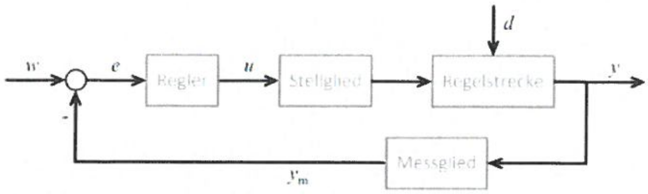
Diskriminante einer quadratischen Gleichung
$ax^2+bx+c=0$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$
$D = b^2 + 4ac$
$D>0$: zwei reelle Lösungen
$D=0$: Eine reelle Lösung (vielf. 2)
$D<0$: Zwei nicht-reelle Lösungen, die komplex konjugiert sind.

Grundlagen

Grundstruktur eines Regelkreises



Variable	Bezeichnung	Beispiel (Flugzeug mit Höhenregelung)
y	Regelgröße	Höhe
d	Störgröße	Wind
y_m	Messgröße	Höhenmessung (z. B. Luftdruck oder GPS)
u	Stellgröße	Höhenruder bzw. Auftriebsklappen
w	Sollwert	Sollhöhe

Lineare Systeme

Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + ... + b_1\dot{u} + b_0 u,\ n \leq m$$

Zustandsraum

$$\dot{x} = Ax + bu$$
$$y = c^T x + du$$

Linearisierung um Arbeitspunkt

$$\begin{matrix} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{matrix} \quad \text{mit} \quad \dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 & = f_1(x_1, x_2, ..., x_n, u) \\ \dot{x}_2 & = f_2(x_1, x_2, ..., x_n, u) \\ \vdots & \vdots \\ \dot{x}_n & = f_n(x_1, x_2, ..., x_n, u) \end{cases}, \quad A := \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}, \quad b := \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}$$

$$x(0) := x_o - \bar{x} \qquad \dot{x} = Ax + bu \qquad y = c^T x + du \qquad c^T := \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}, \quad d := \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}$$

Partialbruchzerlegung

$$X(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}, \deg(Z) < \deg(N) = r$$

$$N(s) = \sum_{i=1}^{r} (s - s_i)$$

$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 2u$

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} x + 0 \cdot u$

$$s_i \in \mathbb{R}, r = 1 : \frac{A_i}{s - s_i} \qquad \text{mit } A_i = (s - s_i)\, X(s)\Big|_{s=s_i}$$

$$s_i \in \mathbb{R}, r > 1 : \frac{A_{i,1}}{s - s_i} + \frac{A_{i,2}}{(s - s_i)^2} + \cdots + \frac{A_{i,r_i}}{(s - s_i)^{r_i}} \qquad \text{mit } A_{i,j} = \frac{1}{(r_i - j)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{r_i - j}}{\mathrm{d}s^{r_i - j}} \left(X(s)\,(s - s_i)^{r_i}\right)\Big|_{s=s_i}$$

$$s_i, \bar{s}_i \in \mathbb{C}, r = 1 : \frac{A_i s + B_i}{s^2 + d_i s + e_i} = \frac{A_i s + B_i}{(s - s_i)(s - \bar{s}_i)} = \frac{A_i s + B_i}{(s + \delta_i)^2 + \omega_i^2}$$

Lineare DGL Lösen

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + ... + b_1\dot{u} + b_0 u,\ n \leq m$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \left[s^i Y(s) - s^{i-1}y(0) - s^{i-2}\dot{y}(0) - \cdots - y^{(i-1)}(0)\right] = \sum_{k=0}^{m} b_k \left[s^k U(s) - s^{k-1}u(0) - s^{k-2}\dot{u}(0) - \cdots - u^{(k-1)}(0)\right]$$

$$Y(s)\underbrace{\left[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0\right]}_{N(s)} = U(s)\underbrace{\left[s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0\right]}_{Z(s)}$$
$$\underbrace{+ \sum_{i=0}^{n} a_i \left[s^{i-1}y(0) + s^{i-2}\dot{y}(0) + \cdots + y^{(i-1)}(0)\right] + \sum_{k=0}^{m} b_k \left[s^{k-1}u(0) + s^{k-2}\dot{u}(0) + \cdots + u^{(k-1)}(0)\right]}_{M(s)}$$

$$Y(s) = U(s) \cdot \underbrace{\frac{Z(s)}{N(s)}}_{\text{Part. Lsg.}} + \underbrace{\frac{M(s)}{N(s)}}_{\text{Homo. Lsg.}} = U(s)G(s) + \frac{M(s)}{N(s)}$$

$$\text{Homogene/Transiente Lösung: } y_h(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{M(s)}{N(s)}\right\}$$

$$\text{Partikuläre/Stationäre Lösung: } y_p(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{Z(s)}{N(s)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$$

$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 5u \rightarrow y_h(t) = e^{-2t}(A\sin(t) + B\cos(t))$
$\lambda_{1,2} = -3 \pm j \rightarrow y_h(t) = e^{-3t}(A\sin(t) + B\cos(t))$

$f(t) \to F(s)$

$f'(t) \to sF(s) - f(s)$

$f''(t) \to s^2F(s) - sf(s) - f'(s)$

Laplace-Transformation

Rechenregeln

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt = F(s) \mathrel{\widehat{=}} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$$

Linearität:	$a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a_1 \cdot F_1(s) + a_2 \cdot F_2(s)$
Differentiation:	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - \cdots - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
Integration:	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
Dämpfung:	$e^{-at} f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s+a)$
Endwertsatz:	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$
Anfangswertsatz:	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$
Multiplikation:	$t^n \cdot f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$
Verschiebung:	$f(t-T)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\begin{cases} e^{-Ts} \cdot F(s) & t \geq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Ähnlichkeitssatz:	$f\left(\frac{t}{a}\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a \cdot F(a \cdot s), a > 0$
Faltung:	$f(t) * g(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s) \cdot G(s)$

$Y_1(s)(s^2 + 2s + h_1) = h_1 W_1(s)$

$\mathscr{L}^{-1}: \ddot{y}_1 + 2\dot{y}_1 + y_1 h_1 = h_1 W_1$

Sprungantwort: $y_1(0) = 0$ $\leftarrow \mathscr{L}^{-1}$ (von t)

$\dot{y}_1(0) = 0$

$W_1 := 1$

Laplace-Tabelle

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
Einheitsimpuls $\delta(t)$	1	$\frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha t)$	$\frac{1}{s^2-\alpha^2}$
Einheitssprung $\sigma(t)$ → [illegible]	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha t)$	$\frac{1}{s^2+\alpha^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, (n = 1,2,3,...)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
$\frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$1 - \cos(\alpha t)$	$\frac{\alpha^2}{s(s^2+\alpha^2)}$
$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\alpha t - \sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha^3}{s^2(s^2+\alpha^2)}$
$e^{-\alpha t}(1 - \alpha t)$	$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$	$\sin(\alpha t) - \alpha t\cos(\alpha t)$	$\frac{2\alpha^3}{(s^2+\alpha^2)^2}$
$\frac{1}{\alpha}e^{-\beta t}\sin(\alpha t)$	$\frac{1}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$	$\frac{1}{2\alpha}t\sin(\alpha t)$	$\frac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}$
$e^{-\beta t}\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$	$t\cos(\alpha t)$	$\frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$
$e^{-\beta t}\cos(\alpha t)$	$\frac{s+\beta}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha t} + \alpha t - 1\right)$	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$
$e^{-\beta t}\left(\cos(\alpha t) - \frac{\beta}{\alpha}\sin(\alpha t)\right)$	$\frac{s}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left(1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}\right)$	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$
$t^n, (n = 1,2,3,...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}\left(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right)$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
$t^n e^{-\alpha t}, (n = 1,2,3,...)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$\frac{1}{\alpha\beta}\left(1 + \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}\right)\right)$	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\alpha t}, (n = 1,2,3,...)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\alpha e^{-\alpha t} - \beta e^{-\beta t}\right)$	$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t - \varphi\right), \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$	$\frac{s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
$\frac{1}{\alpha_2^2-\alpha_1^2}(\cos(\alpha_1 t) - \cos(\alpha_2 t)), \alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$	$\frac{s}{(s^2+\alpha_1^2)(s^2+\alpha_2^2)}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t - \varphi\right), \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$
$\frac{1}{2\alpha}(\sin(\alpha t) + \alpha t\cos(\alpha t))$	$\frac{s^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$e^{-\alpha t}\left(\cos\left(\sqrt{\beta^2-\alpha^2}t\right) - \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\sin\left(\sqrt{\beta^2-\alpha^2}t\right)\right)$	$\frac{s}{s^2+2\alpha s+\beta^2}$

Bsp. Zeitkonstante: $G(s) = \frac{5}{s+5} = \frac{1}{\frac{1}{5}s+1} \rightarrow T = \frac{1}{5}$

DGL: $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$

Übertragungsfunktion

Zeitkonstante $T_i = \frac{1}{|s_i|}$

Pol-Nullstellenform:

$G(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m}(s - s_{0i})}{a_n \prod_{i=1}^{n}(s - s_i)}$

Nullstelle des Nennerpolynoms

Definition

-> "Polynomform"

Lineare Differentialgleichung

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

$Y(s) \mathrel{\widehat{=}}$ Systemantwort für $M(s) = 0$

$n \geq 0 :=$ Typ von $G(s)$

$n - m :=$ Relativer Grad von $G(s)$

$n - m > 0 \Rightarrow$ Existenz von $g(t)$

$\exists s_i, \bar{s}_i \in \mathbb{C} \Rightarrow$ Schwingfähig

Zustandsraumdarstellung

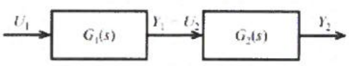
$$G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b + d$$

$A =$ Systemmatrix	$b =$ Steuervektor
$c =$ Beobachtungsvektor	$d =$ Durchgangsfaktor
$u =$ Eingang	$y =$ Ausgang
$x =$ Zustandsvektor	$I =$ Einheitsmatrix

Verschaltungsregeln

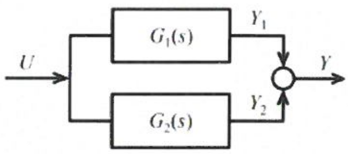
Hintereinanderschaltung

$$Y_2(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$



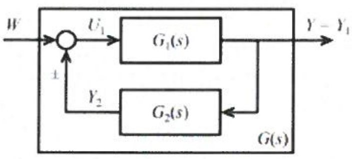
Parallelschaltung

$$Y_2(s) = (G_1(s) + G_2(s))\,U(s)$$



Rückkopplung

$$Y(s) = \frac{G_1(s)}{\underbrace{1 \mp G_1(s)G_2(s)}_{G(s)}} W(s)$$



Regelkreis

$T(s)$ stat. genau -> $G_0(s)$ hat Pol der Vielfachheit $\lambda > 0$ bei $s = 0$

Führungs-/Störübertragungsfunktion

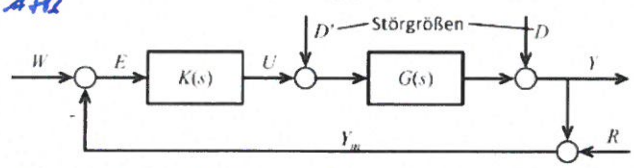
$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}}_{T(s)} W(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + G_0(s)}}_{S(s)} D(s) - \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} R(s)$$

$G_0(s) = \frac{A}{B}$

$T(s) = \frac{A}{A+B}$

!!!

$$S(s) + T(s) = 1$$



Übertragungsfunktion auf Stellgröße

$$U(s) = \underbrace{K(s)S(s)}_{W \to U} W(s) - \underbrace{K(s)S(s)}_{D \to U} D(s) - \underbrace{K(s)S(s)}_{R \to U} R(s)$$

$U(s) = h_1(s) E_1(s)$

Nomenklatur

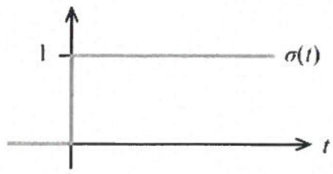
$Y =$ Regelgröße	$W =$ Sollwert
$U =$ Stellgröße	$D', D =$ Störgrößen
$R =$ Sensorrauschen	$E =$ Regelabweichung
$G =$ Regelstrecke	$K =$ Regler
$T =$ Führungsübertragungsfunktion	$S =$ Störübertragungsfunktion

$G_0(s) = G(s)K(s) =$ Offene Kette = Offener Regelkreis

Testsignale

Einheitssprung

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Systemantwort auf $\sigma(t)$ = Sprungantwort $h(t)$

Sprungantwort des geschlossenen Kreises $T(s)$:

$H(s) = \frac{1}{s} \cdot T(s)$ -> partialbruchzerlegung

-> Laplace -> $h(t)$

Einheitsimpuls

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} r_\varepsilon(t), \quad r_\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Systemantwort auf $\delta(t)$ = Impulsantwort $g(t)$

Ausblendeeigenschaft:

$$f(a) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-a)\mathrm{d}t \text{ für } a \in [t_1, t_2], 0 \text{ sonst}$$

Durchtrittsfrequenz : $|G(j\omega)| \overset{!}{=} 1$

$u(t) = \sin(t)$
$y_p(t) = A \cdot \sin(t + \varphi)$
$A = |G(j\omega)|$ $\omega = 1$
$\varphi = \arg(G(j\omega))$

Frequenzgang

Definition

Übertragung sinusförmiger Signale eines SISO-Systems

$$\Rightarrow \left\{ G(j\omega) \,\middle|\, 0 \leqslant \omega < \infty \right\}$$

$$u \cdot \sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t)$$

sei $G(s)$ as. stabil:
→ bei $u(t) = \sin(\omega t)$ ist die stationäre Systemantwort
$y_s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Stationäre Lösung

Asymptotisch Stabiles Eingrößensystem:

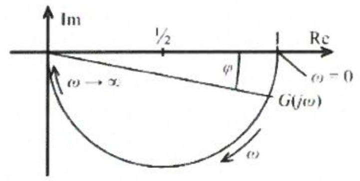
$$u = ej\omega t \quad \Rightarrow y_s(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)}$$
$$u = \sin(\omega t) \Rightarrow y_s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$u = \cos(\omega t) \Rightarrow y_s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = |G(j\omega)| \;;\; \varphi = \arg(G(j\omega))$$

Nyquist-Diagramm

Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT_1-Glied)

$$G(s) = \frac{1}{1+Ts} \Rightarrow G(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{1+(T\omega)^2}}_{x(\omega)} + j\underbrace{\frac{-T\omega}{1+(T\omega)^2}}_{y(\omega)}$$



Generell: Punkte Einzeichnen und Verbinden

$$\lim_{\omega \to 0} G(j\omega) \qquad \lim_{\omega \to \infty} G(j\omega)$$

$$\mathrm{Im}(G(j\omega)) = 0 \qquad \mathrm{Re}(G(j\omega)) = 0$$

Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT_2-Glied)

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2}$$

PI-Regler
$k_{PI}(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$

PD-Regler
$k_{PD}(s) = k_P(1 + T_D s$

P-Regler
$k_P(s) = k_P$

I-Regler
$k_I(s) = \frac{k_P}{T_I s} = \frac{k_I}{s}$

Bode-Diagramm

Definition

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j\arg(G(j\omega))}$$

[nicht $\ln(x)$!] → Verstärkungsfaktor !!!

$$x|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}(x) \Longleftrightarrow x = 10^{\left(\frac{1}{20}x|_{\mathrm{dB}}\right)}$$ ...

