^3$

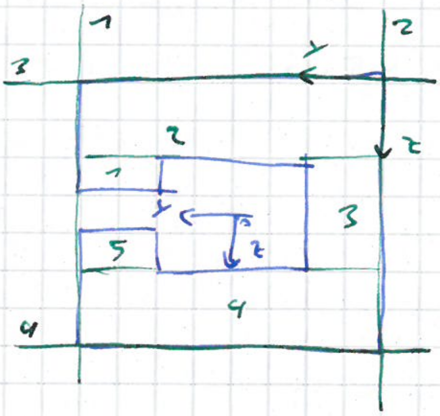
$U_A = \frac{N}{EA} l + \alpha_T \Delta T l$

$= 0{,}92 \text{ mm}$

③

a) Schwerpunkt $S_z = 0$

$S_y = \sum \frac{A_i y_i}{A_i}$



$= -0{,}6$

Von der oberen rechten Ecke

$S_z = 22{,}5$

$S_y = 19{,}4$

b) $\sigma(y,z) = 0 = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \overset{=0}{\cancel{\frac{M_z}{I_z} y}}$

$-3 \frac{N}{mm^2} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z$

$-0,3 = \frac{N}{1250} + \frac{M_y}{277604} \cdot (-22,5)$

$0,2 = \frac{N}{1250} + \frac{M_y}{277604} \cdot 22,5$

$N = -62,5 \; kN \qquad M_y = 30,845 \; kNm$

c) $i_y^2 = \frac{I_y}{A} = 222,08 \; cm^2$

$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = 168,97 \; cm^2$

~~14,466~~ $\frac{i_z^2}{y_{0,1}}$

1: $y_{0,1} = 20,6 \; cm \qquad z_{0,1} = \infty$

$y_{F,1} = -8,2 \; cm \qquad z_{F,1} = 0$

2: $y_{0,2} = -19,4 \; cm \qquad z_{0,2} = \infty$

$y_{F,2} = +8,7 \; cm \qquad z_{F,2} = 0$

3: $y_{0,3} = \infty \qquad z_{0,3} = -22,5 \; cm$

$y_{F,3} = 0 \qquad z_{F,3} = 9,87 \; cm$

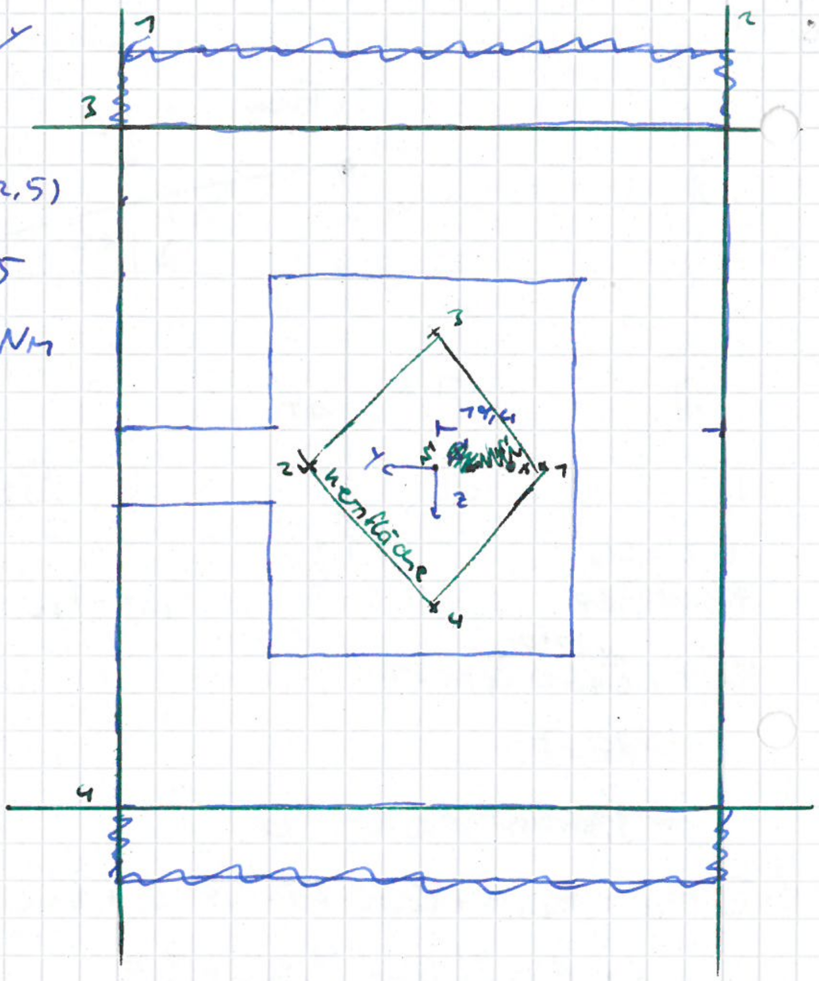
4: $y_{0,4} = \infty \qquad z_{0,4} = 22,5 \; cm$

$y_{F,4} = 0 \qquad z_{F,4} = -9,87 \; cm$

d) $0 = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \overset{=0}{\cancel{\frac{M_z}{I_z} y}}$

$0 = \frac{-62,5}{A} + \frac{30,845}{I_y} z$

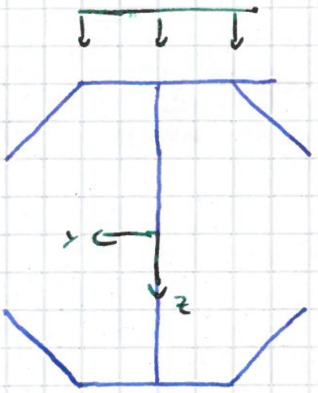
$z = 4,5 \; cm$



TM2 Repetetorium 3

①

a)

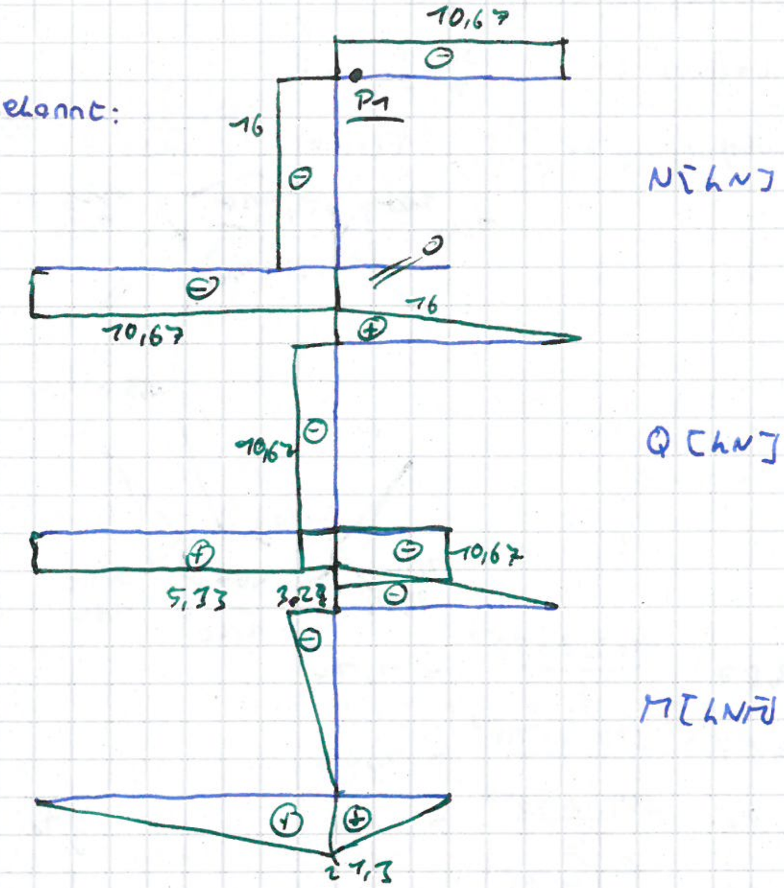


$A = 11525\,mm^2$

$I_y = 1{,}97 \cdot 10^8\,mm^4$

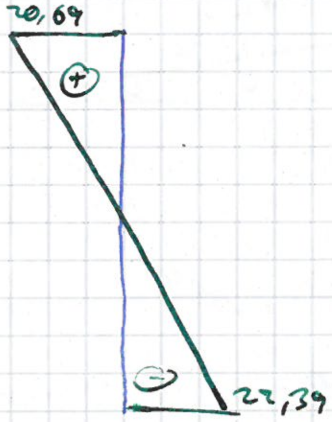
kein Moment um z-Achse

SG bekannt:

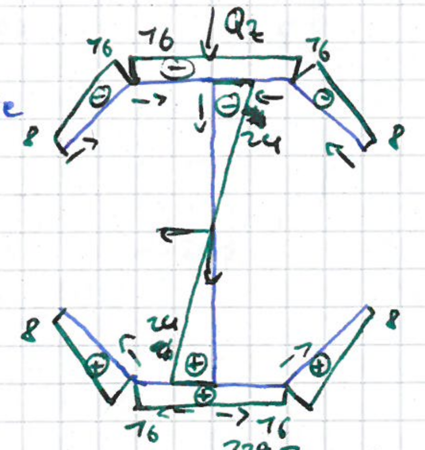


$$\sigma_x(z) = \frac{-10{,}67 \cdot 1000}{11525} + \frac{-3{,}2 \cdot 1000 \cdot 1000}{1{,}97 \cdot 10^8}\, z$$

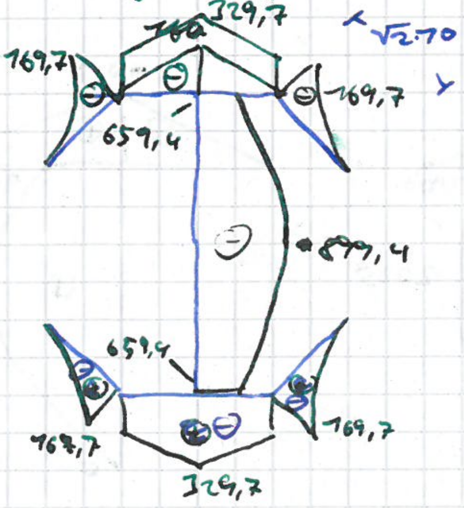
$$= -0{,}1077 \cdot z \mp 0{,}8519\, z$$



b)
Z-h-Linie

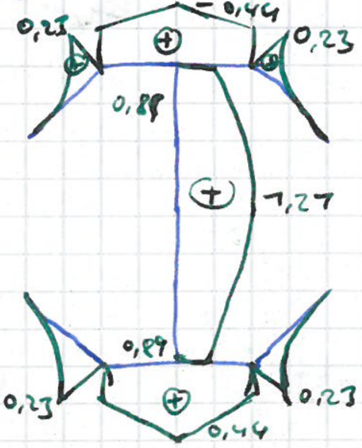


stat. Moment



$$\int_0^x -24 + \frac{24\,x}{20}\,dx = 0{,}6\,x\,(x-40) + 2 \cdot 329{,}7$$

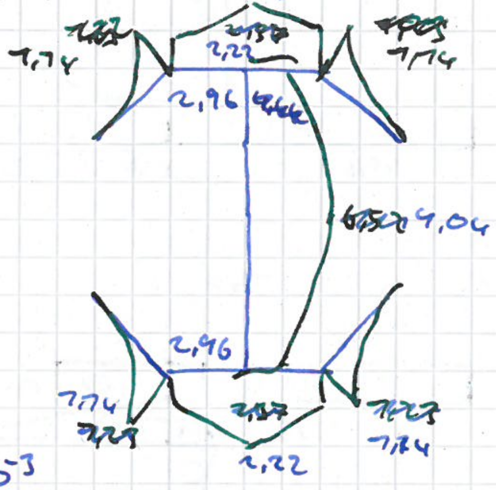
Schubfluss:



Statisches Moment in [cm³]

Schubfluss in [N/cm]

Schubspannung in N/cm² $\tau(s) = -\frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot h(s)} = \frac{20 \cdot 1000 \cdot 20 \cdot 400 \cdot 100}{2,47 \cdot 10^8} \cdot \frac{S_y}{h(s)}$ $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$



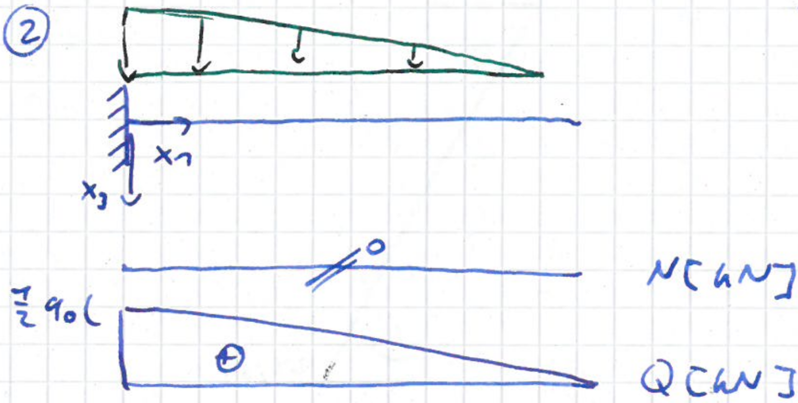
$53,87 \cdot \frac{169,7 \cdot 10^{-3}}{8} = 1,14$

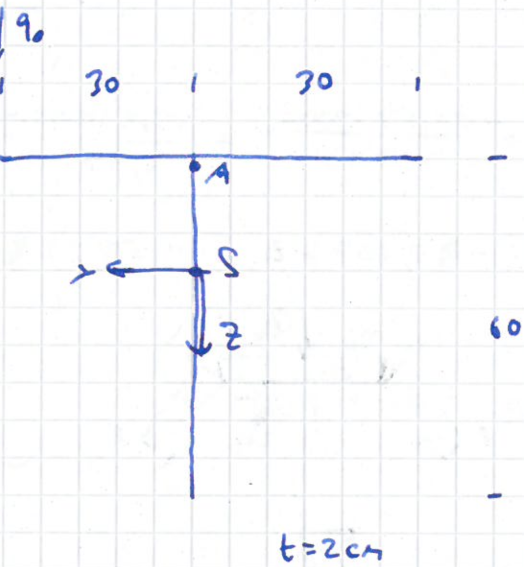
$53,87 \cdot \frac{327,7 \cdot 10^{-3}}{8} = 2,22$

$53,87 \cdot \frac{659,4 \cdot 10^{-3}}{12} = 2,96$

$53,87 \cdot \frac{899,4 \cdot 10^{-3}}{12} = 4,04$

②



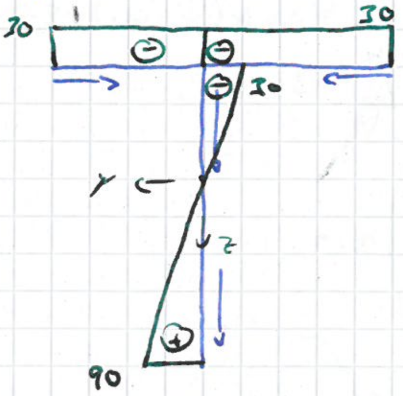


$Q_z = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l = 20$ kN

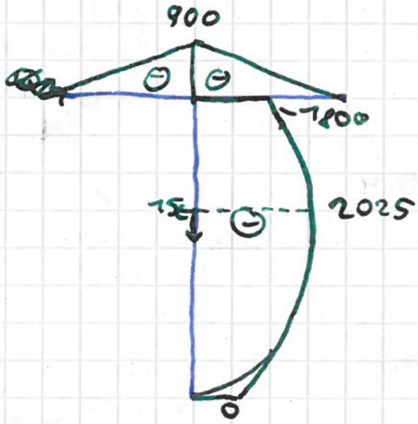
$S_z = 15$ cm

$S_y = 0$ cm $\boxed{\text{Im } Sp}$

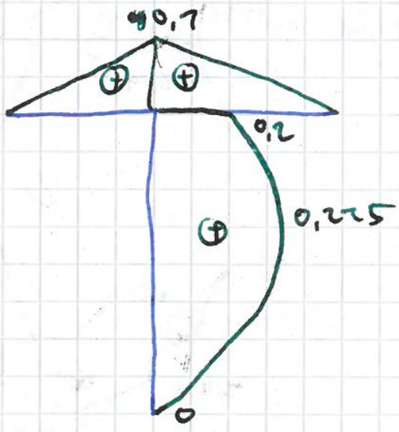
$I_y = 90\,000$ cm⁴



z-h-Linie [cm²]



$S_y(z)$ [cm³]



$\tau(s)$ $\left[\frac{kN}{cm^2}\right]$

TM 2 Repetitorium 3 $\boxed{3}$

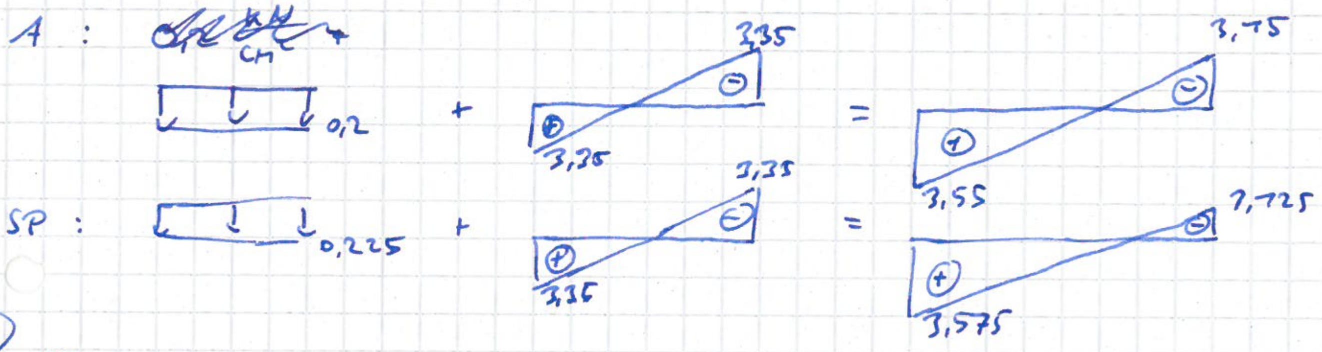
~~Spannungsverlauf bei Punkt A: (Schubspannung infolge Moment [illegible])~~
Schubspannung infolge Torsion, Dünnwandiges; offees Profil T

$$I_T = \frac{1}{3} \cdot 1{,}12 \cdot (2^3 \cdot 60 + 2^3 \cdot 60) = 358{,}4 \text{ cm}^4$$

$$M_T = Q_z \cdot 30 \text{ cm} = 600 \text{ kNcm}$$

$$\tau = \frac{M_T}{I_T} t_i = 3{,}35 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Belastung an den Stellen A und SP:



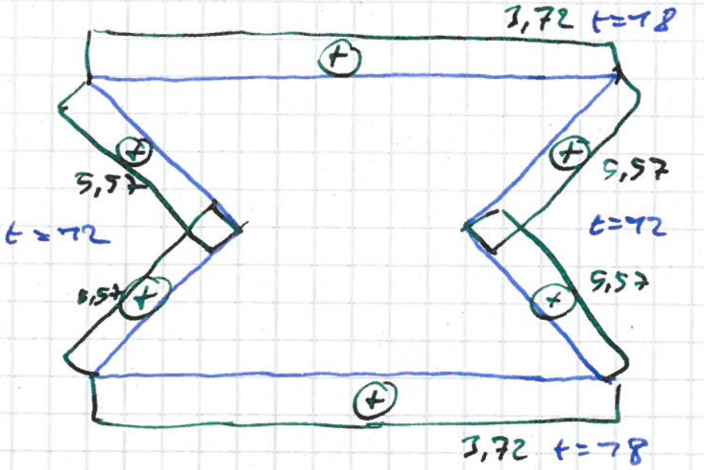
③

a) $Q_z = 0$

$$M_T = 6{,}5 \text{ kNm} = 6{,}5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

$$A_m = 90 \cdot 360 + 90 \cdot 180 = 48600 \text{ mm}^2$$

$$\tau = \frac{M_T}{2A_m} \cdot \frac{1}{t} = 66{,}87 \cdot \frac{1}{t} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$$



[MPa]

Gegenseitige Verdrehung

b) $G = 0{,}81 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

$$I_T = \frac{4 A_m^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{t_i}} = 4 \cdot 48600^2 \cdot \left(1 \Big/ \left(\frac{360}{18} \cdot 2 + \frac{\sqrt{2} \cdot 90}{12} \cdot 4 \right) \right)$$

$$= 1{,}146 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

$$\vartheta = \frac{M_T}{G I_T} = 7{,}002 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$$

$$\varphi = \int_0^{4500} \vartheta \, dx = 3{,}151 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0{,}1805^\circ$$

TM2 Übungsblatt 7 $\overline{ET}$

= MUSS auf Formelsammlung!

① Aufgeschrumpfter Kreisring

a) Kreisring als geraden Stab mit $L = 2\pi \cdot (r - \delta)$

Stoffgesetze: $\sigma = E \cdot \varepsilon$; $\underline{\underline{\sigma = E(\varepsilon - \alpha_T \Delta T)}}$

Elastizitätsgesetz: $\underline{\underline{\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T}}$

$\underline{\underline{\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \alpha_T \Delta T l}}$ $\Delta r = \delta$

$A = b \cdot t$

$\Delta T = \frac{\varepsilon - \frac{\sigma}{E}}{\alpha_T}$ Es wirken (noch) keine Kräfte auf den Ring.

$\Delta T = \frac{\varepsilon}{\alpha_T}$ $\underline{\underline{\text{Bei gleichmäßiger Dehnung: } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}}}$

$\Delta T = \frac{\Delta l}{l \alpha_T}$

$\Delta T = \frac{2\pi \cdot \delta}{2\pi(r-\delta)\alpha_T}$ weil $\delta \ll r$: $2\pi(r-\delta) \approx 2\pi r$

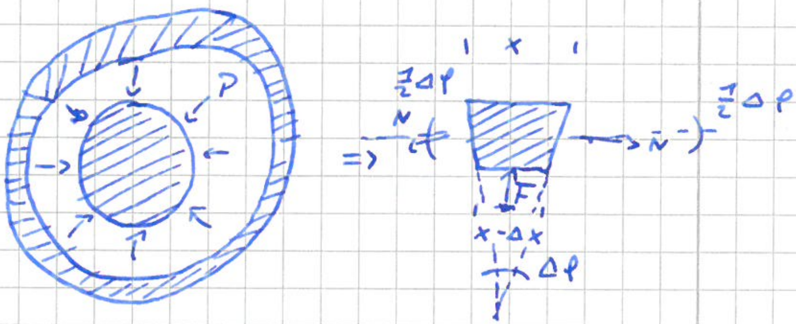
$\Delta T = \frac{\delta}{r \alpha_T}$

b) $\sigma = E(\varepsilon - \alpha_T \Delta T)$

$= E\left(\frac{2\pi\delta}{2\pi r} - \alpha_T \Delta T\right)$ =0

$= E \frac{\delta}{r}$

c) Anpressdruck p :



$\uparrow + \sum$: $F_p - 2 \cdot N \cdot \sin(\frac{1}{2}\Delta\varphi) = 0$

$N = \sigma \cdot A = b \cdot t \cdot \sigma = E \frac{\delta}{r} \cdot b \cdot t$