Betragskennlinie : $G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$

Phasenkennlinie : $\arg(G(j\omega))$ Bsp:

Regeln: $k_{2,60°} = k_2 \cdot X_{60}$

Nullstellen entsprechen an der reellen Achse gespiegelten Polstellen

$G(s) = G_1(s)G_2(s) \Rightarrow$ Bode-Diagramme von $G_1(s)$ und $G_2(s)$ addieren

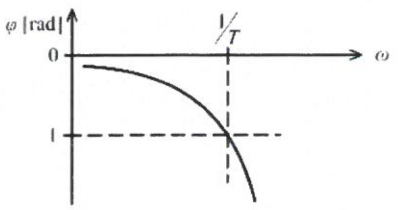
$G(s)$	$\lvert G(j\omega)\rvert_{\mathrm{dB}}$	$\arg(G(j\omega))$
$K > 0$	$20\log_{10}(K)$	0
$\frac{1}{s}$	$-20\log_{10}(\omega)$	$-\frac{\pi}{2}$
s	$20\log_{10}(\omega)$	$\frac{\pi}{2}$

Totzeitglied

$$G(s) = e^{-sT}$$

$$|G(j\omega_r)|_{\mathrm{dB}} = \left|e^{-j\omega T}\right|_{\mathrm{dB}} = 0$$

$$\arg\left(e^{-j\omega T}\right) = -\omega T = -10^{\log_{10}(\omega T)}$$

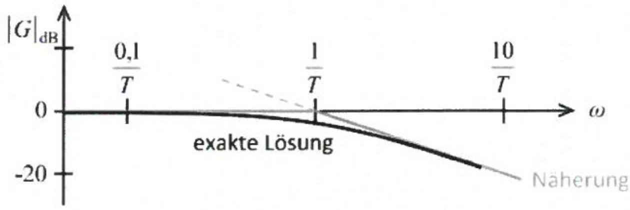


Eckfrequenzen

$$G(s) = K \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{b1}}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{s}{\omega_{bn}}\right)}{s^\lambda \left[\left(1 + \frac{s}{\omega_{a1}}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{s}{\omega_{an}}\right)\right]}$$

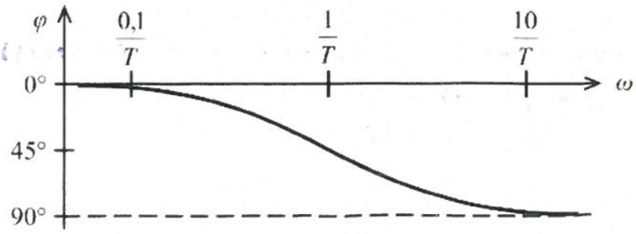
Bode-Diagramm von $G(s)$ ist Summe der Bode-Diagramme $G_{ki}(s)$

1. $\forall \omega$: $|K|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}(K)$
2. $\omega < \omega_{ki}$: $|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 0$
3. $\omega \geqslant \omega_{ki}$: $|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = \begin{cases} -20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{Dekade}} & \text{für } a_i \\ 20\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{Dekade}} & \text{für } b_i \end{cases}$



Phasendiagramm

1. $\forall\omega$ für $K > 0$: $\varphi = 0$
2. $\omega \geqslant \omega_{ki} - 1$ Dekade : $\varphi = \begin{cases} -45\frac{°}{\mathrm{Dekade}} & \text{für } a_i \\ 45\frac{°}{\mathrm{Dekade}} & \text{für } b_i \end{cases}$
3. $\omega \geqslant \omega_{ki} + 1$ Dekade : $\varphi = \begin{cases} -90° & \text{für } a_i \\ 90° & \text{für } b_i \end{cases}$



Übertragungsfunktion $\frac{1}{s^2(s+2)}$

instabil, weil doppelter Pol (s=0) auf der Im-Achse

Stabilität

Lineare Differentialgleichungen

Allgemein

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}$$

$$\Downarrow$$

-> Alle Pole in LHE

Asymptotisch Stabil $= \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \;\forall\; i \in \{1,\ldots,n\}$

Grenzstabil $= \mathrm{Re}(\lambda_i) \leqslant 0 \;\forall\; i \in \{1,\ldots,n\}$, $\exists\,\lambda_i : \mathrm{Re}(\lambda_i) = 0 : r(\lambda_i) \stackrel{!}{=} 1$

kein Pol RHE mind. eines auf Im.Achse

Instabil $= \exists\,\lambda_i : \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$

Mi[illegible] ein Pol RHE, keine LHE

Analog: $G(s) = \dfrac{Z(s)}{N(s)}$ für $N(s) = 0$

System Zweiter Ordnung

$\xi > 1$: Nicht schwingf.

$\xi < 1$: Schwingfähig

$\xi = 1$: Umschlag-Schwingf.

$\xi = \frac{\delta}{\omega_0}$

δ = gesuchter Realteil

$$\ddot{y} + \underbrace{2\xi\omega_0}_{a_1}\dot{y} + \underbrace{\omega_0^2}_{a_0} y = 0$$

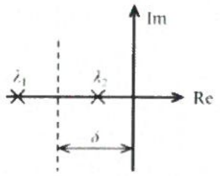
$$\Downarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -\underbrace{\xi\omega_0}_{\text{Abklingrate } \delta} \pm \underbrace{\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}_{\text{Eigenfrequenz } \omega_e}$$

Fall 1: $|\xi| > 1$

$\xi > 1$ = Asymptotisch Stabil

$\xi < -1$ = Instabil

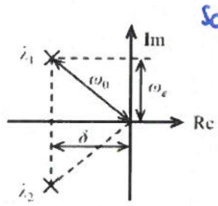


Fall 2: $|\xi| < 1$

$0 < \xi < 1$ = Asymptotisch Stabil

$-1 < \xi < 0$ = Instabil

$\xi = 0$ = Grenzstabil

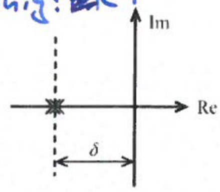


Fall 3: $|\xi| = 1$

$\xi = -1$ = Instabil

$\xi = 1$ = Asymptotisch Stabil

Schwingfähig: $|\xi| < 1$



Hurwitz-Kriterium

$a, k = 1,2 > 0$ -> alle koeff. > 0

Allgemein

$$N(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 : \forall i \geqslant 0 : a_i > 0 \wedge \Delta_i(H) > 0 \Rightarrow \text{System Stabil}$$

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow n - i < 0 : a_i = 0 \\ (n \times n) - \text{Matrix} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Spezialfälle

Polynom 2. Ordnung

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 : a_i > 0 \Rightarrow \text{Stabil}$$

Polynom 3. Ordnung

$$\left.\begin{array}{l} a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 : a_i > 0 \\ \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Stabil}$$

"Hurwitz-Determinante Δ_2"

Nyquist-Kriterium

1. Form

$$N = P - U \stackrel{!}{\Rightarrow} P = U$$

$$P = \sum s_i(G_0(s)) : \mathrm{Re}\,(s_i(G_0(s))) > 0$$
$$N = \sum s_i(T(s)) \quad : \mathrm{Re}\,(s_i(G_0(s))) > 0$$
$$U = \underset{(-1,0)}{\mathrm{ind}}(G_0(j\omega))(+ : \circlearrowleft | - : \circlearrowright)$$

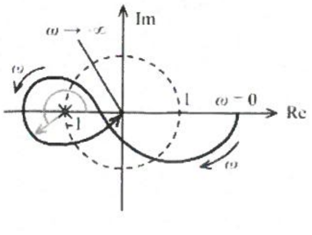
2. Form

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \text{ mit } \deg(Z(s)) = m < n = \deg(N(s))$$

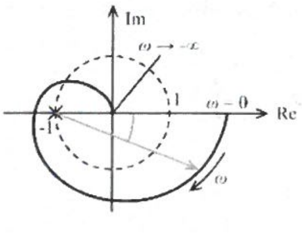
m_0 Pole mit $\mathrm{Re}(m_0) > 0$ und a_0 Pole mit $\mathrm{Re}(a_0) = 0$

$\Rightarrow T(s)$ stabil, wenn Zeiger von $(-1,0)$ $\Delta\varphi = m_0\pi + a_0\dfrac{\pi}{2}$ überstreicht

Winkeldrehung $2\pi \rightarrow$ **stabil**



Winkeldrehung $-2\pi \rightarrow$ **instabil**



Linke-Hand-Regel

$$G_0(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} \text{ mit } \deg(Z(s)) = m < n = \deg(N(s))$$

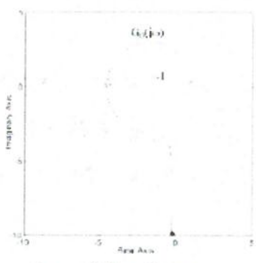
$\mathrm{Re}(s_i(G_0(s))) < 0$ bis auf ein $s_k(G_0(s))$ mit
$\mathrm{Re}(s_k(G_0(s))) = 0 \wedge r(s_k(G_0(s))) \leqslant 2$

$\Rightarrow T(s)$ stabil, wenn (-1,0) links von $G_0(jw)$ liegt

"As. stabil, da $\xi > 0$"

"Wurzelortskurve $\in$ LHE -> T(s) as. stabil -> $\forall k > 0$"

Stabiles System



Instabiles System

"-1 liegt beim durchlaufen der Ortskurve links in Richtung $\uparrow\omega$. -> T(s) as. stabil"

Stabilitätsreserven

Nyquist-Diagramm

Amplitudenreserve

$$\frac{k_{2,krit}}{k_2} = A_R = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{G_0(j\omega_\pi)} \overset{!}{>} 1$$

$k_{krit} = -\frac{1}{z} \cdot k$

$$\mathrm{Im}(G_0(j\omega_\pi)) = 0$$

Phasenreserve

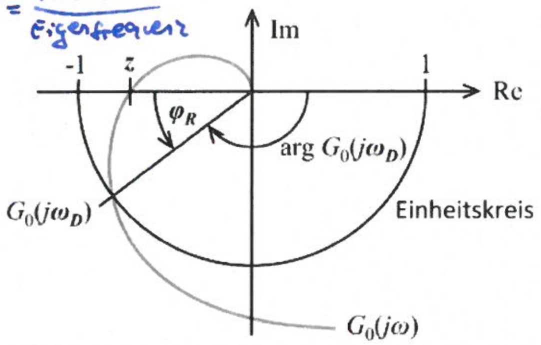
$$\varphi_R = \pi + \arg(G_0(j\omega_D))$$

$$|G_0(j\omega_D)| = 1$$

„Dämpfung eines Polpaares"

$\varepsilon = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\text{Realteil}}{\text{Eigenfrequenz}}$

Bsp. auf nächster Seite



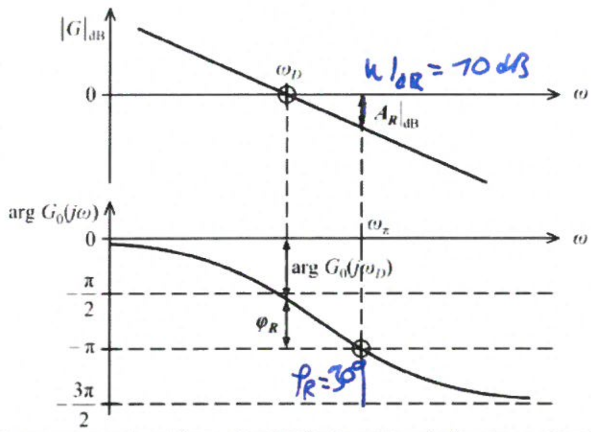
Bode-Diagramm

Amplitudenreserve

$$A_R|_{\mathrm{dB}} = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{|G_0(j\omega_\pi)|}\bigg|_{\mathrm{dB}} = -|G_0(j\omega_\pi)|_{\mathrm{dB}}$$

Phasenreserve

$$\varphi_R = \pi + \arg(G_0(j\omega_D))$$

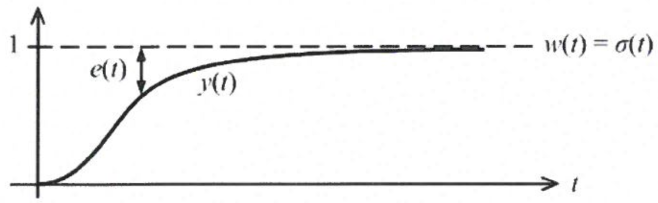


Stationäres Verhalten

Stationäre Genauigkeit

Sprungantwort des geschlossenen Kreises untersuchen:

$$w(t) = \sigma(t) \Leftrightarrow W(s) = \frac{1}{s}$$



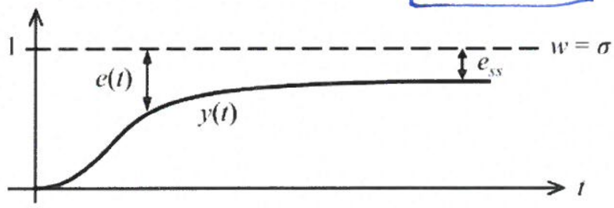
Stationär Genau $\Leftrightarrow e_{ss} = \lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$

$\exists \frac{1}{s^\lambda} \in G_0(s) : \lambda > 0 \Rightarrow$ Geschlossener Kreis Stationär Genau

Regelabweichung/Nachlauffehler

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot S(s) \cdot W(s)$$

$$\text{Für } w(t) = \sigma(t) : e_{ss} = \lim_{s\to 0} S(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + G_0(s)}$$



Nicht Stationär Genau $\Leftrightarrow e_{ss} = \lim\limits_{t\to\infty} e(t) \neq 0$

Steuerung $u(t)$ zu $h_1(t)$: $u(t) = h_1(t) e_1(t)$

$G_{02} = T_1(s) \cdot \frac{V_2}{s}$

Bandbreite

Definition

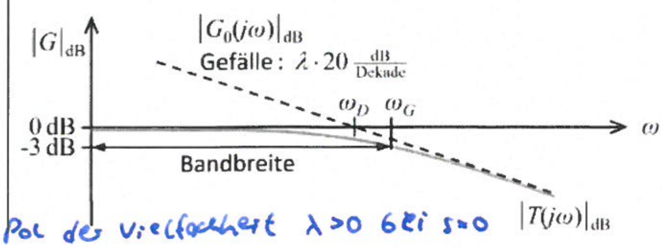
$$\text{Bandbreite} : |T(j\omega)| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |T(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \geqslant 3\mathrm{dB}$$

$$\text{Grenzfrequenz} : |T(j\omega_G)| = \frac{\sqrt{2}}{2}; \omega_G \approx \omega_D$$

ω_G ist Maß für Schnelligkeit

Bedingung : Stationär Genauer Regelkreis

Bode-Diagramm



Stationär genau: Offener Regelkreis $T(s)$ hat einen Pol der Vielfachheit $\lambda > 0$ bei $s = 0$

stationär genau, da $h_1(\infty) = 1 = w_1$

Stationär genau $\Leftrightarrow e_{ss} = \lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$

„Führungsübertragungsfunktion" Wurzelortskurven

Definition

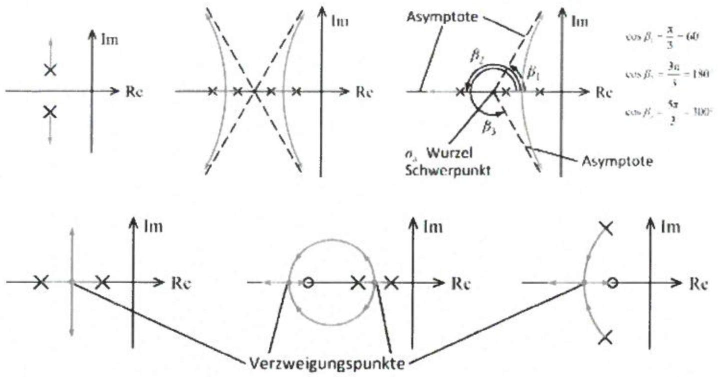
$$T(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{k \cdot Z_0(s)}{N_0(s) + k \cdot Z_0(s)}$$

$$G_0(s) = k \cdot \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} \left(= \frac{Y(s)}{W(s)} \right)$$

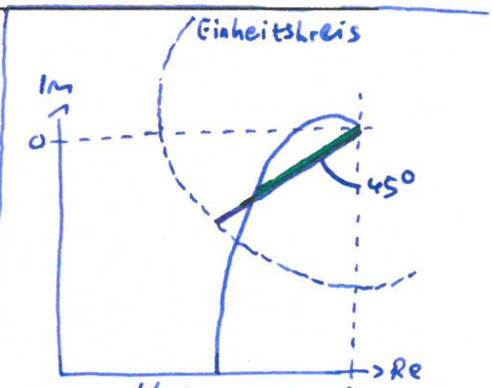
$$\text{grad}(N_0(s)) = n \geqslant m = \text{grad}(Z_0(s))$$

Nullstellen $z_i, 1 \leqslant i \leqslant m$

Pole $p_i, 1 \leqslant k \leqslant n$



Konstruktionsregeln



$h_{12} = \frac{\text{blau}}{\text{grün}}$ = h für möglichst größte Phasenreserve

$(h_2 = 2 \cdot h_{12})$

1. Symmetrisch zur reellen Achse
2. $p_i \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} z_i \text{ wenn vorhanden} \\ \infty \text{ sonst} \end{cases}$
3. Teil reeller Achse $\in$ WOK falls $\sum$ rechtsliegender reeller kritischer Stellen ungerade
4. Es gibt $n-m$ Asympototen
5. Bei mindestens 2 Asymptoten: (Reeller) Wurzelschwerpunkt $\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$
6. Richtungswinkel der Asymptoten $\beta_i = \frac{\pi \cdot (2i-1)}{n-m}, i = 1, 2, \ldots, n-m$
7. (Reelle) Verzweigungspunkte $\sigma_b : \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_b - p_j} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma_b - z_j}$
8. $[a,b] \in$ (WOK $\wedge$ Reelle Achse) enthält mind. einen Verzweigungspunkt, wenn
   Zwei reelle Pole $\in [a,b]$
   Zwei reelle Nullstellen $\in [a,b]$
   Eine reelle Nullstelle $\in (-\infty, b]$ oder $[b, \infty)$
9. Austrittswinkel $\alpha_{\text{aus}} = \left(\sum_{j=1}^{m} \arg(p_i - z_j) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \arg(p_i - p_j) \pm (2l+1)\cdot\pi \right) \cdot \frac{1}{r_i}, l = 0, 1, 2, \ldots$

   Eintrittswinkel $\alpha_{\text{ein}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \arg(z_i - p_j) - \sum_{j=1, j\neq i}^{m} \arg(z_i - z_j) \pm (2l+1)\cdot\pi \right) \cdot \frac{1}{r_i}, l = 0, 1, 2, \ldots$
10. Schnittpunkte mit der imaginären Achse wenn Ast außerhalb der reellen Achse: $\begin{matrix} 0 = \text{Re}\left(N_0(j\omega) + k \cdot Z_0(j\omega)\right) \\ 0 = \text{Im}\left(N_0(j\omega) + k \cdot Z_0(j\omega)\right) \end{matrix}, k > 0, w \in \mathbb{R}$

    Schnittpunkte mit der imaginären Achse wenn Ast auf der reellen Achse: $k = -\frac{N_0(0)}{Z_0(0)}$

System 2. Ordnung

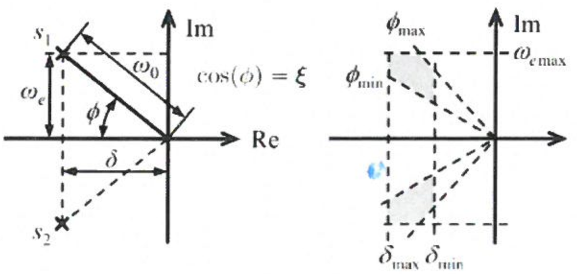
$$T(s) = \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} \text{ mit } N_0(s) = s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2, 0 < \xi < 1$$

$$\Rightarrow \text{Pole: } s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = -\delta \pm j\omega_e$$

$\xi_{\min,\max}$ = Maximale/Minimale Überschwingweite

$\omega_{e,\min}$ = Maximale Überschwingzeit

$\delta_{\min,\max}$ = Maximale/Minimale Beruhigungszeit

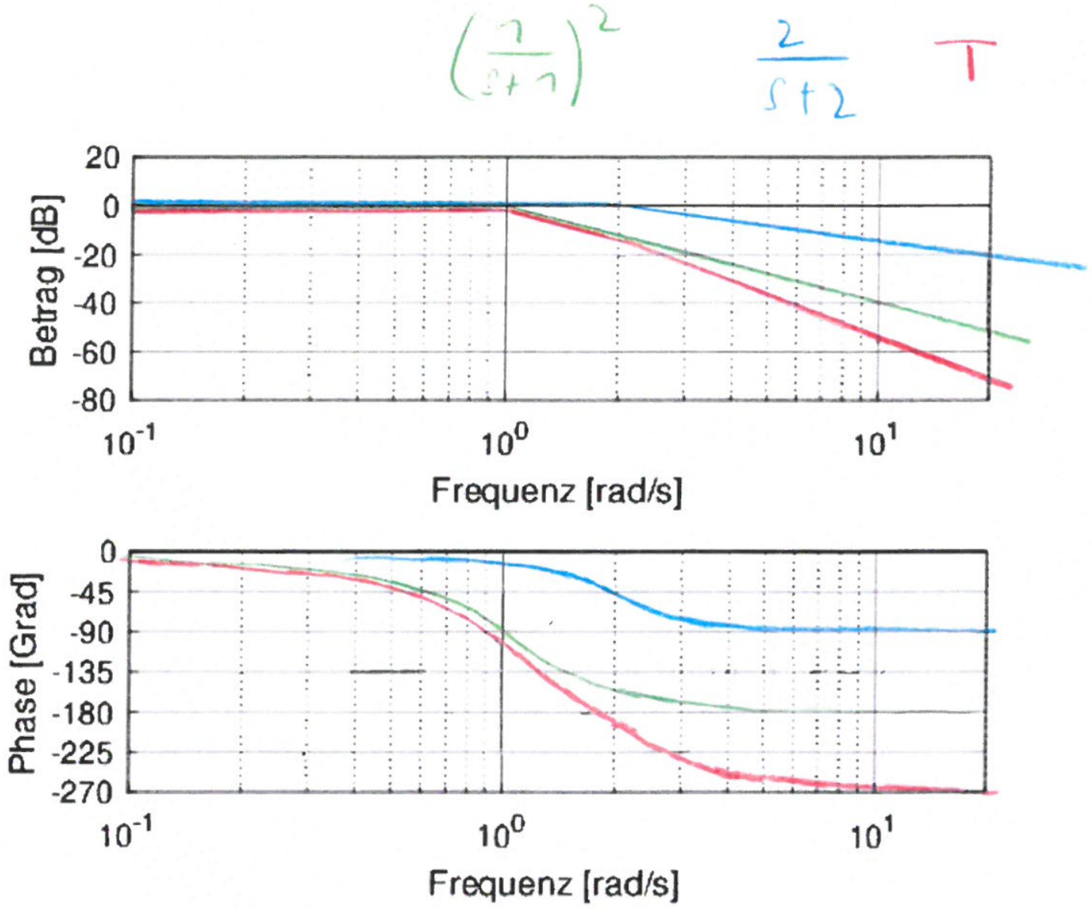


$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{b_0} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

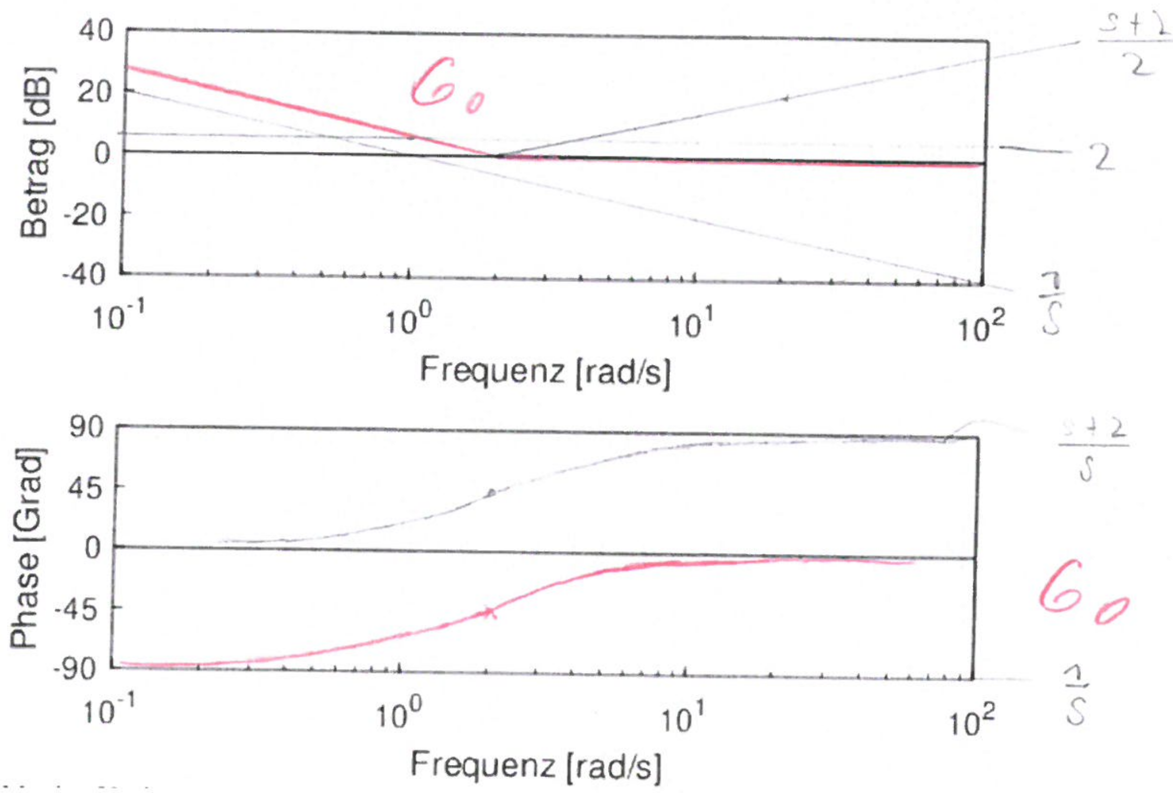
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

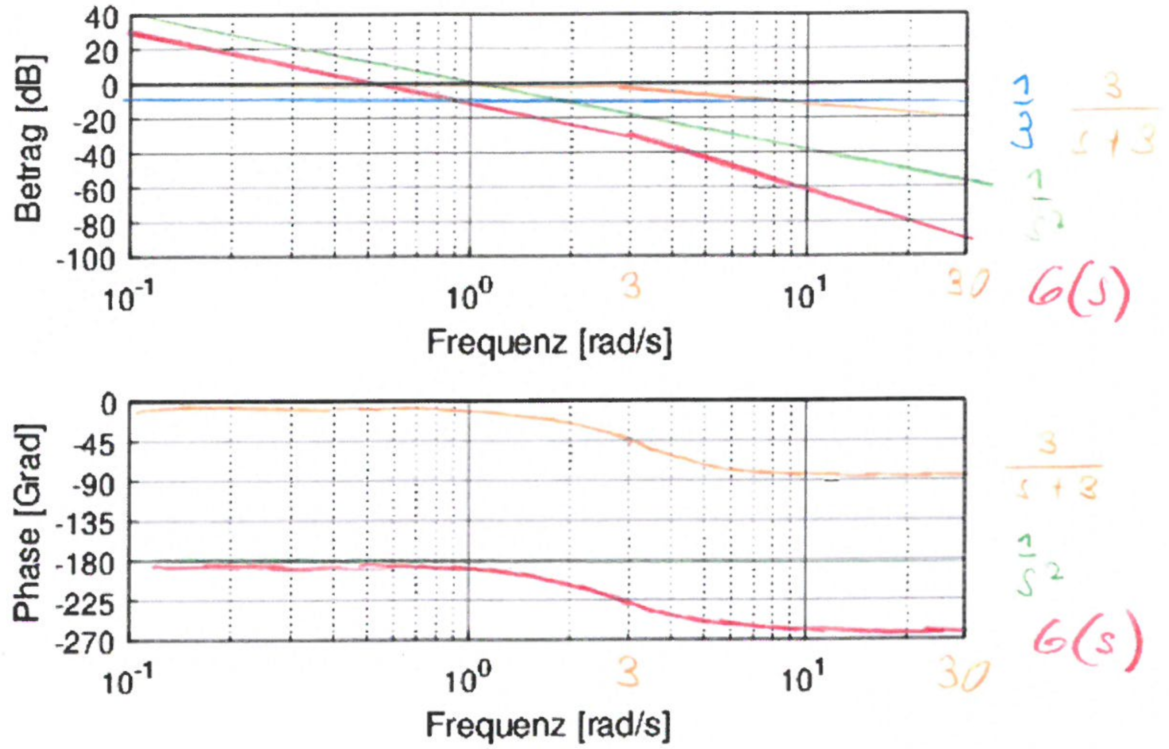
für $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_0 \cdot u$