$F_p = 2 \cdot E \cdot \frac{\delta}{r} \cdot b \cdot t \cdot \sin(\frac{1}{2}\Delta\varphi)$

$F_p = p \cdot \sin(\Delta\varphi) \cdot r \cdot b$ weil Δφ sehr klein: $\sin(\Delta\varphi) = \Delta\varphi$

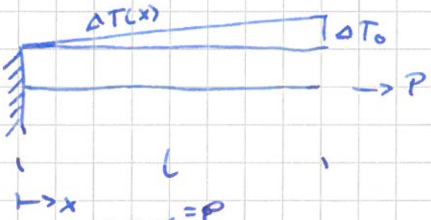
$p \cancel{\sin \Delta\varphi} \cdot r \cdot \cancel{b} = 2E \frac{\delta}{r} \cancel{b} t \cdot \frac{1}{2} \cancel{\Delta\varphi}$

$p r = E \frac{\delta}{r} t$

$p = E \frac{\delta}{r^2} t$

②

a)



~~$u = \int_L \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T\, l$~~ $=P$

~~$u = \alpha_T \Delta T(x)\, l$~~

$\Delta T(x) = \Delta T_0 \cdot \frac{x}{L}$

~~$u(x) = \alpha_T \Delta T_0\, x$~~

~~$\Delta l = \frac{P}{EA}\, l + \alpha_T \Delta T_0\, x$~~

$u(x) = \int_L \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T_0 \cdot \frac{x}{L}\, dL$ L ist hier x

$u(x) = \frac{P}{EA}\, x + \alpha_T \Delta T_0 \cdot \frac{x^2}{2L} + C$

$u(0) = 0 \rightarrow C = 0$ (weil bei $x=0$ eine feste Einspannung ist)

b) $\Delta L = u(x=L)$

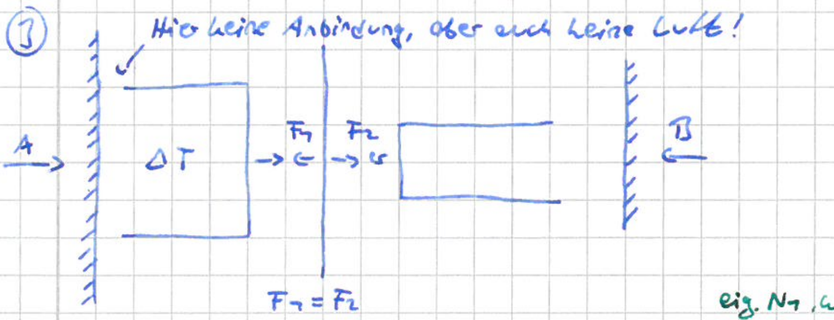
$= \frac{P}{EA} \cdot L + \alpha_T \Delta T_0 \cdot \frac{L^2}{2L} + 0$

$= \frac{P}{EA} L + \alpha_T + \Delta T_0 \frac{L}{2}$

c) $\Delta l = 0$

$\rightarrow P = \frac{-A \cdot \alpha_T \cdot E \cdot L \cdot \Delta T_0}{2}$

③



$F_1 = F_2$

eig. N_1, weil Normalkraft

$F_1 = \sigma_1 \cdot A_1$ $A = B = -F_1$

$F_2 = \sigma_2 \cdot A_2$

$\sigma_1 = E(\varepsilon - \alpha_T \Delta T) = \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T$

Dehnung in Stäben ist überall gleichmäßig $\rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1}$

$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{l_2}$

Gesamte Längenänderung $\Delta l_{ges} = 0 = \Delta l_1 + \Delta l_2 \rightarrow \Delta l_1 = -\Delta l_2$

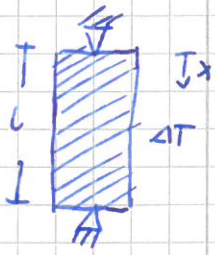
$l_1 = l_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = -\varepsilon_2$

$\Rightarrow \frac{N}{EA_1} + \alpha_T \Delta T = -\frac{N}{EA_2} + \alpha_T \overset{=0}{\Delta T}$

$N =$ ~~$\frac{A \cdot \alpha_T \cdot E \cdot \Delta T}{A + \alpha_T}$~~ $= \frac{-A_1 \cdot \alpha_T \cdot \cdot A_2 \cdot E \cdot \Delta T}{A_1 + A_2}$

TM 2 Übungsblatt 2

① Stab mit Eigengewicht



a) $\Delta T(x) = 5k = \text{konst.}$

$\underline{\underline{EA \quad = \text{konst}}}.$ $\quad$ -> 1.20 b aus Buch anwenden

$\underline{\underline{EA\,u''(x) = -n(x) + EA\,\alpha_T \underbrace{\Delta T'}_{=0}}}$

$$n(x) = \frac{G}{l} = \frac{\rho \cdot g \cdot A \cdot l}{l} = \rho \cdot g \cdot A$$

$$EA\,u''(x) = -\rho g A$$

$$u''(x) = -\frac{1}{E}\rho \cdot g$$

$$u'(x) = -\frac{1}{E}\rho g\,x + C_1$$

$$u(x) = -\frac{1}{2E}\rho g\,x^2 + C_1 x + C_2$$

Randbedingungen: $u(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$u(l) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{g \cdot l \cdot \rho}{2E}$

$$u(x) = -\frac{1}{2E}\rho g x^2 + \frac{g l \rho}{2E} x = \frac{\rho g}{2E}\left(-x^2 + l x\right)$$

$$u(x) = 5 \cdot 10^{-9}\left(-x^2 + 1m \cdot x\right)$$

b) $\underline{\underline{\varepsilon(x) = u'(x)}}$

$\underline{\underline{\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} + \alpha_T \Delta T(x)}}$ $\quad \Bigg\}\; u'(x) = \frac{N(x)}{EA} + \alpha_T \Delta T(x)$

$\underline{\underline{\sigma(x) = \frac{N(x)}{A}}}$

$$\rightarrow N(x) = (u'(x) - \alpha_T \Delta T(x)) \cdot EA$$

$$u'(x) = -\frac{\rho g}{E} x + \frac{g l \rho}{2E}$$

$$= \frac{\rho g}{E}\left(-x + \frac{l}{2}\right)$$

$$N(x) = \left(\frac{\rho g}{E}\left(-x + \frac{l}{2}\right) - \alpha_T \Delta T(x)\right) \cdot EA$$

$$= \left(\frac{0{,}1}{10^7}\left(-x + \frac{1M}{2}\right) - 10^{-6}\,5\right) 10^7 \cdot 1 \qquad 1m = 100\text{ cm}$$

$$= +0{,}1N \cdot (-x - 450N)$$

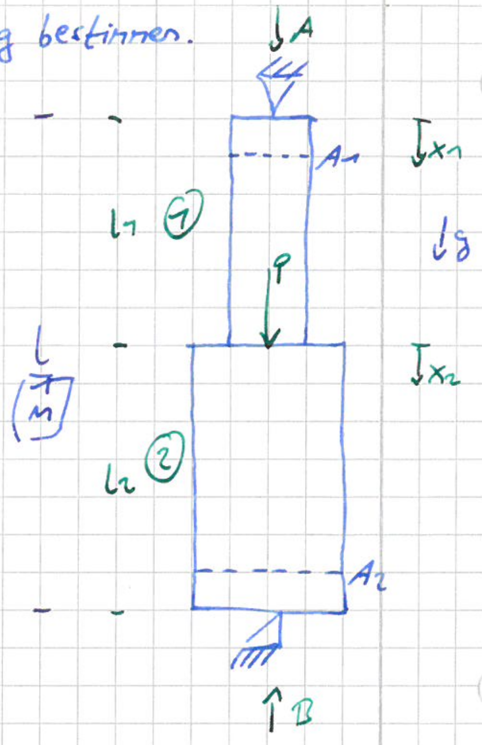
$N(0) = -45N \qquad N(l) = -55N$

c) Oberes Lager kraftfrei bei $N(0) = 0$

$$\rightarrow \Delta T = \frac{-g \cdot \rho \cdot (2x - l)}{2\alpha_T E} = 0{,}5\,k$$

② Stat. unbestimmt gelagert und ungleichmäßig gedehnt

→ Verschiebungsfunktion mit Hauptdiffgleichung bestimmen.



Stabteil 1:

$EA_1 u_1''(x_1) = -n_1(x_1) + E_1 A_1 \alpha_{T_1} \Delta T_1'(x_1)$

Eigengewicht $n_1(x_1) = \frac{G}{l_1} = g \cdot A_1 \cdot \rho$

Temp konst. $\Delta T_1'(x_1) = 0$

$EA_1 u''(x_1) = -\rho \cdot g \cdot A_1$

$u_1''(x_1) = -\frac{1}{EA_1} \rho g A_1$

$u_1'(x_1) = -\frac{1}{EA_1} \rho g A_1 x_1 + C_1$

$u_1(x_1) = -\frac{1}{E\cancel{A_1}} \rho g \cancel{A_1} \frac{1}{2} x_1^2 + C_1 x_1 + C_2$

Stabteil 2:

$EA_2 u''(x_2) = -n_2(x_2) + E_2 A_2 \alpha_{T_2} \Delta T_2'(x_2)$

$A_2 = 2A_1 \quad ; \quad \Delta T'(x_2) = 0$

Eigengewicht $n_2(x_2) = \frac{G}{l_2} = g \cdot A_2 \cdot \rho = 2 g A_1 \rho$

$2EA_2 u''(x_2) = -2 g \rho A_1$

$u_2''(x_2) = -\frac{1}{EA_2} g \rho A_1$

$u_2'(x_2) = -\frac{1}{EA_1} g \rho A_1 x_2 + C_3$

$u_2(x_2) = \frac{\cancel{-1}}{2E\cancel{A_1}} g \rho \cancel{A_1} x_2^2 + C_3 x + C_4$

Randbedingungen (geometrisch)

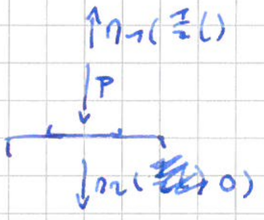
$u_1(0) \overset{!}{=} 0 \rightarrow C_2 = 0$

$u_2(\frac{1}{2}l) = 0 \rightarrow -\frac{g\rho \cancel{A_1}}{2E} \cdot (\frac{1}{2}l)^2 + C_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot l + C_4 = 0$

$u_1(\frac{1}{2}l) = u_2(0) \quad -\frac{\rho \cdot g}{2E} \cdot (\frac{1}{2}l)^2 + C_1 \frac{1}{2} l + C_2 = C_4$

Randbedingungen (statisch)

$N_2(0) + P - N_1(\frac{1}{2}l) = 0 \quad (I)$



$\varepsilon = u' \quad ; \quad \varepsilon = \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T$

→ $u' = \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T \longrightarrow N = EA(u' - \alpha_T \Delta T)$

$N_1(x_1) = EA_1 (u_1'(x_1) - \alpha_T \Delta T)$

$N_2(x_2) = EA_2 (u_2'(x_2) - \alpha_T \Delta T)$

TM 2 Übungsblatt 2

$$N_1(\tfrac{1}{2}l) = EA_1\left(\left(\frac{1}{EA_1}\rho\cdot g\cdot A_1\cdot\frac{1}{2}l + C_1\right) - \alpha_T\Delta T\right)$$

$$= \frac{1}{2}\rho g A_1 l + EA_1 C_1 - EA_1\alpha_T\Delta T \qquad (II)$$

$$N_2(0) = EA_2(C_3 - \alpha_T\Delta T)$$

$$= 2EA_1C_3 - 2EA\alpha_T\Delta T \qquad (III)$$

(II) und (III) in (I) einsetzen.