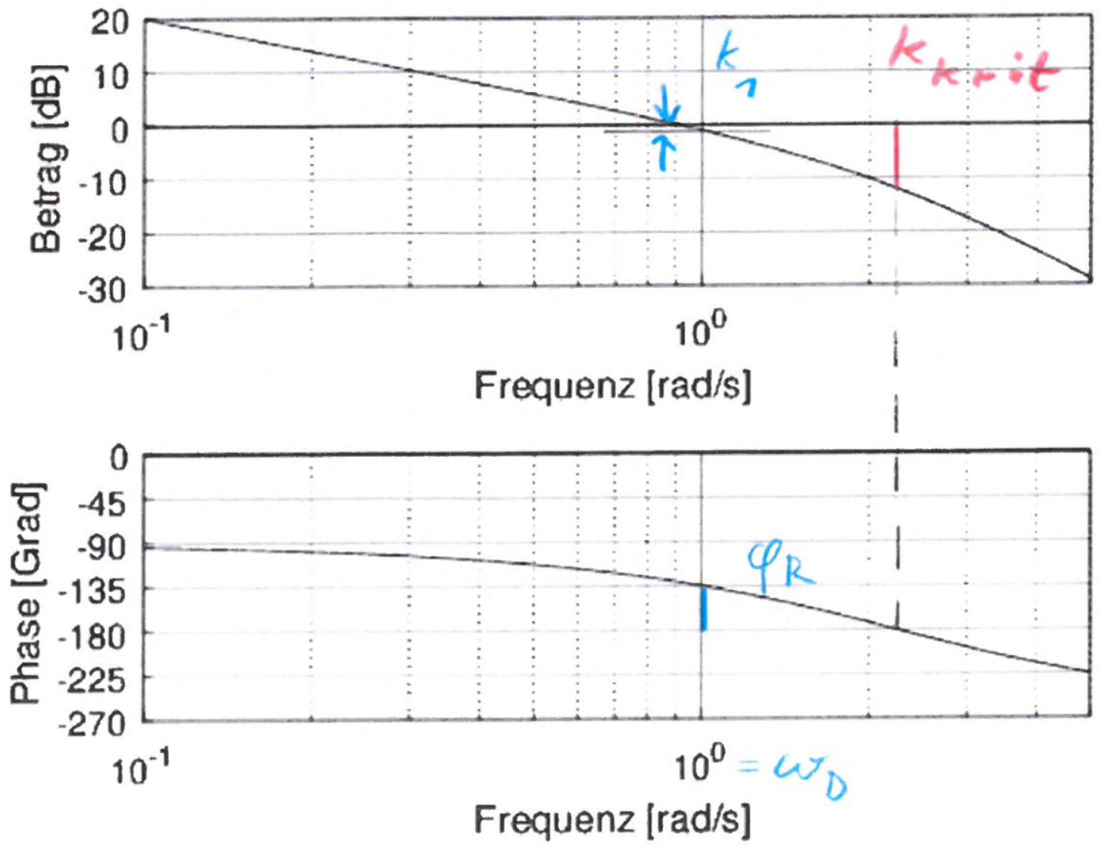


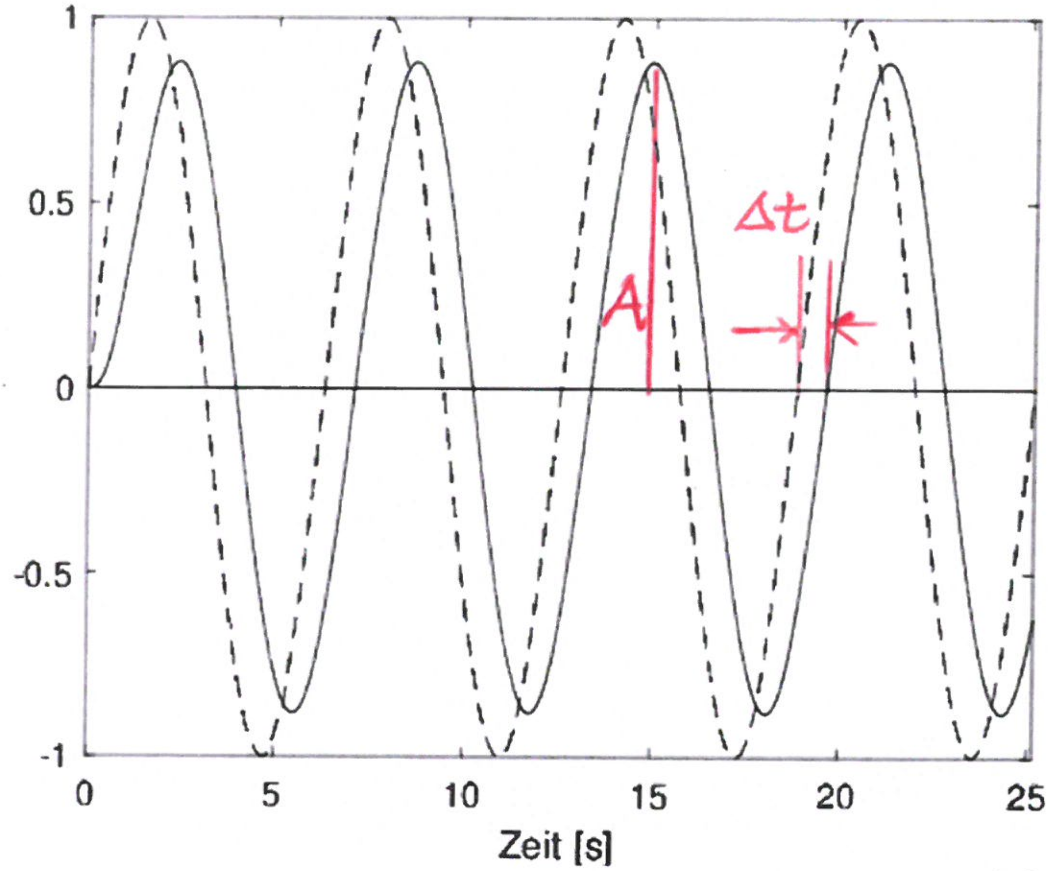
(1/(s+1))^2
2/(s+2)
T
Betrag [dB]
20
0
-20
-40
-60
-80
10^-1
10^0
10^1
Frequenz [rad/s]
Phase [Grad]
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
10^-1
10^0
10^1
Frequenz [rad/s]



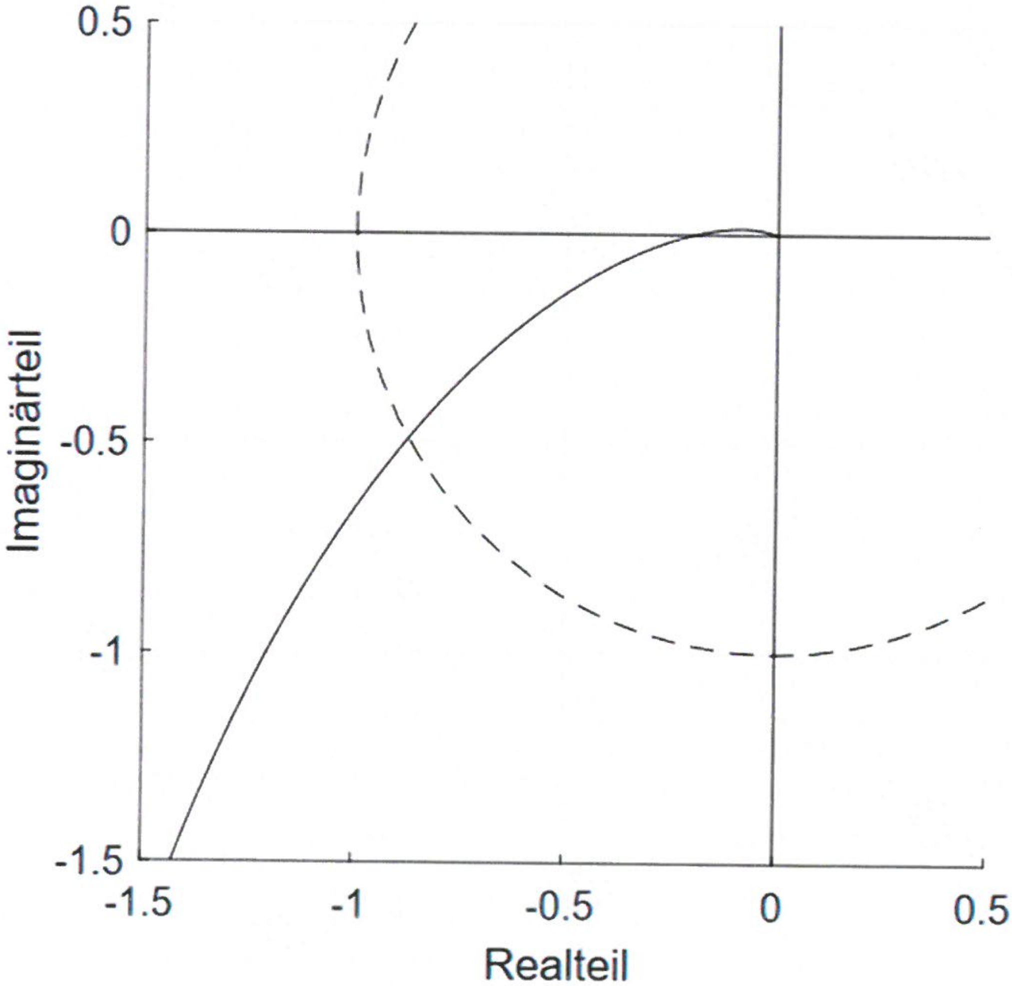
Betrag [dB]
40
20
0
-20
-40
G0
(s+2)/2
2
1/s
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequenz [rad/s]
Phase [Grad]
90
45
0
-45
-90
(s+2)/s
G0
1/s
10^-1
10^0
10^1
10^2
Frequenz [rad/s]


Betrag [dB]
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
10^{-1}
10^{0}
3
10^{1}
30
Frequenz [rad/s]
$\frac{3}{s+3}$
$\frac{1}{s^2}$
$G(s)$
Phase [Grad]
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
10^{-1}
10^{0}
3
10^{1}
30
Frequenz [rad/s]
$\frac{3}{s+3}$
$\frac{1}{s^2}$
$G(s)$


Betrag [dB]
20
10
0
-10
-20
-30
k_1
k_{krit}
10^{-1}
10^{0}
Frequenz [rad/s]
Phase [Grad]
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
φ_R
10^{-1}
$10^{0} = \omega_D$
Frequenz [rad/s]



1
0.5
0
-0.5
-1
0
5
10
15
20
25
Zeit [s]
A
Δt



0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
Imaginärteil
Realteil

1 $\dot{y} + y = u$

a) $u(t) = \sin(t)$

$\dot{y} + y = \sin(t) \quad , \quad y(0) = 0$

$y_p(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$

$\dot{y}_p(t) = A\cos(t) - B\sin(t)$

$A\cos(t) - B\sin(t) + A\sin(t) + B\cos(t) = \sin(t)$

$\sin(t)(-B+A) + \cos(t)(A+B) = \sin(t)$

$-B + A = 1 \quad ; \quad A + B = 0 \quad \rightarrow A = +\frac{1}{2} \; , \; B = -\frac{1}{2}$

$y_p(t) = -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

$y_h(t) = Ce^{-t}$

$y(0) = 0$

$0 = \frac{1}{2}\cos(0) + \frac{1}{2}\sin(0) + Ce^{-0}$

$C = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow y_h(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}$

$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t))$

$= \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t) - e^{-t})$

b) $y_p(t) = C\cdot\sin(t+\varphi) \quad \text{mit } C > 0$

$= C\cdot(\sin(t)\cos(\varphi) + \cos(t)\sin(\varphi)) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t))$

I $\quad C\cdot\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$

II $\quad C\cdot\sin(\varphi) = -\frac{1}{2} \qquad C = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \varphi = +\frac{3}{4}\pi$

$y_p(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t + \frac{3}{4}\pi)$

c) $G(s) = \frac{1}{s+1}$

$C = |G(j\omega)| \qquad \omega = 1$

$= \left|\frac{1}{j+1}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi = \arg(G(j\omega)) = -\frac{\pi}{4}$

(2) $\ddot{y} + \dot{y} = u$ (2)

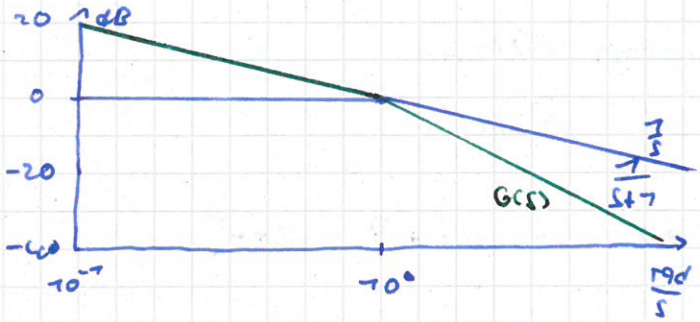
a) $G(s) = \frac{1}{s^2+s} = \frac{1}{s(1+s)}$

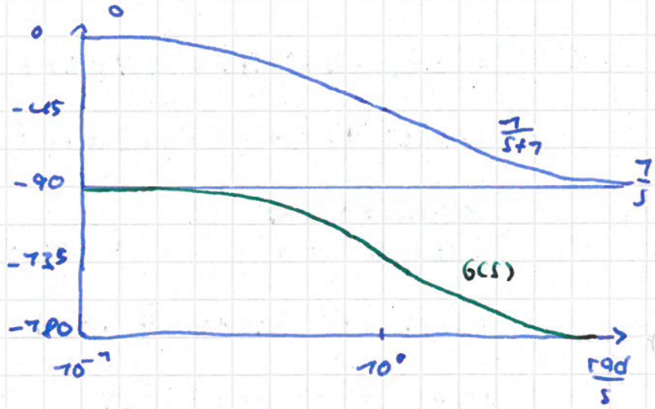
Pole bei $0, -2$ $\rightarrow$ Grenzstabil, weil $Re(\lambda_i) \leq 0 \;\forall i \in \{1,2\}$

b) $G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1}$

$\frac{1}{s}$: $\omega_1 = 0\, s^{-1}$

$\frac{1}{s+1}$: $\omega_2 = 1\, s^{-1}$





c) $k|_{dB} \approx 20\,dB$

$k = 10^{\frac{20}{20}} = 10$

d) $\ddot{y} + \dot{y} = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$

$s^2 Y(s) - s + sY(s) - 1 = \frac{1}{s}$

$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$

$1 = A \cdot s \cdot (s+1) + B(s+1) + Cs^2$

$= As^2 + A + Bs + B + Cs^2$

$= s^2(A+C) + s(B) + A + B$

$A + C = 0$ $\quad C = -1$
$B = 0$ $\quad B = 0$
$A + B = 1$ $\quad A = 1$

↯ eigentlich $C = 1$, $B = -1$, $A = 1$

$Y(s) = \frac{1}{s} \cancel{+} - \frac{1}{s+1}$

$y(t) = 1 - e^{-t}$

$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} \cancel{\;} - \frac{1}{s}$

$y(t)$ ~~...~~ $t + e^{-t}$

Regelung f 23

3

e) $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T x + du$ $y = x_2$

~~$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$~~

$X_2(s) = \frac{1}{s(s+1)} \cdot U(s)$

$X_2(s)(s^2+s) = U(s)$

$\mathcal{L}^{-1}$: $\ddot{y} + \dot{y} = u$

~~$\dot{x} = [\ldots]x + [\ldots]u$, $y = [1\ 0]x + 0u$~~

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$; $y = [1 \quad 0] x + 0\,du$

3 $k_1(s) = \frac{k_1(s+a)}{s}$

$G_{01}(s) = k_1(s) \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{k_1(s+a)}{s(s+1)}$

a) $U(s) = k_1(s)E(s)$

$= \frac{k_1(s+a)}{s} E(s) = \frac{k_1 s}{s} E(s) + \frac{k_1 a}{s} E(s)$

$= k_1 E(s) + \frac{k_1 a}{s} E(s)$

$\mathcal{L}^{-1}$: $= k_1 e(t) + k_1 a \int_0^t e(\tau)\, d\tau = u(t)$

PI - Regler

b) $T_1(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{k_1(s+a)}{s^2 + (k_1+1)s + a k_1}$

Hurwitz : Nennes: Polynom 2. Grades, alle koeffizienten >0 für $k_1, a > 0$

↳ $T_1(s)$ ist asymptotisch stabil

$\lim_{t \to 0} \frac{1}{1+G_0(s)} = 0$ → stationär genau

c) $\ddot{y} + 2\xi\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = \ddot{y} + (k_1+1)\dot{y} + a k_1 y$

- $2\xi\omega_0 = k_1+1$
  $\omega_0^2 = a k_1$ → $\xi = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a k_1}}(k_1+1)\right)$

- $c = \sqrt{k_1}$
  $0 = \frac{\partial \xi}{\partial k_1} = \frac{k_1 - 1}{4\sqrt{\frac{1}{k_1 \cdot a}} \cdot k_1^2 \cdot a}$ min. bei $k_1 = 1$

$\xi_{min} = \sqrt{\frac{1}{a}}$

- nicht Schwingfähig bei $\xi > 1$ → $a < 1$

d) $\omega_0 = \sqrt{8}$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$

LGS von vorher:

$2\varepsilon\omega_0 = k_1 + 1$

$\omega_0^2 = a k_1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{8}{3} \quad k_1 = 3$

e) $\omega_D = a$

$\varphi_R = \pi + \arg(G_{o1}(j\omega_D))$

$|G(ja)| \stackrel{!}{=} 1$

$\left|\frac{k_1(ja+a)}{(ja)^2+ja}\right| = 1$

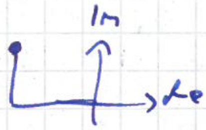
$\left|\frac{k_1 ja + k_1 a}{-a^2+ja}\right| = 1$

$\frac{k_1\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}} = 1 \quad \longrightarrow k_1 = \frac{\sqrt{2(a^2+1)}}{2}$

$\arg(G(ja)) = \cancel{\tfrac{3}{4}\pi}$ (mit eingesetztem k)

$\cancel{\varphi_R = \tfrac{\pi}{4}}$ $\quad = \arg\left(\frac{k_1(j+1)}{-a+j}\right)$

$= \arg(k_1 + k_1 j) - \arg(-a+j)$



$= \frac{\pi}{4} - \cancel{\arg}\arctan\left(\frac{1}{a}\right)$

$= \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(a)\right) \stackrel{!}{>} \frac{\pi}{4}$

4) $G_{o2}(s) = \frac{k_2}{s}\cdot\frac{3s+8}{s^2+4s+8}$ $\quad s_1 = 0 \quad s_{2,3} = -2 \pm 2j$

a) $T_2(s) = \frac{G_{o2}(s)}{1+G_{o2}(s)} = \frac{k_2(3s+8)}{s^3+4s^2+(3k_2+8)s+8k_2}$

Pol bei $s=-1$

$(-1)^3+4(-1)^2+(3k_2+8)(-1)+8k_2 \stackrel{!}{=} 0$

$-1+4-3k_2-8+8k_2$
$-5+5k_2 = 0$; $k_2 = 1$

Weitere Pole: $s^3+4s^2+11s+8 : (s+1) = s^2+3s+8$

$-(s^3+s^2)$
$3s^2$
$-(3s^2+3s)$
$8s$
0

$\rightarrow s_{2,3} = -\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{23}j)$

b) $k_{1,us} = \frac{b_{lqu}}{g_{rin}} \approx \frac{4,1}{1,45} = 2,828$

(-1, 0) liegt beim durchlaufen der Ortskurve für WS links (Linke Hand Regel)

→ $T_2(s)$ ist daher asymptotisch stabil

c) $s_{1,2} = -1,5 \pm 2,4j$

$$G_{02}(s) = \frac{k_2(3s+8)}{s(s^2+4s+8)}$$

Pole : $s_1 = 0$ $s_{2,3} = -2 \pm 2j$ $n = 3$

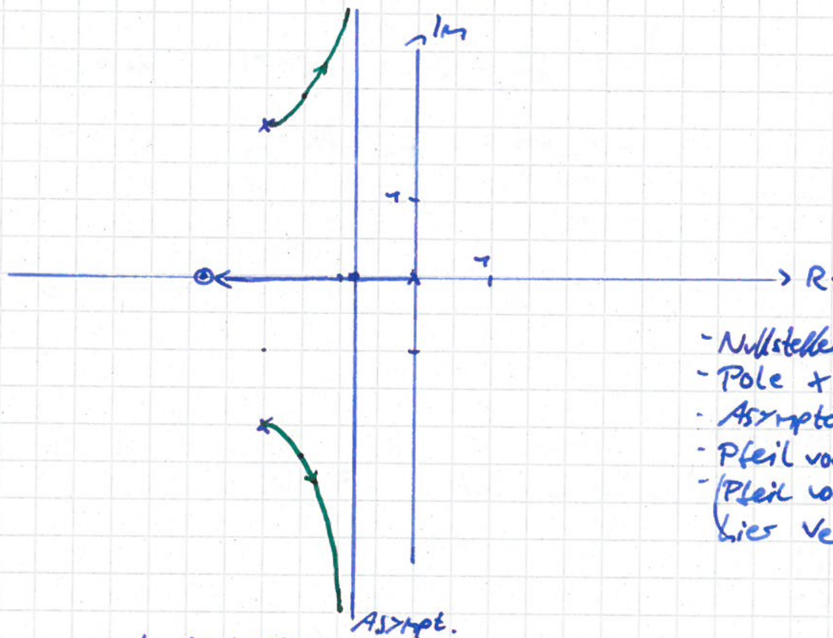
Nullst. : $p_1 = -\frac{8}{3}$ $m = 1$ (Zählergrad)

Asymptoten: $i = n-m = 2$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = \frac{0+(-2+2j)+(-2-2j)-(-\frac{8}{3})}{2} = -\frac{2}{3}$$

$$\beta_i = \frac{\pi(2i-1)}{n-m} \quad , i \in \{1,2\}$$

$\beta_1 = \frac{\pi}{2}$; $\beta_2 = \frac{3\pi}{2}$



- Nullstellen O einzeichnen
- Pole × einzeichnen
- Asymptotenwinkel von σ_a aus zeichnen
- Pfeil von kleinsten Pol zu Nullstelle
- (Pfeil von Pol zu Pol, wenn treffen hier Verzweigungspunkt)

(5) $$T_1(s) = \frac{k_1(s+a)}{s^2+s(k_1+1)+k_1 a}$$

a) $$G_{02}(s) = T_1(s) \cdot \frac{k_2}{s} = \frac{k_1 k_2(s+a)}{s^3+s^2(k_1+1)+k_1 a s}$$

$$T_2(s) = \frac{G_{02}(s)}{1+G_{02}(s)} = \frac{k_1 k_2 (s+a)}{s^3+(k_1+1)s^2+(a+k_2)k_1 s + a k_1 k_2}$$

b) Alle Koeffizienten im Nennerpolynom >0 für $a, k_1, k_2 > 0$

$$\Delta_2 := k_1(a+k_2)(k_1+1) - (a k_1 k_2) \overset{!}{>} 0$$

c) $\Delta_2 = (k_1+1)(k_1+a)k_1 - k_1k_2a > 0$

$= k_1^2k_2 + k_1^2a + k_1k_2 + ak_1 - k_1k_2a > 0$

$= \underbrace{k_2(k_1^2 + k_1 - k_1a)}_{k_2 \cdot f_1(a,k_1)} + \underbrace{k_1^2a + ak_1}_{f_2(a,k_1)} > 0$

$= k_2\underbrace{(k_1(k_1+1-a))}_{>0} \underbrace{+ak_1(k_1+1)}_{>0}$

- $k_1 + 1 - a > 0$

$k_1 + 1 > a$, wenn gilt $k_2 \cancel{k_1 \ldots} > 0$

Dann asymptotisch stabil

- Asymptotisch stabil $\forall\, k_{1,2} > 0 \mid a < 1$

d) $s^3 + (k_1+1)s^2 + (a+k_2)k_1s + ak_1k_2 \stackrel{!}{=} s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

Koeffizientenvergleich:

$k_1 + 1 = 3$

$(a+k_2)k_1 = 3$

$ak_1k_2 = 1$ $\quad \rightarrow \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 1 \quad a = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \quad k_1 = 2 \quad k_2 = \frac{1}{2} \quad a = 1$

e) $T_2(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$

$|T_2(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$

- $\omega_D \approx 0{,}7$

- $\left| \frac{k_1 k_2 (j\omega + a)}{\cancel{s} -j\omega^3 - (k_1+1)\omega^2 + (a+k_2)j\omega \cdot k_1 + ak_1k_2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \left| \frac{1}{(s+1)^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{|s+1|^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad s = j\omega_D$

$\frac{1}{\omega_D^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \omega_D = \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0{,}6436$

Regelung f22 ⑦

① $\ddot{y} + 3\dot{y} = u$

a) $G(s) = \frac{1}{s(s+3)}$ Pole bei $s_1 = 0$, $s_2 = -3$ 1

Alle Pole ≤ 0, mind. eines $= 0$ $\rightarrow$ Grenzstabil 2

b) $y_h(t) =$ ~~$C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t}$~~

$C_1 e^{0t} + C_2 e^{-3t} = C_1 + C_2 e^{-3t}$ 3

c) $\ddot{y} + 3\dot{y} = e^{-t}$; $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$

$y_p(t) = Ae^{-t}$

$\dot{y}_p(t) = -Ae^{-t}$

$\ddot{y}_p(t) = Ae^{-t}$ Einsetzen in AWP:

$Ae^{-t} - 3Ae^{-t} = e^{-t}$

$e^{-t}(A - 3A) = e^{-t}$ Koeffizientenvergleich

$-2A = 1$

$A = -\frac{1}{2}$ 2

$y_p(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}$

d) $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1 + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}$

$\dot{y}(t) = \dot{y}_h(t) + \dot{y}_p(t) = -3C_2 e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$

$y(0) = 0$

$\dot{y}(0) = 0$ Lösen des LGS liefert: $C_1 = \frac{1}{3}$ $C_2 = \frac{1}{6}$

$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}$ 4

② $k_1(s) = k_1$, $k_1 > 0$

$\xi \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\omega_D \geq 4$

a) $G_{o1}(s) = k_1 \cdot G(s) = \frac{k_1}{s(s+3)}$ 1

$T_1(s) = \frac{G_{o1}(s)}{1 + G_{o1}(s)} = \frac{k_1}{s(s+3) + k_1}$ 2

$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G_{o1}(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{s^2 + 3s + k_1}{s^2 + 3s + 2k_1} = \frac{1}{2} \neq 0$

Nicht stationär genau!

2

b) $\frac{s^2}{\cancel{s}} + 2\varepsilon\omega_0 \frac{s}{\cancel{s}} + \omega_0^2 \cancel{s} = s^2 + 3s + k_1$

Koeffizientenvergleich liefert:

$2\varepsilon\omega_0 = 3$

$\omega_0^2 = k_1 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{k_1} \; ; \quad \varepsilon = \frac{3}{2\sqrt{k_1}}$

$\frac{3}{2\sqrt{k_1}} \geq \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad k_1 \leq \frac{9}{2}$ 4

c) $|G_{o1}(4j)| \geq 1$

$\left|\frac{k_1}{(4j)^2 + 3(4j)}\right| \geq 1$

$\frac{|k_1|}{|-16+12j|} \geq 1$

$\frac{k_1}{20} \geq 1 \quad \rightarrow \quad k_1 \geq 20$ 2

d) Nein, weil k_1 nicht gleichzeitig ≥ 20 und $\leq \frac{9}{2}$ sein kann 2

3) $k_1(s) = k_1(s+a) \; ; \quad k_1, a > 0$

$G_{o1}(s) = k_1(s) \cdot G(s) = \frac{k_1(s+a)}{s(s+3)}$

a) $T_1(s) = \frac{G_{o1}(s)}{1+G_{o1}(s)} = \frac{k_1(s+a)}{s^2 + (k_1+3)s + ak_1}$ 1

$s^2 + 2\varepsilon\omega_0 s + \omega_0^2 = s^2 + (k_1+3)s + ak_1$

Koeffizientenvergleich liefert:

$2\varepsilon\omega_0 = k_1 + 3$

$\omega_0^2 = a k_1 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{ak_1}}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{ak_1}}(k_1+3)\right)$ 2

b) $\varepsilon_{min}(a) = \min\{\varepsilon(k_1, a) \mid k_1 > 0\}$

$\left(\sqrt{\frac{1}{ak_1}}\sqrt{(k_1+3)^2}\right)\frac{1}{2} = \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{k_1^2+6k_1+9}{ak_1}}\right)$ min bei Nullstelle des Zählers

↯

Regelung f22 (3)

c) $T_1(s) = \frac{k_1}{s(s+3)+k_1}$ mit Polen bei $s_{1,2} = -2 \pm j$

$s(s+3)+k_1 = 0$

I $(-2+j)((-2+j)+3)+k_1 = 0$

II $(-2-j)((-2-j)+3)+k_1 = 0$

$k_1 = 1 \pm j$

d) $T_1(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+5}$

$H_1(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{s+5}{s^2+4s+5} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{s^2+4s+5}$ 2

$s+5 = A(s^2+4s+5) + Bs + Cs^2$

$= As^2 + 4As + 5A + Bs + Cs^2$

$= s^2(A+C) + s(4A+B) + 5A$

koeffizientenvergleich liefert:

$4A + B = 1 \qquad B = -3$

$A + C = 0 \qquad C = -1$

$5A = 5 \qquad A = 1$

$H_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{3}{s^2+4s+5} - \frac{s}{s^2+4s+5}$

$= \frac{1}{s} - \frac{(s+2)+1}{(s+2)^2+1}$

$= \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{(s+2)^2+1}$

$\mathcal{L}: h_1(t) = 1 - e^{-2t}\cos(t) - e^{-2t}\sin(t)$

$= 1 - e^{-2t}(\cos(t) + \sin(t))$

8

④ $G_{02}(s) = \frac{k_2}{s} \cdot T_1(s) = \frac{k_2(s+5)}{s(s^2+4s+5)}$ ④

a) $T_2(s) = \frac{G_{02}(s)}{1+G_{02}(s)} = \frac{k_2(s+5)}{s^3+4s^2+(k_2+5)s+5k_2}$ 1

b) Nenner von $T_2(s)$ für Pole

$s^3+4s^2+(k_2+5)s+5k_2 = 0 \qquad s=j\omega$

$(j\omega)^3+4(j\omega)^2+(k_2+5)(j\omega)+5k_2 = 0$

$-j\omega^3-4\omega^2+k_2 j\omega+5j\omega+5k_2 = 0$

$j(-\omega^3+k_2\omega+5\omega)+5k_2-4\omega^2 = 0$

$j\,\underbrace{(\omega(-\omega^2+k_2+5))}_{=0}+\underbrace{(5k_2-4\omega^2)}_{=0} = 0$

$k_2 = \frac{\omega^2-5}{5} \qquad k_2 = \frac{4\omega^2}{5} \qquad \omega = 1$

$k_2 = 20$ für $\omega = 5$

$s^3+4s^2+25s+100 = 0$

$s_1 = -4, \quad s_{2,3} = \pm 5j$ 1

c) Pol von $s_1 = -1$

$(-1)^3+4(-1)^2+(k_2+5)(-1)+5k_2 = 0$

$-1+4-k_2-5+5k_2 = 0$

$-2+4k_2 = 0$

$k_2 = \frac{1}{2}$

$s^3+4s^2+\frac{11}{2}s+\frac{5}{2} = 0$

$2s^3+8s^2+11s+5 = 0$ Polynomdivision

$(2s^3+8s^2+11s+5):(s+1) = 2s^2+6s+5$
$-(2s^3+2s^2)$
$6s^2$
$-(6s^2+6s)$
$5s$
$-(5s+5)$
0

$\longrightarrow s_{2,3} = \frac{1}{2}(-3 \pm j)$ 1

d) $G_{02}(s) = \dfrac{k_2(s+5)}{s(s^2+4s+5)}$

Pole : $s_1 = 0$; $s_{2,3} = -2 \pm j$ $\qquad n = 3$

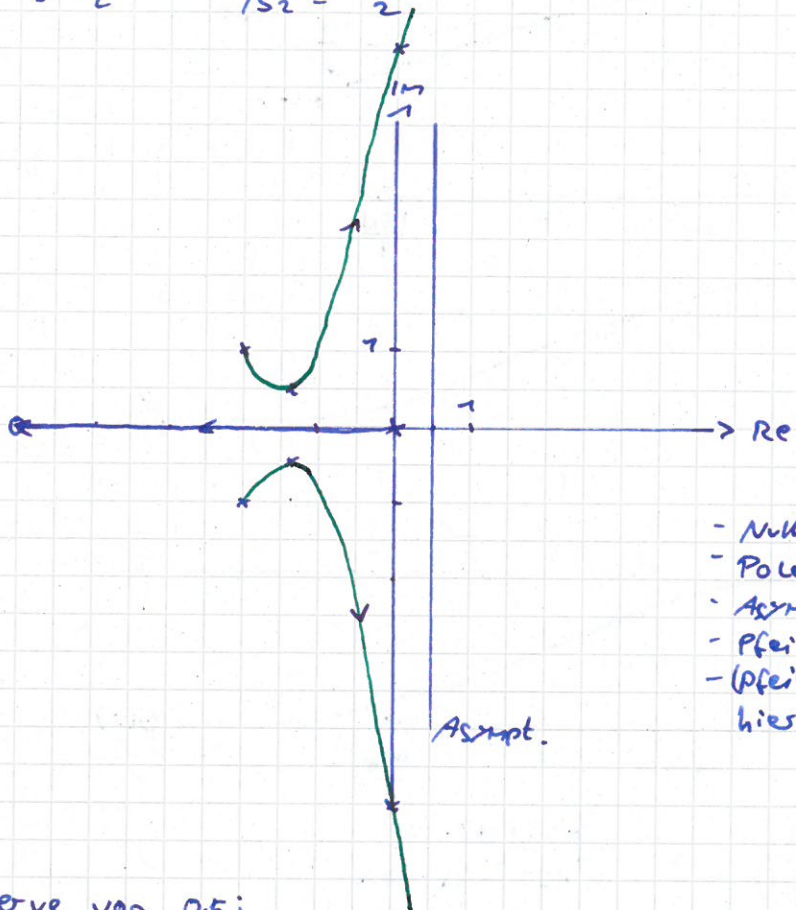
Nullst. : $z_1 = -5$ $\qquad m = 1$

Asymtoten: $i = m - n = 2$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{m-n} = \frac{0 + (-2+j) + (-2-j) - (-5)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\beta_i = \frac{\pi(2i-1)}{n-m} \quad , i \in \{1, 2\}$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \beta_2 = \frac{3\pi}{2}$$