$$2EA_1C_3 - 2EA_1\alpha_T\Delta T + P - \frac{1}{2}\rho g A_1 l - EA_1C_1 + EA_1\alpha_T\Delta T = 0$$

$$2EA_1C_3 - EA_1\alpha_T\Delta T + P - \frac{1}{2}\rho g A_1 l - EAC_1 = 0$$

$$2C_3 - \alpha_T\Delta T + \frac{P}{EA_1} - \frac{\rho g l}{2E} - C_1 = 0 \qquad (IV)$$

Vier Gleichungen:

1. $C_2 = 0$
2. $-\frac{g\rho}{2E}\cdot(\frac{1}{2}l)^2 + \frac{1}{2}C_3 l + C_4 = 0$
3. $-\frac{g\rho}{2E}\cdot(\frac{1}{2}l)^2 + \frac{1}{2}C_1 l + \cancel{C_2}^{=0} = 0 = C_4$
4. $C_3 - \alpha_T\Delta T + \frac{P}{EA_1} - \frac{\rho g l}{2E} - C_1 = 0$

$$C_1 = \frac{-A_1E\alpha_T\Delta T + P}{2A_1E}$$

$$C_3 = \frac{AE\alpha_T\Delta T + A_1gl\rho - P}{2AE}$$

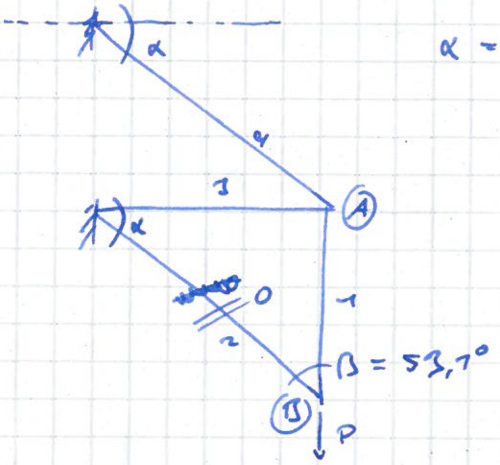
$$C_4 = \frac{-l(2AE\alpha_T\Delta T + A_1gl\rho - 2\cdot P)}{8AE}$$

$$C_2 = 0$$

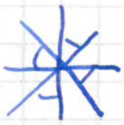
TM2 Übung 3

$\boxed{1}$

①.

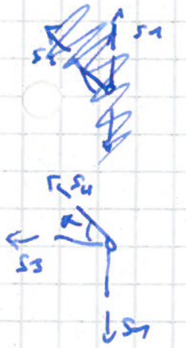


$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3a/4}{a}\right) = 36,9°$



ges: Δu_B

Stabkräfte :



[illegible]

$S_1 = P \quad S_2 = 0$

$\Sigma V = 0: \; S_1 = S_4 \cdot \sin(\alpha) \qquad \Sigma H = 0: \; S_3 = -S_4 \cdot \cos(\alpha)$

$S_4 = 1,67\,P \qquad S_3 = -1,34\,P$

Spannungen :

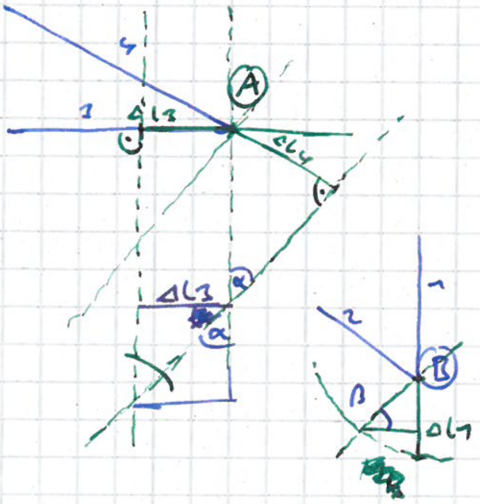
$\sigma_1 = \frac{P}{A} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\frac{1,34P}{A} \quad \sigma_4 = \frac{1,67P}{A}$

Dehnungen :

$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad \varepsilon_2 = 0 \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} \quad \varepsilon_4 = \frac{\sigma_4}{E}$

$\Delta u_1 = \varepsilon_1 l = \frac{P}{AE} \cdot \frac{3}{4} a \quad \Delta u_2 = \varepsilon_2 l = 0 \quad \Delta u_3 = \varepsilon_3 l = -\frac{1,34P}{AE} \cdot a \quad \Delta u_4 = \varepsilon_4 l = \frac{5}{4} a \cdot \frac{1,67P}{AE}$

Verschiebung :



$v_A = \left|\frac{\Delta l_4}{\sin(\alpha)}\right| + \left|\frac{\Delta l_1}{\sin(\alpha)}\right|$

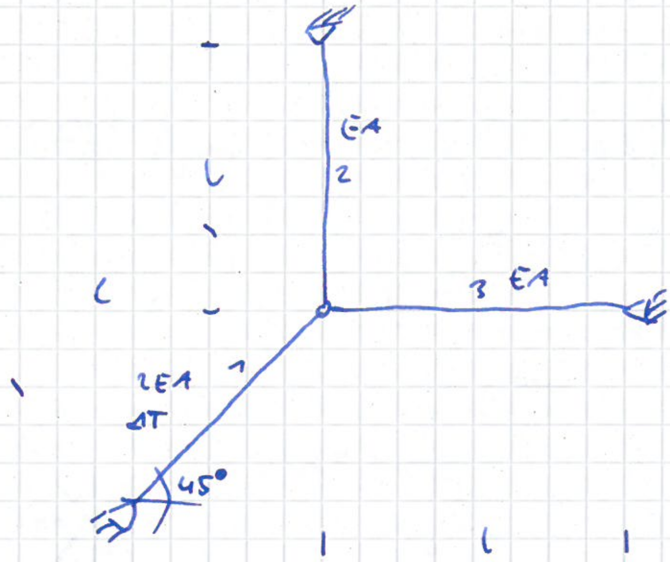
$= 5,71 \frac{aP}{EA}$

Hier Fehler in der Lösung?

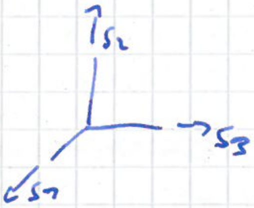
$v_B = v_A + \Delta l_1 = \frac{6,46\,aP}{EA}$

$u_B = ~~[illegible]~~ = \frac{v_B}{\tan(\beta)} = \frac{4,85\,Pa}{EA}$

②



$\Delta l_1 = \alpha_T \Delta T l$



$\varepsilon_1 = \frac{N^{\to S_1}}{2EA} + \alpha_T \Delta T$ $\qquad S_2 = S_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} S_1$

$\varepsilon_2 = \frac{N^{\to S_2}}{EA}$

$\varepsilon_3 = \frac{N^{\to S_1}}{EA}$

Verschiebung

$-\Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Delta l_2 = \Delta l_3$

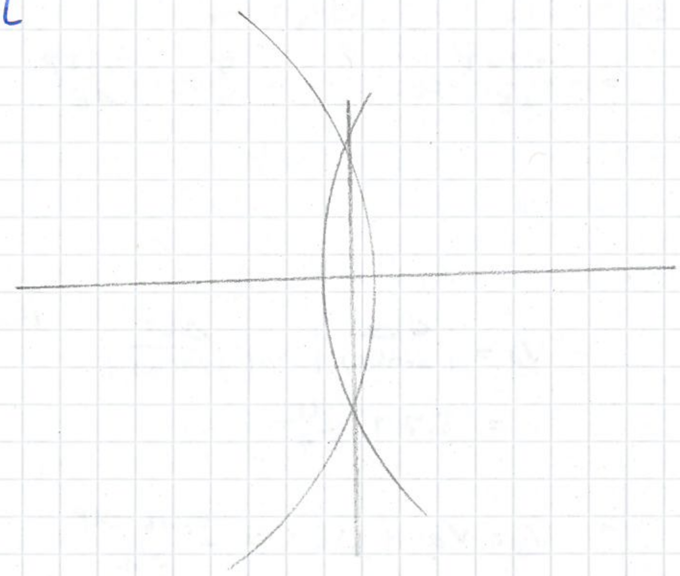
Einsetzen

$\left(-\frac{1/\sqrt{2}\, S_1}{EA}\right) l = \left(\frac{S_1}{2EA} + \alpha_T \Delta T\right) \cdot l \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$S_1 = \frac{-2 EA \alpha_T \Delta T}{3}$ $\qquad S_2 = S_3 = \frac{-2EA \alpha_T \Delta T \sqrt{2}}{3}$

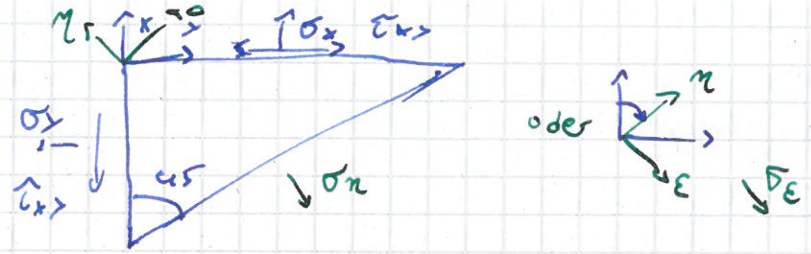
$\Delta l_1 = \left(\frac{S_1}{2EA} + \alpha_T \Delta T\right) l$

$= \frac{2 l \cdot \alpha_T \Delta T}{3}$



TM2 Übung 4

①



a) $\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\cdot\tau_{xy}^2}$

$\sigma_{\cancel{2}1} = 7104 \frac{N}{cm^2}$ $\sigma_{\cancel{1}2} = -12104 \frac{N}{cm^2}$

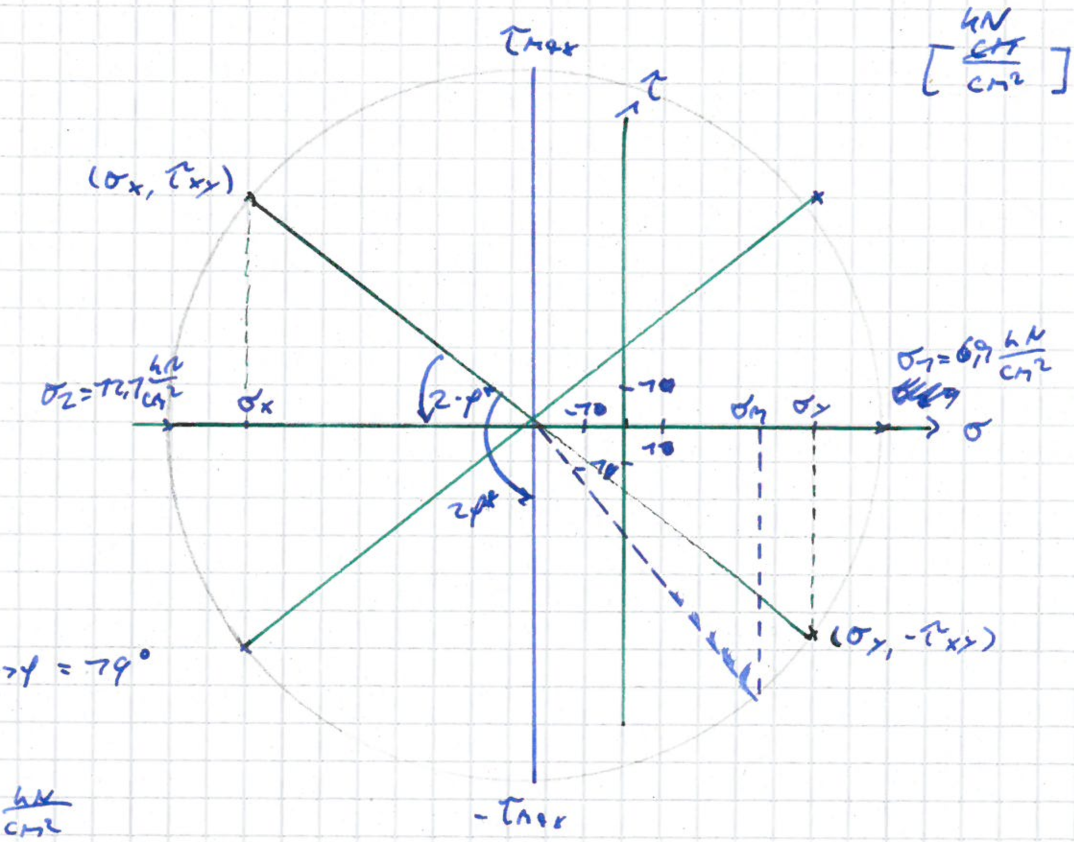
b) $\tan(\varphi^* 2) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \varphi^* = 15,9°$

c) $\tau_{xy,max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 9605 \frac{N}{cm^2}$

d) $\varphi^{**} = \varphi^* + 45° = 60,9°$

e) $\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cdot\cos(2\cdot 45) - \tau_{xy}\sin(2\cdot 45)$