- Nullstellen o einzeichnen
- Pole x einzeichnen
- Asymptotenwinkel von σ_a aus zeichnen
- Pfeil von kleinsten Pol zu Nullstelle
- (Pfeil von Pol zu Pol, kein treffen hier verzweigungspunkt)

7

e) - Reserve von 0,5 j

- As. stabil : s_3 liegt innerhalb LHE
  ~~insta~~
  instabil : s_3 liegt innerhalb RHE

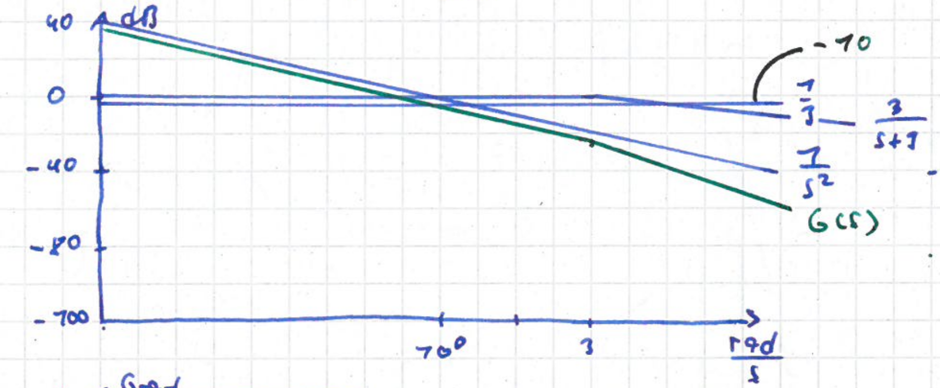
5 $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s+3)}$

$K(s) = k(s+a)$ $\quad k, a > 0$

$G_0(s) = \dfrac{k(s+a)}{s^2(s+3)}$

a) Grenzstabil, weil Pole $s_{1,2} = 0$, $s_3 = -3 \leq 0$, mind. ein Pol auf im-Achse -> Grenzstabil.

b) $G(s) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{3}{s+3}$



1

1

c) $T(s) = \dfrac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \dfrac{k(s+a)}{s^3+3s^2+ks+ak}$ 1

Hurwitz: Polynom 3. Grades im Nenner, alle Koeffizienten größer 0 für $k, a > 0$

$\Delta_2 = k \cdot 3 - ak \cdot 1 \overset{!}{>} 0$

$\Rightarrow k(3-a) > 0 \quad \rightarrow a < 3$ 3

Asympt. stabil für $\{\forall k, a \mid k(3-a) > 0\}$

d) $(s+c)(s^2+2c\cdot s+\omega_0^2) = s^3+3s^2+ks+ak$ 1

$\Rightarrow s^3+(3c)s^2+(\omega_0^2+2c^2)s+c\omega_0^2 = s^3+3s^2+ks+ak$

$3c = 3$
$\omega_0^2+2c^2 = k$
$c\omega_0^2 = ak \quad \longrightarrow \quad a = \dfrac{\omega_0^2}{\omega_0^2+2} \quad c = 1 \quad k = \omega_0^2+2$ 3

1
Regelung f22 (4)

e) $(s+c)(s^2+2cs+\omega_0^2) = s^3+3s^2+ks+\alpha k$

$\Rightarrow s^3+3s^2+(\omega_0^2+2)s+\omega_0^2 = s^3+3s^2+(\omega_0^2+2)s+$

ϟ

f) ~~$k|_{dB} \approx \frac{7,7}{3,2} = 2,469$~~ ≈

~~Max Phasenreserve bei $\varphi = f < 45°$~~

$k|_{dB} \approx 12,5\,dB \quad \rightarrow k \approx 4$

$\varphi_R \approx 45°$

$\omega_D \approx 1,2$ 3

g) $k|_{dB} \approx \frac{7,7}{3,2} = 2,469\,dB$ 5

$10^{\frac{2,469}{20}} = 1,329 = k$

82/100

Regelung h22

1

a) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 5u$

$$G(s) = \frac{5}{s^2+4s+5}$$

Asymptotisch stabil, weil $\mathrm{Re}(\underset{-2}{\lambda_i}) < 0$ für $i = 1,2$

b) $\dot{x} = Ax + bu$, $y = c^T \cdot x + du$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$$

↯ Eigentlich nur 2x2, nicht 3x3

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u$$

c)

$\cancel{G(s) = \frac{A+Bs}{s^2+4s+5}}$

Annahme: $y(t) = e^{t\alpha}$ $\quad \dot{y}(t) = \alpha e^{t\alpha}$ $\quad \ddot{y}(t) = \alpha^2 e^{t\alpha}$

$$\alpha^2 e^{t\alpha} + 4\alpha e^{t\alpha} + 5 e^{t\alpha} = 0$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -2 \pm j$$

$$y_h(t) = A\sin(t)\,e^{-2t} + B\cos(t)\,e^{-2t}$$
$$= e^{-2t}\left(A\sin(t) + B\cos(t)\right)$$

d)

$\cancel{y_p(t) = A\sin(t)e^{-2t} + B\cos(t)e^{-2t}}$

$\cancel{\dot{y}_p(t) = ((A-2B)\cos(t) + (-2A-B)\sin(t))e^{-2t}}$

$\cancel{\ddot{y}_p(t) = -((4A-3B)\cos(t) - (3A+4B)\sin(t))e^{-2t}}$

2

d) $\ddot{y}+4\dot{y}+5y=5$

Partikuläre Lösung in Form einer Konstanten

$y_p(t)=A \qquad \dot{y}_p(t)=0 \qquad \ddot{y}_p(t)=0$

$0+4\cdot 0+5\cdot A=5$

$A=1$

$y_p(t)=1$

e) $y(t)=y_h(t)+y_p(t) = e^{-2t}(A\sin(t)+B\cos(t))+1$

$y(0)=0 \quad ; \quad \dot{y}(0)=0$

$\dot{y}_h(t)=e^{-2t}((A-2B)\cos(t)-(2A+B)\sin(t))$

$y(0)=0 \;\to\; B+1=0 \;\to\; B=-1$

$\dot{y}(0)=0 \;\to\; A+2=0 \;\to\; A=-2$

$y(t)=e^{-2t}(-2\sin(t)-\cos(t))+1$

2 $y_{stat}(t)=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi) \qquad u(t)=\sin(t) \qquad \omega=1$

a) $\frac{\Delta t}{5s}=\frac{4M}{23mm} \Rightarrow \Delta t\approx 0,87$

$\varphi=-\omega\cdot\Delta t=-0,87\cdot 96=49,85°$

$A=\frac{\text{Amplitude vorher}}{\text{Amplitude nachher}} = \frac{39mm}{45mm}=0,87$

b) $A|_{dB}\approx 1\,dB = 0,89$

$\varphi \approx -45°$

c) $|G(j\omega)|=A \qquad A=\left|\frac{5}{(j)^2+4j+5}\right|=\frac{5}{|4j+4|}=\frac{5}{4\sqrt{2}}\approx 0,8839$

$\varphi = \arg(G(j\omega)) = -\frac{\pi}{4}=-45°$

Regelung 422

3 $\cancel{R(s)}\; k(s) = k \qquad k>0$

$$G_0(s) = \frac{5k}{s^2+4s+5}$$

a) $$T(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{5k}{s^2+\underbrace{4s}_{2\xi\omega_0}+\underbrace{5(k+1)}_{\omega_0^2}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{5(k+1)}$$

$$\xi = \frac{2\sqrt5}{5\sqrt{k+1}} = \frac{4}{2\omega_0} = \frac{2}{\sqrt{5(k+1)}}$$

$$\xi \geq \frac{1}{\sqrt2} = \frac{2}{\sqrt8}$$

$$\sqrt{5(k+1)} \leq \sqrt8$$

$$k \leq \frac85 - 1$$

$$k \leq \frac35$$

b) $$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{s^2+4s+5}{s^2+4s+5(k+1)} = \frac{5}{5(k+1)} = \frac{1}{k+1} \overset{!}{\leq} 0{,}1$$

$$k > 9$$

c) $k = \frac35$

$$H(s) = \frac1s \cdot T(s) = \frac{3}{s\cdot(s^2+4s+8)} = \frac{3}{s(s+2)^2+4s}$$

$$\cancel{\frac{3}{(s+2)(s-2)t}}$$

$$\cancel{h(t)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+8}$$

$$= A(s^2+4s+8) + Bs^2 + Cs$$

$$= As^2 + 4sA + 8A + Bs^2 + Cs$$

$$= s^2(A+B) + s(4A+C) + 8A$$

$A+B = 0 \qquad B = -\frac38$

$4A+C = 0 \qquad C = -\frac32$

$8A = 3 \qquad A = \frac38$

$$H(s) = \frac{3/8}{s} + -\frac{3/8\,s + 3/2}{s^2+4s+8} = \frac{3/8}{s} - \frac{3/8\,s}{(s+2)^2+4} - \frac{3/2}{(s+2)^2+4}$$

$$h(t) = \frac38 - \frac38 e^{-2t}(\cos(2t) - \sin(2t)) - \frac32\frac12 e^{-2t}\cdot\sin(2t)$$

$$= \frac38 - e^{-2t}\left(+\frac38\cos(2t) + \frac98\sin(2t)\right)$$

$$= \frac38\left(1 - e^{-2t}(+\cos(2t) + 3\sin(2t))\right)$$

d) $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$

$e(t) = 1 - h(t) = \frac{1}{8}\left(5+3e^{-2t}(\sin(2t)+\cos(2t))\right)$

$u(t) = k\cdot e(t) = \frac{3}{5}\, e(t) = \frac{3}{40}\left(5+3e^{-2t}(\sin(2t)+\cos(2t))\right)$

$e_{ss} = \cancel{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{5}{8}$

4 $K(s) = \frac{k(s+a)}{s}$ $k,a>0$

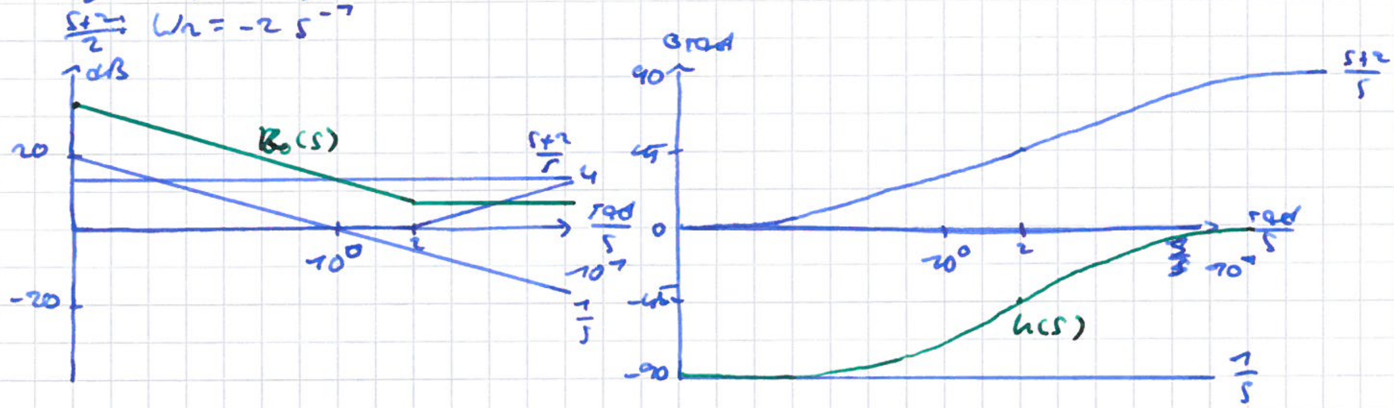
$G_0(s) = \frac{5\cdot k(s+a)}{s(s^2+4s+5)}$

a) $a = k = 2 \to k(s) = 4\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{s+2}{2}$

4: $k_p = 12{,}04\ \text{dB}$

$\frac{1}{s}$: $\omega_1 = 0\ s^{-1}$

$\frac{s+2}{2}$: $\omega_2 = -2\ s^{-1}$



b) $T(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{5k(s+a)}{s^3+4s^2+5\cdot(k+1)\cdot s+5ak}$

Nenner ist Polynom dritten grades:

$s^3 + \underbrace{4}s^2 + \underbrace{5(k+1)s} + \underbrace{5ak} > 0$ für $a,k>0$

Alle koeffizienten größer 0

$\Delta_2 = 5(4(k+1))\cdot 1 - (5ak)\cdot 1 \overset{!}{>} 0$

$= 20k^2 + 20k - 5ak$

$= 20(k+1) - (5ak)$ $20(k+1) - 5(ak) \overset{!}{>} 0$

$4(k+1) - ak \overset{!}{>} 0$

Regelung 422

c) $\underbrace{4k(k+1)}_{>0} - ak > 0$ bei $k>0$!

$\underbrace{4(k+1)}_{>0} - a > 0$

$a < 4$

d) $\omega_D = 2$

$\varphi_R \approx 70°$

$k|_{dB} \approx 3\ dB$ $\quad 10^{\frac{3}{20}} = 1,413$

e) $|G(j\omega)| = 1$

$$\left| \frac{5k(j\omega+a)}{j\omega((j\omega)^2+4(j\omega)+5)} \right| = 1 \qquad \omega = 2$$

$$\left| \frac{5k((j\omega)+a)}{-j\omega^3 - 4\omega^2 + 5j\omega} \right| = 1 \qquad a=1$$

$$\left| \frac{5k(2j+1)}{-j\cdot 8 + 10j - 16} \right| = 1$$

$$\frac{5\sqrt{13}\,k}{26} = 1$$

$$k = \pm \frac{2\sqrt{13}}{5} \quad \rightarrow \quad k = 1,442$$

f) $a=5$, $k=1$

- Wind-Richtung (?)
- LHR -> $(-1,0)$ liegt links von $G(j\omega)$ -> asympt. stabil
- $z \approx -0,25$

  $k_{krit} = k_a \cdot \frac{-1}{z} = 4$
- $A_R = 10$

  $\frac{k_{krit}}{k_{10}} = 10 \rightarrow k_{10} = 0,4$
- $4(k+1) - ak > 0$ $\qquad a=5$

  $k = 4$ (Etwas andere Formel als in Lösung...