$\sigma_\eta = 3500$



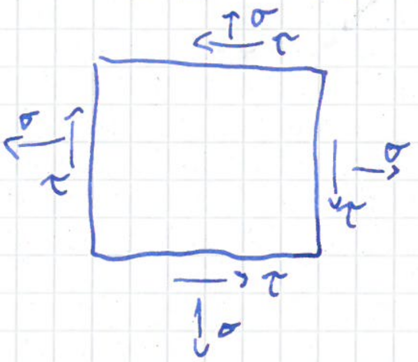
$2\varphi^* = 38° \rightarrow \varphi = 19°$

$\varphi^* = 64°$

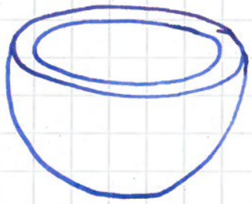
$\tau_{max} = 9,3 \frac{kN}{cm^2}$

$\sigma_\eta = 3,6 \frac{kN}{cm^2}$

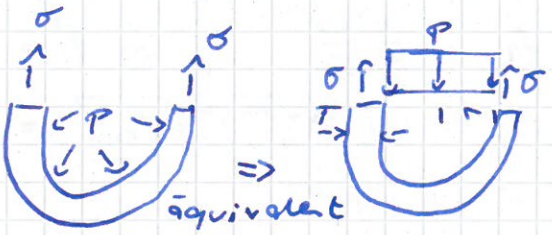
② Teil aus dem Kessel:



weil Kugel: alle σ gleich



In 2D



Lösen über GGB: $\sigma \cdot 2\pi \cdot r \cdot t = p \cdot \pi \cdot r^2$

$$\sigma = \frac{p \cdot \pi \cdot r^2}{2\pi \cdot r \cdot t} = \frac{p \cdot r}{2t}$$

①

a) $\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 7 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon_z = 0$

$\varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}(4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3}) = 3 \cdot 10^{-3}$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 7 \cdot 10^{-3} & 3 \cdot 10^{-3} \\ 3 \cdot 10^{-3} & -1 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

b) $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$

$\varepsilon_1 = 8 \cdot 10^{-3} \qquad \varepsilon_2 = -2 \cdot 10^{-3}$

c) $\gamma_{Max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 1 \cdot 10^{-2}$

②

a) $\varepsilon_x = -\frac{\Delta b}{b} = -0{,}004$

$\varepsilon_y = \frac{\Delta h}{h} = 0{,}01$

$\gamma_{xy} = 0 \rightarrow \varepsilon_{xy} = 0$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -0{,}004 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

b) $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\Delta h}{b}\right) = 0{,}1146^\circ$

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\Delta b}{h}\right) = 0{,}3819$

Weil α und β sehr klein kann auch vereinfacht werden mit $\tan^{-1}(\frac{a}{b}) \approx \frac{a}{b}$.
$\alpha = 2 \cdot 10^{-3} \qquad \beta = \frac{20}{3} \cdot 10^{-3}$

$\gamma_{xy} = 8{,}67 \cdot 10^{-3}$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -0{,}004 & 0{,}0043 \\ 0{,}0043 & 0{,}01 \end{pmatrix}$$

c) $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$

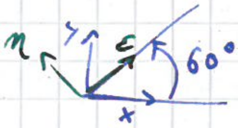
$\varepsilon_1 = 0{,}01122 \qquad \varepsilon_2 = -0{,}005215$

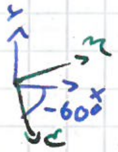
$\tan(2\varphi) = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \rightarrow \varphi_1 = -15{,}88^\circ$

$\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ = 74{,}\cancel{88}22^\circ$

③ 2

a) $\varepsilon_x = \varepsilon_a = -0{,}003$





I $\varepsilon_{\varepsilon} = \varepsilon_c = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos(2\varphi) +$

$+ \varepsilon_{xy} \sin(2\varphi)$

II $\varepsilon_{\varepsilon} = \varepsilon_b = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\cos(2\varphi) + \varepsilon_{xy} \sin(2\varphi)$

Lösen mit LGS

[illegible]

$\varepsilon_y = 0{,}007$ $\varepsilon_{xy} = 0{,}007732$

b) $\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \varepsilon_{xy}^2}$

$\varepsilon_1 = 0{,}007297$ $\varepsilon_2 = -0{,}003297$

c) Maximale Winkelverzerrung:

$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0{,}07058$

Gesuchter Winkel: $90° - \gamma_{max} = 90° - 0{,}07058 \cdot \frac{360}{2\pi} = 89{,}39°$

TM 2 übung 6

⑦

a) Es wird nicht auf Scherung belastet -> [illegible]

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$$

b) $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$$\sigma_x = -p = \sigma_y$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right) + \alpha_T \overset{=0}{\Delta T} \qquad \text{I}$$

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right)$$

$$0 = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad \text{II}$$

II in I :

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu(\nu(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x)\right)$$

$$= \frac{1}{80000}\left(-200 - 0{,}2(0{,}2(-200 - 200) - 200)\right)$$

$$= -0{,}0078$$

c) $\sigma_y = \frac{F}{b \cdot t} \Rightarrow F = \sigma_y \cdot b \cdot t = 1\ \text{kN}$ $\qquad (b = 0{,}1\ \text{m} \quad t = 0{,}05\ \text{m})$

d) $\sigma_x = -2p \quad ; \quad \sigma_y = -p$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = -120\ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$\varepsilon_x = -0{,}0042$$

$$\varepsilon_y = -0{,}0072$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\tau_{xy} = 0 \rightarrow \varepsilon_{xy} = 0$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} -0{,}0042 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0072 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma = \begin{pmatrix} -400 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & -120 \end{pmatrix} \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}\right]$$

Werden die Werte in die Formel für die Hauptdehnungen eingesetz, zeigt sich:

Es handelt sich bereits um die Hauptdehnungen und Hauptnormalspannungen.

② $\boxed{2}$

a) $\varepsilon_x = 0,1\,\% \mathrel{\hat{=}} 0,001$ $\varepsilon_y = 0,2\,\% \mathrel{\hat{=}} 0,002$ $\varepsilon_{xy} = 0,02\,\% \mathrel{\hat{=}} 0,0002$

$\sigma_x = 5,25 \cdot 10^8 \, \frac{N}{m^2}$ $\sigma_{xy} = 3,23 \cdot 10^7 \, \frac{N}{m^2} \mathrel{\hat{=}} \tau_{xy}$

$\tau_{xy} = 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{xy} \rightarrow G = 8,075 \cdot 10^{10} \, \frac{N}{m^2}$

$$\text{I} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\text{II} \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\text{III} \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x))$$

$$\text{IV} \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \overset{!}{=} 0$$ (weil Ebener Spannungszustand)

LGS mit vier Variablen und vier Gleichungen

$\nu = 0,3$

$\sigma_y = 6,865 \cdot 10^8$

$\sigma_z = 3,635 \cdot 10^8$

$E = 2,099 \cdot 10^{11}$

b) $$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0,001 & 0,0001 & 0 \\ 0,0001 & 0,002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Werte bereits in Aufgabenteil a) berechnet.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 5,25 \cdot 10^8 & 1,615 \cdot 10^7 & 0 \\ 1,615 \cdot 10^7 & 6,865 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 3,635 \cdot 10^8 \end{pmatrix}$$ ~~1,615·10^7~~ ~~1,615~~

c) $I_\sigma = \text{spur}(\sigma) = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 1,578 \cdot 10^9 \, \frac{N}{m^2}$

$$II_\sigma = \frac{1}{2}\left((\text{spur}(\sigma))^2 - \text{Spur}(\sigma^T \sigma)\right) = \frac{1}{2}\left((I_\sigma)^2 - (\sigma_x^2 + 2\tau_{xy}^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)\right)$$
$$= 1,907 \cdot 10^{17}$$

$$III_\sigma = \det(\sigma) = 3,635 \cdot 10^8 \cdot \left(5,25 \cdot 10^8 \cdot 6,865 \cdot 10^8 - 1,615 \cdot 10^7 \cdot 1,615 \cdot 10^7\right)$$
$$= 1,309 \cdot 10^{26}$$

d) $$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$\sigma_1 = 692720411 \, \frac{N}{m^2}$ $\sigma_2 = 518779588 \, \frac{N}{m^2}$

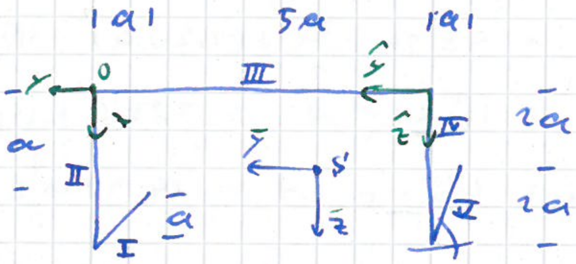
In Lösung wurde etwas andere Formel genutzt für $\sigma_{1,2}$. Fehler?

$\tan(2\varphi) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow \varphi_1 = -10,10°$

$\varphi_2 = 79,09°$

TM 2 Übung 7

① Digital in Samsung notes gelöst



②

Schwerpunkt S' :

$$S_y = \sum_i \frac{A_i y_i}{A_i} = -3{,}66\, a$$

$$S_z = \sum_i \frac{A_i z_i}{A_i} = 1{,}20\, a$$

↯ Vom falschen KS aus berechnet. Ins richtige umgerechnet ergibt sich:

$S_y = 2{,}34a$ und $S_z = 1{,}20a$

a)

I $I_y = \frac{a^3 t}{12} + (1{,}5a)^2 \cdot \sqrt{(1a)^2 + (1a)^2} \cdot t = 3{,}\overset{265}{\cancel{14}}\, a^3 t$

$I_z = \frac{a^3 t}{12} + \cancel{(1{,}5a)^2}\,(5{,}5a)^2 \cdot \sqrt{(1a)^2 + (1a)^2} \cdot t = 42{,}\overset{86}{\cancel{85}}\, a^3 t$

I $I_{yz} = -\frac{1}{2}(I_y - I_z)\sin(2 \cdot 45) + (0 + 1{,}5a \cdot 5{,}5a \cdot \sqrt{(1a)^2 + (1a)^2} \cdot t)\cos(2 \cdot 45)$
$= 19{,}73\, a^3 t$

III $I_y = \frac{(6a) \cdot t^3}{12} + 0 \Big] 0$

$I_z = \frac{t \cdot (6a)^3}{12} + 3a^2 \cdot t \cdot 6a = 72\, a^3 t$

$I_{yz} = 0 + 0$

II ~~III~~ $I_y = \frac{t \cdot (2a)^3}{12} + a^2 \cdot t \cdot 2a = \frac{8}{3} a^3 t$

$I_z = 0 + (6a)^2 \cdot t \cdot 2a = 72\, a^3 t$

$I_{yz} = 0$

IV $I_y = \frac{t \cdot (4a)^3}{12} + (2a)^2 \cdot t \cdot 4a = \frac{64}{3} a^3 \cdot t$

$I_z = 0 + 0$

$I_{yz} = 0$

V $I_y = \frac{(\sqrt{(2a)^2 + a^2})^3 \cdot t}{12} \cdot \sin(63{,}4°)^2 + (3a)^2 \cdot \sqrt{(2a)^2 + a^2} \cdot t = 20{,}87\, a^3 t$

$I_z = \quad " \quad " \quad \cdot \cos(63{,}4°)^2 + (-0{,}5a)^2 \cdot \sqrt{(2a)^2 \cdot a^2} \cdot t = 0{,}7458\, a^3 t$

$I_{yz} = -\frac{1}{2}(I_y - I_z)\sin(2 \cdot 63{,}4°) + (0 - 3a \cdot (-0{,}5a) \cdot \sqrt{(2a)^2 \cdot a^2} \cdot t) = -4{,}703\, a^3 t$

In Lösung: $2{,}987 a^3 \cdot t$

$I_y = 48{,}14\, a^3 \cdot t$ $\quad I_z = 187{,}6\, a^3 \cdot t$ $\quad I_{yz} = 14{,}99$
$= 22{,}68$ ↯

b) Bereits weiter oben auf dem Blatt ermittelt

c) muss − sein, weil $I_{\hat{y}} = I_{\bar{y}} + z^2 A$ umgestellt wird

$$I_{\bar{y}} = I_{\hat{y}} + z^2 A$$

$$= 48{,}74\, a^3 \cdot t + (1{,}20\, a)^2 \cdot (15{,}65\, a)^4 t = 70{,}68\, a^3 t \text{ ↯}$$

$$I_{\bar{z}} = I_{\hat{z}} \underline{+} y^2 A = 187{,}6 + (2{,}34\, a)^2 \cdot 15{,}65\, a = 273{,}3\, a^3 t \text{ ↯}$$

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = I_{\hat{y}\hat{z}} \underline{+} z y A = 14{,}49\, a^3 t + 1{,}20\, a \cdot 2{,}34\, a \cdot 15{,}65\, a = 58{,}934 \text{ ↯}$$

d)

$$\tan(2\varphi) = \frac{2 I_{yz}}{I_{yy} - I_{zz}} = \frac{2 \cdot 29{,}2\, a^3 t}{(25{,}58 - 107{,}9)\, a^3 t} \rightarrow \varphi = -75{,}64^\circ$$

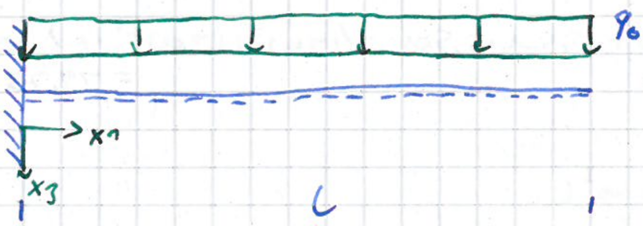
$$I_1 = \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4 (I_{yz})^2}\right)$$

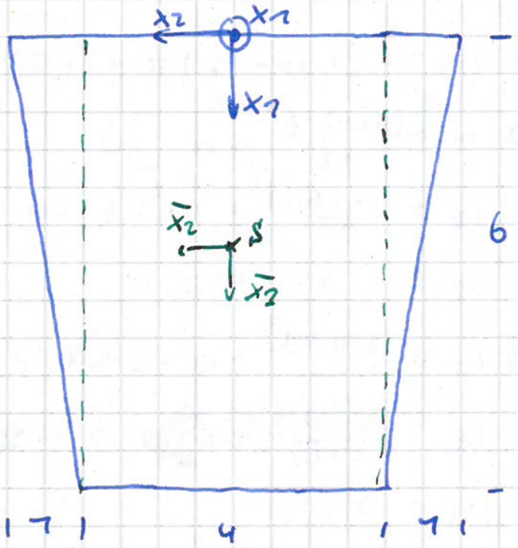
$$= 108{,}4\, a^3 t$$

I_2 analog … $I_2 = 79{,}07\, a^3 t$

Das Deviationsmoment verschwindet im Koordinatensystem der Hauptachsen

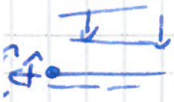
②





a)

Maximales Biegemoment bei B am Lager



$$\curvearrowleft \sum M^{(P)} = 0 : -q \cdot x \cdot \frac{1}{2} x - M = 0$$

Momentenverlauf: $M(x) = -\frac{1}{2} q x^2$

$M_{max} = -\frac{1}{2} q l^2$

~~Andere Lösung wie in Aufgabe 2 $M(x) = -\frac{1}{2} q l^2 + \frac{1}{2} q x^2$~~

Andere Methode: $q(x) = q_0$, ~~[illegible]~~ $Q(l) = 0$, $M(l) = 0$

$Q(x) = q_0 x + C_1$ $\qquad C_1 = -q_0 \cdot l$

$M(x) = \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2$ $\qquad C_2 = \frac{1}{2} q \cdot l^2$

$M(x) = \frac{1}{2} q_0 x^2 - q_0 \cdot l x + \frac{1}{2} q_0 l^2$

b)

$S_{x_2} = 0 \qquad S_{x_3} = \sum_i \frac{A_i x_3}{A_i} = 2{,}8 a$

Maßgebend ist $I_{\bar{x}_2}$ = ~~[illegible]~~

$$= \frac{4 \cdot 6^3}{12} + 0{,}2^2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot \left(\frac{1 \cdot 6}{36}(6^2) + 0{,}8^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1\right) = 88{,}8\, a^4$$

TM2 Übung 7

c)

$$EI\,w''(x) = -M = -\frac{1}{2}q_0x^2 + q_0 l x - \frac{1}{2}q_0 l^2$$

$$EI\,w'(x) = -\frac{1}{6}q_0x^3 + \frac{1}{2}q_0 l x^2 - \frac{1}{2}q_0 l^2 x + C_1$$

$$EI\,w(x) = -\frac{1}{24}q_0x^4 + \frac{1}{6}q_0 l x^3 - \frac{1}{6}q_0 l^2 x^2 + C_1 x + C_2$$

<u>RB</u>

$w'(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$

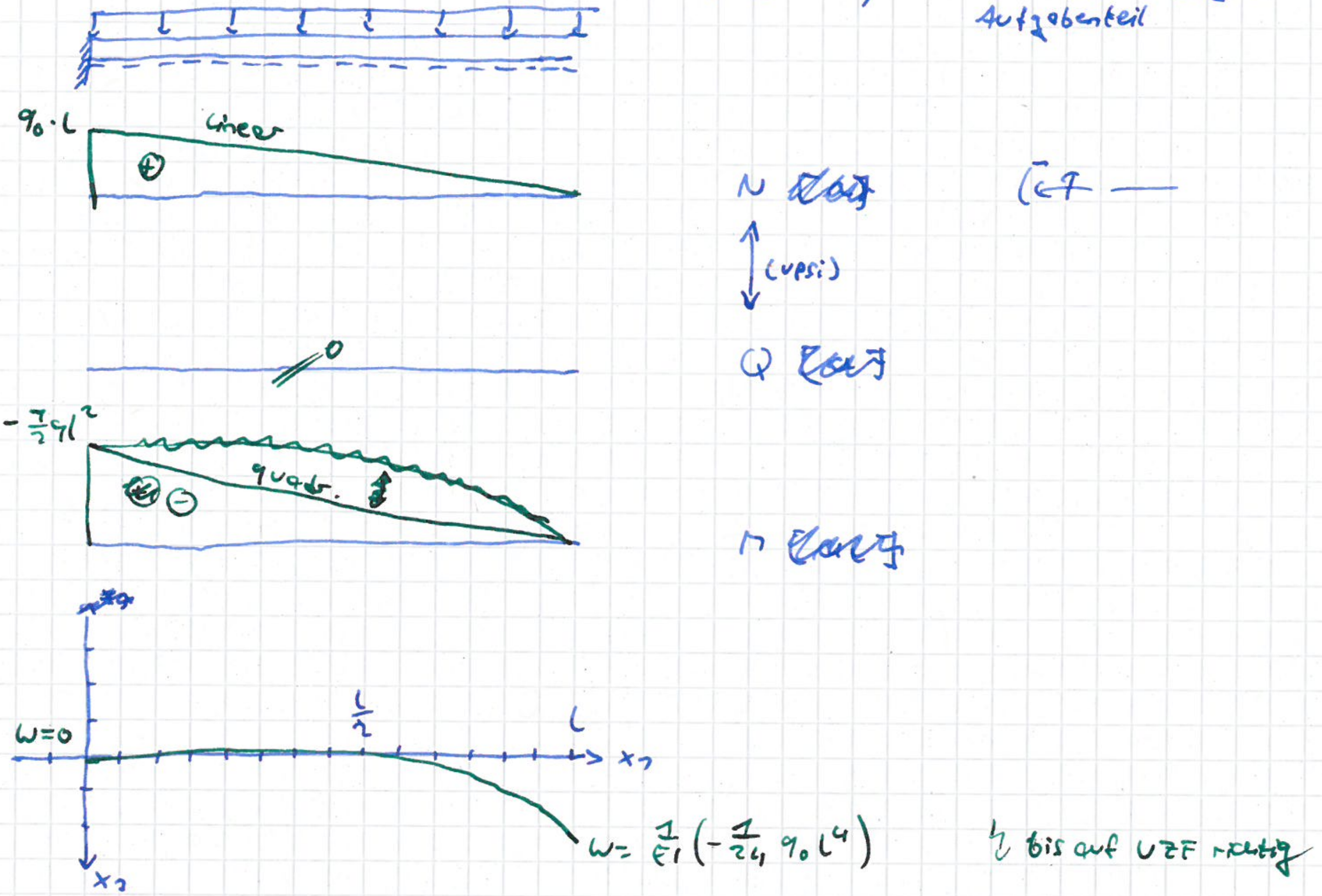
$w(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

Biegelinie:

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_0x^4 + \frac{1}{6}q_0 l x^3 - \frac{1}{6}q_0 l^2 x^2\right)$$

mit l aus vorherigem Aufgabenteil

d)



$w = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{24}q_0 L^4\right)$

↯ bis auf VZF richtig

e)

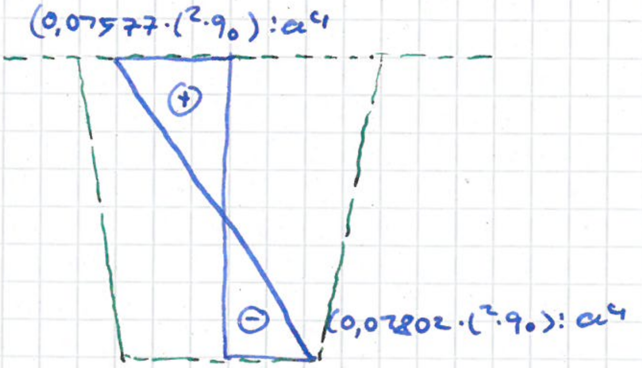
$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{\cancel{N_x}}{\cancel{A}}^{\,=0} + \frac{M_y}{I_y}\cdot z - \frac{\cancel{M_z}}{\cancel{I_z}}^{\,=0}\cdot y$$

mit $M_y = M_{max} = -\frac{1}{2}q_0 \cdot l^2$

$$\sigma_x = -\frac{\frac{1}{2}q_0 \cdot l^2}{88{,}8\,a^4}\,z$$

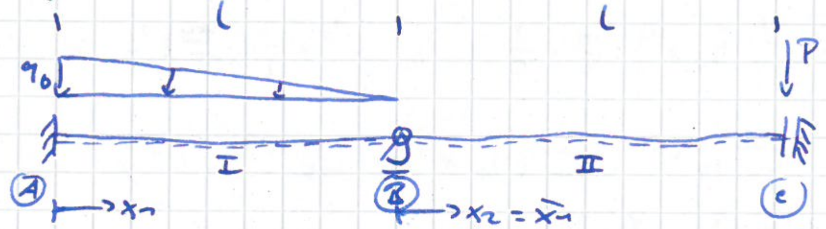
Neutrale Faser bei $z =$ ~~[illegible]~~ 0

↳ Also beim Schwerpkt.