⑤ ⑥

$$h(s) = \frac{k(s+a)(s+b)}{s} \qquad \text{mit } k,a,b > 0$$

$$G_0(s) = \frac{5k(s+a)(s+b)}{s(s^2+4s+5)}$$

a) $$T(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{5\cdot k\cdot(s+b)(s+a)}{s^3+(5k+4)s^2+5(ak+bk+1)s+5abk}$$

b) $a=2 \quad b=3 \quad s_1=-1$

Pole: $s^3+(5k+4)s^2+5(2k+3k+1)s+30k = 0$

Polynomdivision

$$0 = (-1)^3+(5k+4)(-1)^2+5(ak+bk+1)(-1)+5abk$$

$$k = \frac{1}{5}$$

$$s^3+5s^2+10s+6 : (s+1) = s^2+4s+6$$

$$\begin{array}{l} -(s^3+s^2) \\ \quad 4s^2 \\ \quad -(4s^2+4s) \\ \qquad 6s \\ \qquad -(6s+6) \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$s_{2,3} = -2 \pm \sqrt{2}\,i$$

c) $a=2, \quad b=3 \quad k=8{,}3$

$$\cancel{\frac{47{,}5(s+3)(s+2)}{s^3+45{,}5s^2+202{,}5s+249}}$$

~~Pole~~

$$G_0(s) = \frac{5k(s+2)(s+3)}{s(s^2+4s+5)} \qquad \text{Zählergrad } m = 2$$

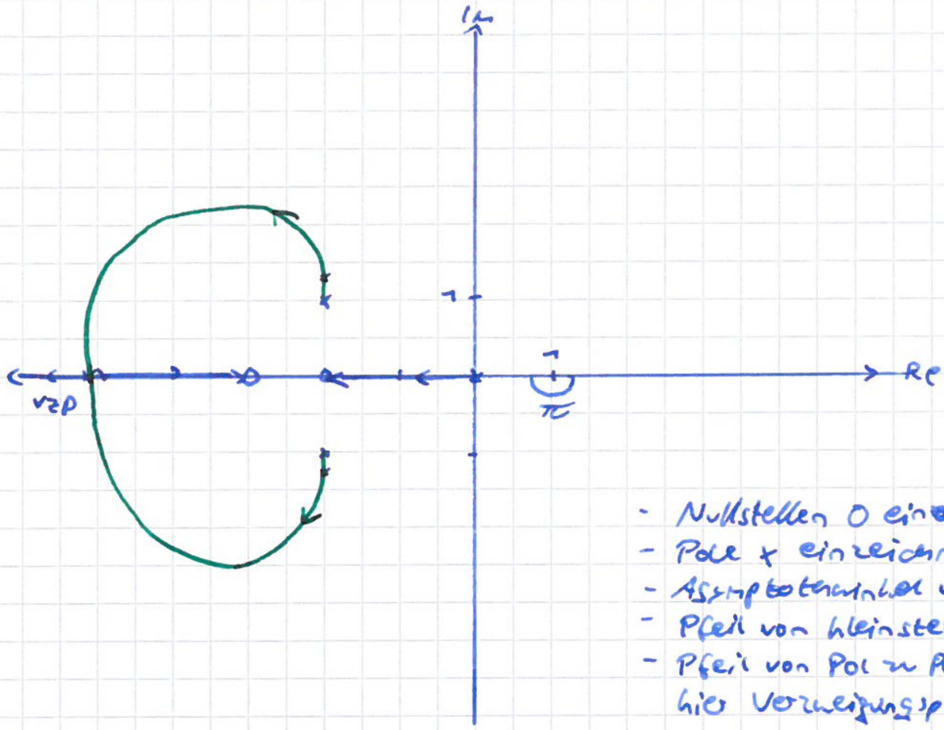
Pole: $s_1=0, \; s_2=-2+i, \; s_3=-2-i$ $\qquad$ $n=3$ $\qquad$ Asymptoten: $i=n-m=1$

Nullstellen: $s_1=-2 \quad s_2=-3$

$$\sigma_a = \frac{0+(-2+i)+(-2-i)-(-2)-(-3)}{3-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = 1$$

$$\beta_i = \frac{\pi(2i-1)}{n-m}; \quad \beta_1 = \pi$$

c)



- Nullstellen O einzeichnen
- Pole x einzeichnen
- Asymptotenwinkel von σa aus zeichnen
- Pfeil von kleinsten Pol zu Nullstelle
- Pfeil von Pol zu Pol, wenn treffen hier Verzweigungspunkt

d)

k-intervall	Stabilität	Anzahl reeller Pole	Anzahl komplexer Pole
$0 \leq k < k_{vzp}$	Ja	1	2
$k_{vzp} < k < \infty$	Ja	3	0

e) $u(t) = k_P \cdot e(t) + k_I \int_0^t e(\tau)\,d\tau + k_D \cdot \dot{e}(t)$

$U(s) = k_P\, E(s) + k_I \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s) + k_D \cdot s \cdot E(S)$

$= E(s) \underbrace{\left(k_P + k_I \frac{1}{s} + k_D \cdot s\right)}_{k(s)}$ (weil aus Diagramm: $U(s) = E(s) \cdot k(s)$)

- $k(s) = \frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}$

- $5k(s+a)(s+b) = 5ks^2 + 5aks + 5bks + 5abk$

$= s^2(5k) + s(5ak + 5bk) + 5abk$

$k_D = k$

$k_P = k(a+b)$

$k_I = kab$

1) $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u$

a) $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 1} = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

Asymptotisch stabil, weil $R(\lambda_i) < 0$ für alle $i \in \{1,2\}$
↳ Pole

b) $\ddot{y}_h + 2\dot{y}_h + y_h = 0$; $y_h(0) = y_{h0}$, $\dot{y}_h(0) = \dot{y}_{h0}$

$$s^2 \cdot Y_h(s) - s \cdot y_{h0} - \dot{y}_{h0} + 2s\,Y_h(s) - 2y_{h0} + Y_h(s) = 0 \qquad (\mathcal{L})$$

$$Y_h(s) = \frac{s \cdot y_{h0} + 2 \cdot y_{h0} + \dot{y}_{h0}}{s^2 + 2 \cdot s + 1} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

$$= \frac{A(s+1) + B}{(s+1)}$$

$$= As + A + B \qquad A = y_{h0} \ ; \ B = y_{h0} + \dot{y}_{h0}$$

$$y_h(t) = y_{h0}\, e^{-t} + (y_{h0} + \dot{y}_{h0})(t\, e^{-t})$$

$$= e^{-t}\left(y_{h0} + (y_{h0} + y_{h0}) \cdot t \right)$$

c) $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = \sin(t)$; $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$

$y_p(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$

$\dot{y}_p(t) = A\cos(t) - B\sin(t)$

$\ddot{y}_p(t) = -A\sin(t) - B\cos(t)$

$-A\sin(t) - B\cos(t) + 2(A\cos(t) - B\sin(t)) + A\sin(t) + B\cos(t) = \sin(t)$

$\sin(t)(-A - 2B + A) + \cos(t)(-B - 2A + B) = \sin(t)$

c) Koeffizientenvergleich liefert:

$A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$

$y_p(t) = -\frac{1}{2}\cos(t)$

$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$

$y(0) = 0 \quad \to \quad y_p(0) + y_h(0) = 0 \quad \to \quad y_h(0) = \frac{1}{2}$

$\dot{y}(0) = 0 \quad \to \quad \dot{y}_p(0) + \dot{y}_h(0) = 0 \quad \to \quad \dot{y}_h(0) = 0$

$y_h(t) = e^{-t}(y_{h0} + (y_{h0} + \dot{y}_{h0})t)$

$= e^{-t}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t)$

$y(t) = \frac{1}{2}(-\cos(t) + e^{-t}(1+t))$

d) $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)^2}$

$y_p(t) = A\sin(t+\varphi)$

$A = |G(j\omega)|$; $\omega = 1$

$= \left|\frac{1}{-1+2j+1}\right| = \frac{1}{2}$

$\varphi = \arg(G(j\omega)) = -\frac{\pi}{2}$

$y_p(t) = \frac{1}{2}\sin(t-\frac{\pi}{2})$

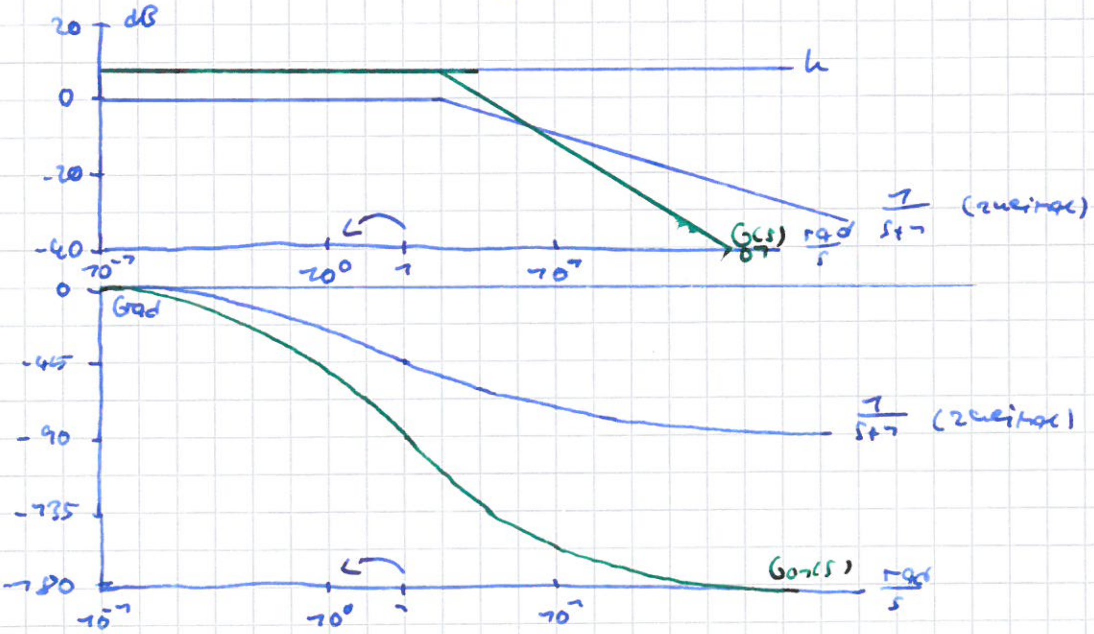
(2) $h_1(s) = k_1$

a) $k_1 = 2$

2 : $k_p = 6{,}021$ dB

$\frac{1}{(s+1)^2}$: $\omega_{01,02} = 1\,s^{-1}$

$G_{01}(s) = k_1 \cdot G(s) = 2 \cdot \frac{1}{(s+1)^2}$



b) $T_1(s) = \frac{G_{01}(s)}{1+G_{01}(s)} = \frac{k_1}{s^2+2s+k_1+1}$

Pole: $s^2+2s+k_1+1 = 0$

$(s+1)^2 + k_1 = 0$

$s_{1,2} = \pm(\sqrt{k_1}\, j - 1)$ $\rightarrow$ $k_1 = 4$, damit $\mathrm{Im}(s_{1,2}) = 2$

c) $T_2(s) = \frac{G_{02}(s)}{1+G_{02}(s)}$

$G_{02}(s) = \frac{k_2}{s} \cdot T_1(s) = \frac{k_1 k_2}{s(s^2+2s+k_1+1)}$

$T_2(s) = \frac{k_1 k_2}{s^3+2s^2+(k_1+1)s+k_1 k_2} = \frac{4k_2}{s^3+2s^2+5s+4k_2}$

d) Ansatz Nenner: $(s+c)(s^2+ds+4) = s^3+(c+d)s^2+(c\cdot d+4)s+4c$

Koeffizientenvergleich mit $T_2(s)$:

I : $c+d = 2$

II : $cd+4 = 5$

III : $4c = 4k_2$ ~~...~~

$k_2 = 1$; $c = 1$; $d = 1$

e) $(s^3+(1+1)s^2+(1\cdot 1+4)s+4\cdot 1)$

$= s^3+2s^2+5s+4 = 0 = (s+1)(s^2+s+4)$

Pole : $s_1 = -1$; $s_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-15})$

f) $A_R = -\frac{1}{2} = 2{,}5$

$k_{2,krit} = -\frac{1}{2} \cdot k_2 = 2{,}5$

g) $s = j\omega$

$T_2(j\omega)$ ~~→~~ Pol : $(j\omega)^3+2(j\omega)^2+5(j\omega)+4k_2 = 0$

$\Rightarrow$ $-j\omega^3 - 2\omega^2 + 5j\omega + 4k_2 = 0$

$j\omega\underbrace{(-\omega^2+5)}_{=0} - \underbrace{(2\omega^2 - 4k_2)}_{=0}$

$\omega = \pm\sqrt{5}$; $k_2 = \frac{5}{2}$

h) $G_{02}(s) = \dfrac{\frac{4}{k_{krit} k_2}}{s(s^2 + 2s + \frac{4}{4} + 1)}$ (4)

Zählergrad: $0 = m$

Pole : $s_1 = 0$; $s_{2,3} = -1 \pm 2j$ $n = 3$

keine Nullstellen

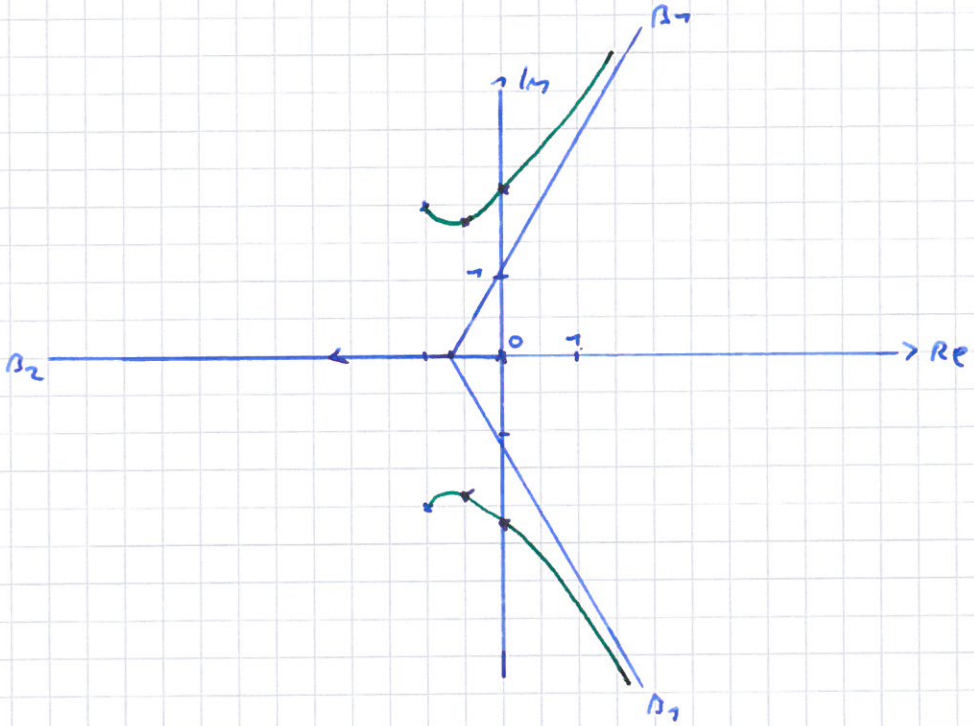
Asymptoten $i = n - m = 3$

Wurzelschwerpunkt: $\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = \dfrac{0 + (-1+2j) + (-1-2j)}{3}$

$= -\frac{2}{3}$

Richtungswinkel des Asymptoten: $\beta_i = \dfrac{\pi \cdot (2i-1)}{n-m}$; $i = 1, 2, \ldots, n-m$

$\beta_1 = \frac{\pi}{3}$; $\beta_2 = \pi$; $\beta_3 = \frac{5\pi}{3}$



- Nullstellen o einzeichnen
- Pole x einzeichnen
- Asymptotenwinkel von σ_a ausgehend einzeichnen
- Pfeil von kleinsten Pol zu Nullstelle
- Pfeil von Pol zu Pol, wenn treffen hier Verzweigungspunkt.

i) $k_{2,krit} = k_2$ aus g) : $k_2\ krit = 2{,}5$

$AR = \dfrac{k_{2,krit}}{k_2}$

$AR = 2{,}5$

3 $\quad k_1(s) = k_1(s+a) \qquad k_1, a > 0$

$G_{01}(s) = k_1(s)\cdot G(s) = \frac{k_1(s+a)}{(s+1)^2}$

a) $T_1(s) = \frac{G_{01}(s)}{1+G_{01}(s)} = \frac{k_1(s+a)}{s^2+(k_1+2)\cdot s + a\cdot k_1 + 1}$