TM2 Übung 8

①



a)

I

$$q(x) = q_0 - \frac{q_0 x}{L}$$

$$EIw^{(4)} = q_0 - \frac{q_0 x}{L}$$ ✓ Hier wurde in Lösung falsch abgeleitet

$$EIw'''(x) = -\frac{q_0}{2L}x^2 + q_0 x + C_1 \qquad = -Q(x)$$

$$EIw''(x) = -\frac{q_0}{6L}x^3 + \frac{1}{2}q_0 x^2 + C_1 x + C_2 \qquad = -M(x)$$

$$EIw'(x) = -\frac{q_0}{24L}x^4 + \frac{1}{6}q_0 x^3 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EIw(x) = -\frac{q_0}{720L}x^5 + \frac{1}{24}q_0 x^4 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

II

$$q(x) = 0$$

$$EIw^{(4)}(x) = 0$$

$$EIw'''(x) = C_5 \qquad = -Q(x)$$

$$EIw''(x) = C_5 x + C_6 \qquad = -M(x)$$

$$EIw'(x) = \frac{1}{2}C_5 x^2 + C_6 x + C_7$$

$$EIw(x) = \frac{1}{6}C_5 x^3 + \frac{1}{2}C_6 x^2 + C_7 x + C_8$$

RB

$w_1(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$w_1'(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$

$w_1(L) = 0 \rightarrow -\frac{q_0}{720}L^4 + \frac{1}{24}q_0 L^4 + \frac{1}{6}C_1 L^3 + \frac{1}{2}C_2 L^2 = 0 = C_8$ (I)

$w_2(0) = 0 \rightarrow C_8 = 0$

$w_2'(L) = 0 \rightarrow \frac{1}{2}C_5 L^2 + C_6 \cdot L + C_7 = 0 \rightarrow C_7 = \frac{1}{2}L^2 P$

$Q_2(L) = P = -w_2'''(L) \rightarrow C_5 = -P$

$w_1(L) = w_2(0) \rightarrow C_8 = 0$

$M_2(0) = 0 \rightarrow C_6 = 0$

$M_1(L) = 0 \rightarrow \frac{q_0}{6}L^4 - \frac{1}{2}q_0 L^2 \mp C_1 L - C_2 = 0$ (II)

I in II : $C_1 = \frac{3}{5}L \cdot q_0 \qquad C_2 = -\frac{4}{15}L^2 \cdot q_0$

↯ Fehler in der Lösung:
Ableitung falsch bei $\bar{w}_1(x)$

$$w_1(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{120l} q_0 x^5 + \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot l\cdot q_0\cdot x^3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{14}{15}\right) l^2 q_0 x^2\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{120l} q_0 x^5 + \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{10} l q_0 x^3 \cancel{*} - \frac{2}{15} l^2 q_0 x^2\right)$$

$$w_2(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}\cdot P\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot\cancel{1}x^2 + \frac{1}{2} l^2 P x\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6} P x^3 + \frac{1}{2} l^2 P x\right)$$

b)

Einspannmomente:

$$M_A = w_1''(0)\cdot(-1) = \frac{4}{15} l^2 q_0$$

$$M_C = w_2''(l)\cdot(-1) = P\cdot l = q_0 l^2$$

~~[illegible]~~

$$w_1'''(l) \uparrow — \downarrow w_2'''(0)$$

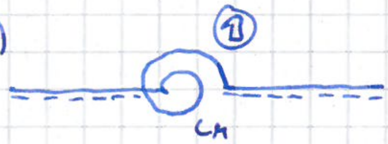
$$\uparrow B_V$$

$$B_V = w_2'''(0) - w_1'''(l) = -P + \frac{1}{2} q_0 l - q_0 l - \frac{3}{5} l q_0$$

$$= -\frac{1}{2} q_0 l - \frac{3}{5} q_0 l$$

$$= -\frac{11}{10} q_0 \cdot l$$

c)



Verbunden durch Drehfeder

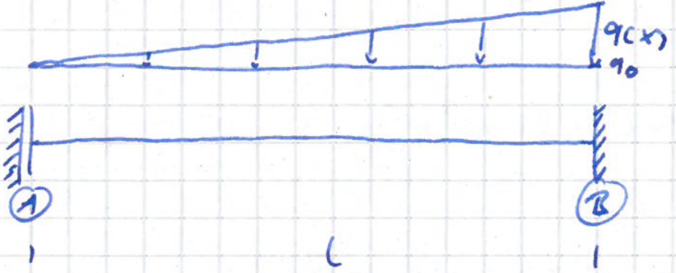
$$M_{cM} = c_M\cdot\phi = c_M\cdot w_1'(l) = c_M\cdot w_2'(0)$$

$$= EI w_1''(l) + EI w_2''(0)$$

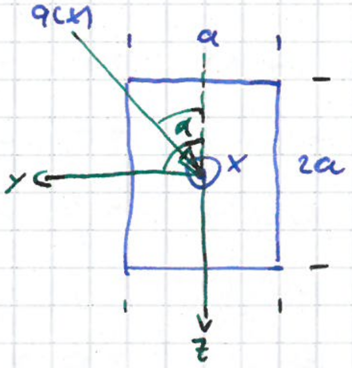
$$= \cancel{M_2} M_1(l) - M_2(0)$$

$$M_1(l) - M_2(0) = M_{cM} = c_M\cdot(w_1'(l) + w_2'(0))$$

②



$$q(x) = \frac{q_0 x}{l}$$



$$q_z(x) = \frac{q_0}{\cancel{l}} x \cdot \sin(\alpha) \qquad q_y(x) = \frac{q_0}{l} x\cdot\cos(\alpha)$$

$$= \frac{\sqrt{3} q_0}{2l} x \qquad = \frac{q_0}{2l} x$$

Berechnung der Biegelinie auf nächster Seite.

a).

$$EI\,w_z^{(4)}(x) = \frac{\sqrt{3}\,q_0}{2L}\,x$$

$$EI\,w_z'''(x) = \frac{\sqrt{3}\,q_0}{4L}\,x^2 + C_1$$

$$EI\,w_z''(x) = \frac{\sqrt{3}\,q_0}{12L}\,x^3 + C_1 x + C_2$$

$$EI\,w_z'(x) = \frac{\sqrt{3}\,q_0}{48L}\,x^4 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EI\,w_z(x) = \frac{\sqrt{3}\,q_0}{240L}\,x^5 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

$$EI\,w_y^{(4)}(x) = \frac{q_0}{2L}\,x$$

$$EI\,w_y'''(x) = \frac{q_0}{4L}\,x^2 + C_5$$

$$EI\,w_y''(x) = \frac{q_0}{12L}\,x^3 + C_5 x + C_6$$

$$EI\,w_y'(x) = \frac{q_0}{48L}\,x^4 + \frac{1}{2}C_5 x^2 + C_6 x + C_7$$

$$EI\,w_y(x) = \frac{q_0}{240L}\,x^5 + \frac{1}{6}C_5 x^3 + \frac{1}{2}C_6 x^2 + C_7 x + C_8$$

RB

$w_z'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$w_y'(0) = 0 \rightarrow C_7 = 0$

$w_z(L) = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}\,q_0}{240} L^4 + \overset{=0}{\cancel{\frac{1}{6}\cdot 0 \cdot}} L^3 + \frac{1}{2}C_2 L^2 + C_4 = 0$

$w_y(L) = 0 \rightarrow \frac{q_0}{240} L^4 + \frac{1}{2}C_6 L^2 + C_8 = 0$

$-w_z'''(0) = 0 = +Q_z(0) \quad C_1 = 0$

$-w_y'''(0) = 0 = +Q_y(0) \quad C_5 = 0$

$w_z'(L) = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}\,q_0}{48L} L^3 + C_2 L + \overset{=0}{\cancel{C_3}} = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{\sqrt{3}}{48} L^2 q_0$

$w_y'(L) = 0 \rightarrow \frac{q_0}{48} L^3 + C_6 L = 0 \rightarrow C_6 = -\frac{1}{48} L^2 q_0$

$C_4 = \frac{\sqrt{3}}{160} L^4 q_0$

$C_8 = \frac{1}{160} L^4 q_0$

$$w_z(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{\sqrt{3}\,q_0}{240L}x^5 + -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{48}L^2 q_0 x^2 + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{160}L^4} q_0\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{\sqrt{3}\,q_0}{240L}x^5 - \frac{\sqrt{3}}{96}L^2 q_0 x^2 + \frac{\sqrt{3}}{160}L^4 q_0\right)$$

$$w_y(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{240L}x^5 + -\frac{1}{2}\frac{1}{48}L^2 q_0 x^2 + \frac{1}{160}L^4 q_0\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{240L}x^5 - \frac{1}{96}L^2 q_0 x^2 + \frac{1}{160}L^4 q_0\right)$$

b) Durchbiegung bei $x = \frac{l}{2}$

$$w_x(l/2) = \frac{1}{EI}\left(\frac{-\sqrt{3}\,q_0}{240\,l}\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{l}{2}\right)^5 - \cancel{\tfrac{2}{2}}\frac{-\sqrt{3}}{96}l^2 q_0 \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{-\sqrt{3}}{160}l^4 q_0\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{29\sqrt{3}}{7680}l^4 q_0\right)$$

$$w_y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{q_0}{240\,l}\left(\frac{l}{2}\right)^5 - \frac{1}{96}l^2 q_0\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{160}l^4 q_0\right)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{29}{7680}l^4 q_0\right)$$

$$r = \sqrt{w_y\left(\frac{l}{2}\right)^2 + w_z\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{203}{5120\,a^4}\,\frac{q_0}{E}\,l^4 = \frac{1}{EI}\left(\frac{29}{3840}l^4 q_0\right)$$

c)

$$I_y = \frac{a(2a)^3}{12} \qquad I_z = \frac{2a \cdot a^3}{12}$$

$$= \frac{2}{3}a^4 \qquad = \frac{1}{6}a^4$$

$$\sigma_x(x,y,z) = \overset{=0}{\cancel{\frac{N_x}{A}}} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y$$

Moment am größten in Punkt B:

$$M_y(l) = -w_y''(l)EI = \cancel{\frac{3}{32}\frac{l^2 q_0}{a^4 E}} = -\frac{1}{16}l^2 q_0$$

$$M_z(l) = -w_z''(l)EI = \cancel{\frac{3}{8}\frac{l^2 q_0}{a^4 E}} = -\frac{\sqrt{3}}{16}l^2 q_0$$

$$\sigma_x(y,z) = -\frac{l^2 q_0}{16\left(\frac{2}{3}a^4\right)}z \cancel{+} + \frac{\sqrt{3}\,l^2 q_0}{16\left(\frac{1}{6}a^4\right)}y$$

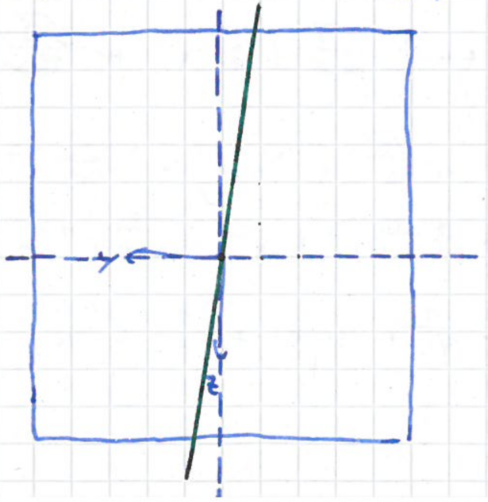
$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{l^2 q_0}{a^4}y - \frac{3}{32}\frac{l^2 q_0}{a^4}z$$

d)

Neutrale Faser: $y = 0$ $\sigma(0,z) = 0 \rightarrow z = 0$

$z = 0$ $\sigma(x,0) = 0 \rightarrow y = 0$

$\sigma(z,y) = 0 \rightarrow z = 4\sqrt{3}\,y$



TM2 Übung 9

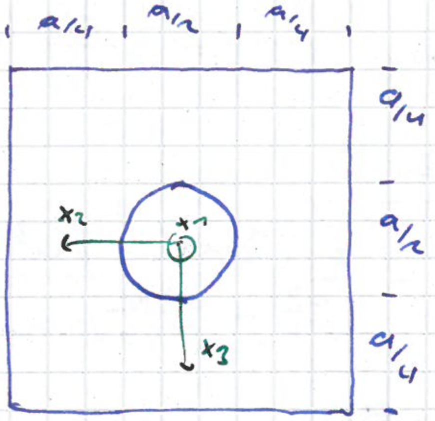
①

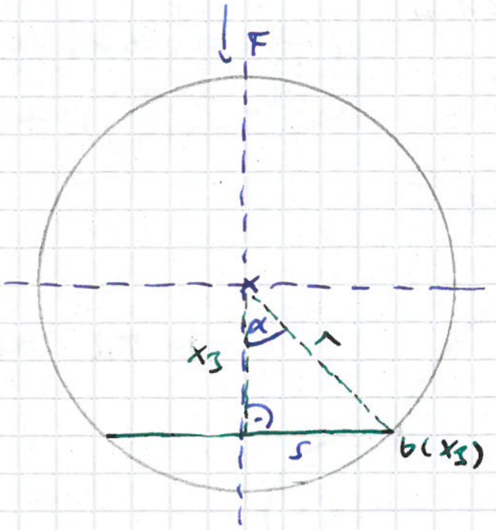
a) Maßgebend ist $I_{x_2} = \frac{a^4}{12} - \frac{\pi R^4}{4}$

$= \frac{a^4}{12} - \frac{\pi (\frac{a}{4})^4}{4}$

~~$\frac{a^4}{12} \; \frac{\pi a^2}{64}$~~

$= a^4 \left(\frac{1}{12} - \frac{\pi}{1024}\right)$





b)

$b(x_3)$: Beim Kreis zuerst:

$r = \frac{a}{4}$

$b(x_3) = a - \left(\frac{a}{4} \cdot \cos(\alpha)\right) \cdot 2$

$r = \sqrt{x_3^2 + s^2}$

$s = \sqrt{r^2 - x_3^2}$

$b(x_3) = a - 2 \cdot \sqrt{(\frac{a}{4})^2 - x_3^2}$

Gesamt:

$$b(x_3) = \begin{cases} a & \text{für } -\frac{a}{2} \geq x_3 \geq -\frac{a}{4} \\ a - 2\sqrt{r^2 - x_3^2} & \text{für } -\frac{a}{4} > x_3 > \frac{a}{4} \\ a & \text{für } \frac{a}{4} \geq x_3 \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

c)

$S_{x_2}(x_3) = \int_A x_3 \cdot b(x_3) \, dx_3$

$-\frac{a}{2} \geq x_3 \geq -\frac{a}{4}$: $\int_A x_3 a \, dx_3 = \int_{-\frac{a}{2}}^{x_3} x_3 a \, dx_3 = \left[\frac{1}{2} a x_3^2\right]_{-\frac{a}{2}}^{x_3}$

$= \frac{1}{2} a x_3^2 - \frac{1}{2} a \left(-\frac{a}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{2} a x_3^2 - \frac{1}{8} a^3$

$-\frac{a}{4} > x_3 > \frac{a}{4}$: $\int_A x_3 a - 2 x_3 \sqrt{(\frac{a}{4})^2 - x_3^2} \, dx_3$

$= \left[\frac{1}{2} a x_3^2 - \frac{1}{96}\left((a^2 - 16 x_3^2)^{3/2} - a^3\right)\right]_{-\frac{a}{4}}^{x_3}$

$= \frac{1}{32}\left(a(16 x_3^2 - a^2)\right) - \frac{1}{96}(a^2 - 16 x_3^2)^{3/2}$

$\frac{a}{4} > x_3 > \frac{a}{2}$: Identisch wie bei $-\frac{a}{2} \geq x_3 \geq -\frac{a}{4}$

c)

Schubspannung $\tau(s) = - \frac{\overset{F}{Q_z} \cdot S_y}{I_y \cdot h(s)}$

$-\frac{a}{2} \geq x_3 \geq -\frac{a}{4}$

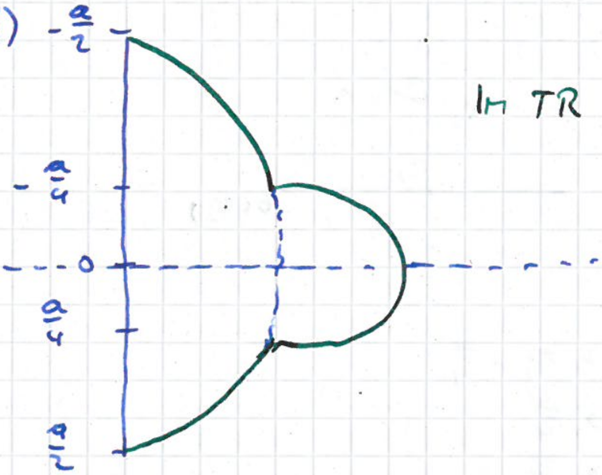
$$\tau(s) = - \frac{F \cdot \left(\frac{1}{2} a x_3^2 - \frac{1}{8} a^3\right)}{\left(\frac{a^4}{12} - \frac{a^4 \pi}{1024}\right) \cdot a} = \frac{384 F (4 x_3^2 - a^2)}{a^4 (3\pi - 256)}$$

$-\frac{a}{4} > x_3 > \frac{a}{4}$

$$\tau(s) = \frac{F \cdot \left(\frac{1}{32}\left(a(16 x_3^2 - a^2)\right) - \frac{1}{96}(a^2 - 16 x_3^2)^{3/2}\right)}{\left(\frac{a^4}{12} - \frac{a^4 \pi}{1024}\right) \cdot a \cdot \left(a - 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 - x_3^2}\right)}$$

$\frac{a}{4} \geq x_3 \geq \frac{a}{2}$

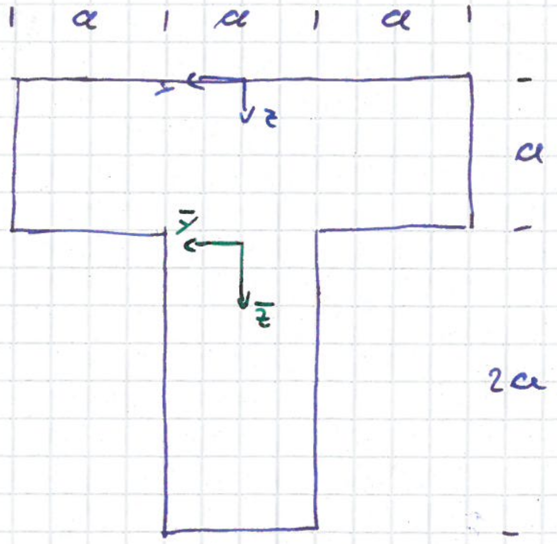
d)



Im TR zeichnen lassen

TM2 Übung 11

T1



①

a)

Schwerpunkt $S_y = \sum_i \frac{A_i s_{yi}}{A_i} = 0$

$S_z = \sum_i \frac{A_i s_{zi}}{A_i} = 1,1a$

b)

$I_{y,1} = \frac{3a \cdot a^3}{12} + (0,6a)^2 \cdot a \cdot 3a$

$I_{y,2} = \frac{a \cdot (2a)^3}{12} + (-0,9a)^2 \cdot 2a \cdot a$

$I_y =$ 3,617 a^4

$I_{z,1} = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} + 0$

$I_{z,2} = \frac{2a \cdot a^3}{12} + 0$

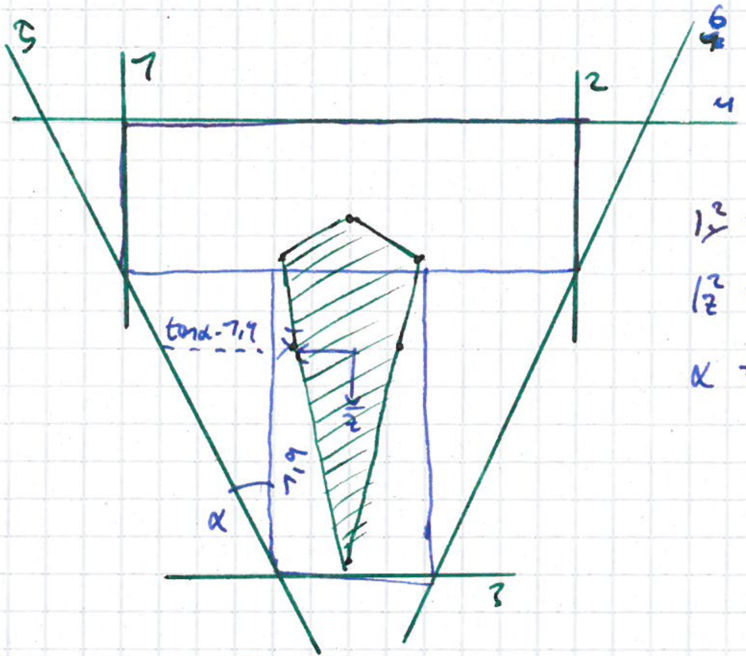
$I_z = \frac{29}{12} a^4$

$I_x = I_y + I_z = 6,033\, a^4$

$I_{yz} = 0$

↳ Hier Fehler in Lösung. Identische Formel aber anderes Ergebnis. Ab c) daher mit anderen falsche Wert aus Lösung weitergerechnet.

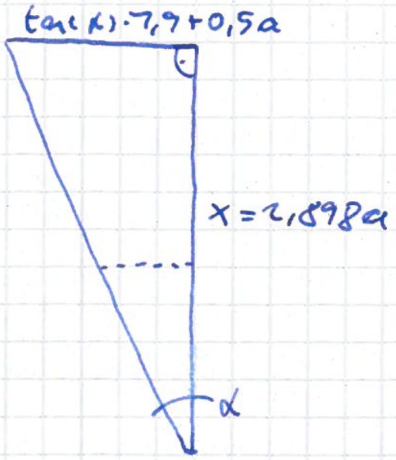
c)



$i_y^2 = 1,587\, a^2$

$i_z^2 = 0,4833\, a^2$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{2a}\right) = 26,6°$



$y_{F,1} = -0,322\, a$ | $z_{F,1} = 0$

$y_{F,2} = 0,322\, a$ | $z_{F,2} = 0$

$y_{F,3} = 0$ | $z_{F,3} = -0,835\, a$

$y_{F,4} = 0$ | $z_{F,4} = 1,443\, a$

$y_{F,5} = -0,508a$ | $z_{F,5} = -0,548a$

$y_{F,6} = 0,508a$ | $z_{F,6} = 0,548$

Koordinatensystem ca. 0,9 a zu weit unten gezeichnet → ganze Kernfläche müsste um diesen Wert nach oben verschoben werden