Nenner: $s^2 + k_1\cdot s + 2\cdot s + a\cdot k_1 + 1$

$= \underbrace{(s+1)^2}_{\geq 0} + k_1(s+a)$

$= s^2 + \underbrace{k_1 s}_{} + \underbrace{2s}_{} + \underbrace{a\cdot k_1 + 1}_{}$

Alle Koeffizienten sind für $a, k_1 > 0$ auch > 0

$T_1(s)$ ist also asymptotisch stabil

b) $e_{1,ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_{01}(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{(s+1)^2}{s^2+(k_1+2)\cdot s + a\cdot k_1+1} = \frac{1}{ak_1+1}$

c) $T_1(s) = \frac{k_1(s+a)}{s^2+(k_1+2)s + ak_1+1}$

$= \frac{k_1(s+a)}{(s+1)^2 + k_1 s + ak_1}$

$= \frac{k_1(s+a)}{(s+1)^2 + k_1(s+a)}$

$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0 \varepsilon s + \omega_0^2}$

Koeffizientenvergleich: (Nenner)

I $\quad k_1 + 2 = 2\omega_0 \varepsilon \qquad ; \varepsilon = 1$

II $\quad a k_1 + 1 = \omega_0^2$

$\omega_0 = 2a-1 \quad ; \; k_1 = 4(a-1)$
$\omega_{0,1} = 1 \quad ; \; k_{1,1} = 0$

d) $G_{01}(s) = \frac{k_1(s+a)}{(s+1)^2} \quad ; \; \omega_D = a$

$G_{01}(j\omega) = \frac{k_1(ja+a)}{(ja+1)^2} = \frac{k_1(ja+a)}{-a^2+2ja+1}$

Durchtrittsfrequenz:

$|G_{01}(j\omega)| = 1$

$k_1 = \frac{-(a^2+1)\sqrt{2}}{2a}$

e) $T_1(s)$ mit Polen $s_1 = -2,\ s_2 = -3$ ⑥

$$T_1(s) = \frac{h_1(s+a)}{(s+1)^2 + h_1(s+a)}$$

$$(s+1)^2 + h_1(s+a) = (s+2)(s+3)$$

$$s^2 + 2s + 1 + h_1 s + h_1 a = s^2 + 3s + 2s + 6$$

$$s^2 + s(2+h_1) + h_1 a + 1 = s^2 + 5s + 6$$

Koeffizientenvergleich:

I $2 + h_1 = 5$ $\qquad h_1 = 3$

II $h_1 a + 1 = 6$ $\qquad a = \frac{5}{3}$

$$T_1(s) = \frac{\cancel{h_1(s+a)}\ 3(s+\frac{5}{3})}{(s+1)^2 + 3(s+\frac{5}{3})}$$

$$= \frac{3s+5}{(s+1)^2 + 3s+5}$$

$$= \frac{3s+5}{(s+2)(s+3)}$$

④

a) $$T_1(s) = \frac{h_1(s+a)}{s^2 + \cancel{\quad}(h_1+2)s + a\cdot h_1 + 1}$$

$$G_{02}(s) = \frac{h_2}{s} T_1(s)$$

$$= \frac{h_1 h_2 (s+a)}{s(s^2 + (h_1+2)\cdot s + a h_1 + 1)}$$

$$T_2(s) = \frac{G_{02}(s)}{1 + G_{02}(s)} = \frac{h_1 h_2 (s+a)}{s^3 + \underbrace{(h_1+2)s^2}_{} + \underbrace{(a h_1 + h_2 h_1 + 1)s}_{} + \underbrace{a h_1 h_2}_{}}$$

b) Nenner von $T_2(s)$ ist Polynom 3. Ordnung

Koeffizienten positiv für $a, h_1, h_2 > 0$

$$\Delta_2 = (a h_1 + h_1 h_2 + 1)(h_1 + 2) - (a h_1 h_2) > 0$$

$$= a h_1^2 + h_1^2 h_2 + h_1 + 2 a h_1 + 2 h_1 h_2 + 2 - a h_1 h_2 > 0$$

$$= \underbrace{(a h_1^2 + h_1 + 2 a h_1 + 2)}_{f_1(a, h_1)} + \underbrace{h_2(h_1^2 + 2h_1 - a h_1)}_{h_2 \cdot f_2(a, h_1)} > 0 \qquad \text{stabil bei } \Delta_2 > 0$$

c) Asymptotisch stabil für $h_1^2 + 2h_1 \geq a h_1$

$h_1 + 2 \geq a$ $\qquad$ ~~[illegible]~~ $h_2 \geq 0$

(keine Musterlösung ...)

5

$$T_1(s) = \frac{3s+5}{(s+2)(s+3)}$$

$$G_{o2}(s) = \frac{h_2(3s+5)}{(s+2)(s+3)s}$$

a)

$$T_2(s) = \frac{G_{o2}(s)}{1+G_{o2}(s)} = \frac{h_2\cdot(3s+5)}{s^3+5s^2+3(h_2+2)s+5h_2}$$

Pol bei -1 :

$$(-1)^3+5\cdot(-1)^2+3(h_2+2)\cdot(-1)+5\cdot h_2 = 0$$

$$-3h_2-2+5h_2 = 0$$

$$h_2 = 1$$

Nennerpolynom mit $h_2 = 1$

$$s^3+5s^2+9s+5 : (s+1) = s^2+4s+5$$

$$\begin{array}{l} -\ (s^3+s^2) \\ \hline \quad 4s^2 \\ \quad -\ (4s^2+4s) \\ \hline \qquad 5s \\ \qquad -\ (5s+5) \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

Nennerpolynom: $(s^2+4s+5)(s+1)$

Weitere Pole liegen bei $-2\pm j$

b) $60^\circ = \frac{\pi}{3}\,\text{rad} \approx 1{,}047\,\text{rad}$

$h_2/_{dB} = 9 = 2{,}818$

1 $1\ddot{y}+3\dot{y}+2y=2u$

a) $G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$

$Re(\lambda_i)<0 \quad \forall i \in \{0,1\}$

$\hookrightarrow$ Asymptotisch stabil

b) Homogene Lösung $y_h(t) \overset{!}{=} C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

c) $u(t)=t$

$y_p(t) : At+B$

$\ddot{y}+3\dot{y}+2y = 2t$

$3(A)+2(At+B) = 2t$

$3A+2At+2B = 2t$

I $3A+2B = 0 \qquad B=-\frac{3}{2}$

II $2A = 2 \qquad A=1$

$y_p(t) = t-\frac{3}{2}$

d) $\ddot{y}+3\dot{y}+2y=2t \;;\; y(0)=0 \;;\; \dot{y}(0)=0$

Annahme aus b): $y(t)_h = C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$

$\dot{y}(t) = -C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t}$

$\ddot{y}(t) = C_1e^{-t}+4C_2e^{-2t}$

$y(t) = y_h+y_p = t-\frac{3}{2}+C_1e^{-t}+C_2e^{-2t} \qquad \dot{y}(t) = 1-C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t}$

$y(0)=0 \rightarrow 0-\frac{3}{2}+C_1+C_2 = 0$

$\dot{y}(0)=0 \rightarrow 1-C_1-2C_2 = 0$

$C_1 = 2 \;;\; C_2 = -\frac{1}{2}$

$y(t) = t-\frac{3}{2}+2e^{-t}-\frac{1}{2}C_2e^{-2t}$

e) $u(t) = \sin(t)$

$y_s(t) = A \cdot \sin(t + \varphi)$

$G(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)(j\omega+1)}$ $\qquad \omega = 1$, aber warum?

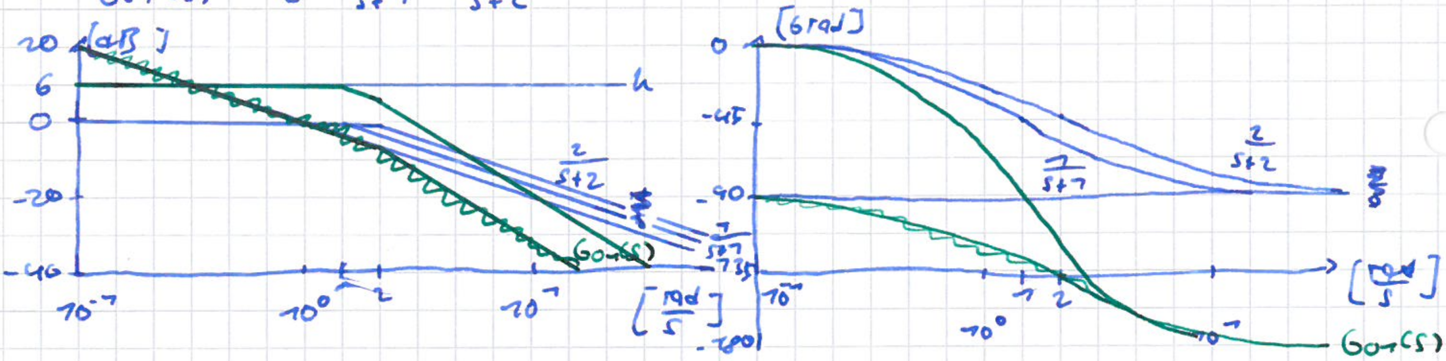
$A = |G(j)| = \left| \frac{2}{-1+j+2j+2} \right| = \left| \frac{2}{\sqrt{3^2+1^2}} \right| = 0{,}6325$

$\varphi = \arg(G(j)) = -71{,}57°$

2 $\quad k_1(s) = k_1 \qquad k_1 > 0$

a) $k_1 = 2 \qquad G_{01}(s) = k_1 \cdot G(s)$

$G_{01}(s) = 2 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{2}{s+2}$



$\frac{2}{s+2}$: $\omega_2 = |s_2| = 2\,s^{-1} \qquad \omega_{02} = 2\,s^{-1}$

2: $k_p = 20 \log_{10}(2) = 6{,}021$

$\frac{1}{s+1}$: $\omega_3 = |s_3| = 1\,s^{-1} \qquad \omega_{03} = 1\,s^{-1}$

b) $G_{01} = k_1 \cdot G(s) = \frac{2k_1}{(s+1)(s+2)}$

$T_1(s) = \frac{G_{01}(s)}{1+G_{01}(s)} = \frac{2k_1}{s^2+3s+2k_1+2}$ $\qquad$ ↯ ?

$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0 \xi \cdot s + \omega_0^2}$

3 $\quad k_1(s) = k_1(s+a) \qquad k_1, a > 0$

$G_{01}(s) = k_1(s) \cdot G_1(s)$

$= \frac{2 \cdot k_1(s+a)}{(s+1)(s+2)}$

a) $T(s) = \frac{G_{01}(s)}{1+G_{01}(s)} = \frac{2 \cdot k_1(s+a)}{s^2 + \underbrace{(2k_1+3)}_{>0} \cdot s + \underbrace{2(ak_1+1)}_{>0}}$

Polynom 2. Grades, alle Koeffizienten größer 0

→ Asymptotisch stabil

Regelung 420

③

b) $e_{1,ss} = \lim_{t\to\infty} e_1(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G_0(s)}$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{(s+1)(s+2)}{s^2+(2k_1+3)\cdot s+2\cdot(ak_1+1)} = \frac{2}{2ak_1+2} = \frac{1}{ak_1+1}$$

c) $T_1(s)$ (Nenner) $= s^2+4s+8$

$T_1(s)$ (koeff) $= s^2+(2k_1+3)s+2ak_1+2$

koeffizientervergleich:

$2k_1+3 = 4 \qquad k_1 = \frac{1}{2}$

$2ak_1+2 = 8 \qquad a = 6$

d) $T_1(s) = \frac{s+6}{s^2+4s+8}$

$$H_1(s) = \frac{1}{s}\cdot T_1(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{s+6}{s^2+4s+8} = \frac{s+6}{s^3+4s^2+8s}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{s+6}{s^3+4s^2+8s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+8}$$

$$s+6 = A(s^2+4s+8) + Bs^2 + Cs$$

$$= As^2 + A4s + A8 + Bs^2 + Cs$$

$$= s^2(A+B) + s(4A+C) + 8A$$

$A + B = 0 \qquad B = -\frac{3}{4}$

$4A + C = 1 \qquad C = -2$

$8A = 6 \qquad A = \frac{3}{4}$

$$H_1(s) = \frac{3/4}{s} - \frac{3/4\, s}{s^2+4s+8} + \frac{2}{s^2+4s+8} \quad ; (s+2)^2+4 \quad 2^2$$

$$\mathcal{L}^{-1}: h_1(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t}(\cos(2t)-\sin(2t)) + e^{-2t}\sin(2t)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}(3\cos(2t) + 7\sin(2t))$$

④

a) $T_1(s) = \frac{2\cdot k_1(s+a)}{s^2+(2k_1+3)s+2(ak_1+1)}$

$$G_{02}(s) = \frac{k_2}{s}\cdot T_1(s) = \frac{2k_1k_2(s+a)}{s\cdot(s^2+(2k_1+3)s+2(ak_1+1))}$$

$$T_2(s) = \frac{G_{02}(s)}{1+G_{02}(s)} = \frac{(s+a)2k_1k_2}{s^3+\underbrace{(2k_1+3)}_{>0}\cdot s^2+\underbrace{2(ak_1+k_1k_2+1)}_{>0}\cdot s+\underbrace{2ak_1k_2}_{>0}}$$

4

b) Nenner von $T_2(s)$ betrachten

Polynom 3. Grades, alle Koeffizienten >0

$\Delta_2 = (2(ah_1 + h_1h_2 + 1))(2h_1 + 3) - (2ah_1h_2)\cdot(1) > 0$

$\Rightarrow 4ah_1^2 + 6ah_1 + 2h_1^2h_2 + 3h_1h_2 + 2h_1 + 3 - 2ah_1h_2 > 0$

$\Rightarrow (4ah_1^2 + 6ah_1 + 2h_1 + 3) + h_2(2h_1^2 + 3h_1 - 2ah_1) > 0$

$\Rightarrow \underbrace{2(a\cdot h_1 + 1)(h_1 + 3)}_{f_1(h_1, a)} + \underbrace{h_2(h_1(2h_1 + 3 - 2a))}_{f_2(h_1, a)} > 0$

Asymptotisch stabil für $\Delta_2 > 0$

c)
Asymptotisch stabil bei $h_2 > 0$ für $f_2 \geq 0 \rightarrow 2a \leq 2h_1 + 3$

d) $f_2 < 0 \rightarrow h_{2,krit} = -\frac{f_1}{f_2} > 0$

5 $T_1(s) = \frac{s+6}{s^2+4s+8}$

a) $G_{o2}(s) = \frac{k_2}{s} T_1(s) = \frac{k_2(s+6)}{s(s^2+4s+8)}$

$T_2(s) = \frac{G_{o2}(s)}{1 + G_{o2}(s)}$

$= \frac{k_2(s+6)}{s^3 + 4s^2 + (k_2+8)s + 6k_2}$

b) $(s^2 + 2s + \omega^2)(s + c) = s^3 + 4s^2 + (k_2+8)s + 6k_2$

$\Rightarrow s^3 + 2s^2 + \omega^2 s + s^2 c + 2sc + \omega^2 c$

$\Rightarrow s^3 + (2+c)s^2 + (\omega^2 + 2c)s + \omega^2 c = s^3 + 4s^2 + (k_2+8)s + 6k_2$

Koeffizientenvergleich:

$2 + c$	$= 4$	$c =$	2
$\omega^2 + 2c$	$= k_2 + 8$	$k_2 =$	2
$\omega^2 c$	$= 6k_2$	$\omega^2 =$	6

c) $T_2(j\omega)$ (Nenner) : $(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + (k_2+8)(j\omega) + 6k_2$

$= -j\omega^3 - 4\omega^2 + k_2 j\omega + 8j\omega + 6k_2$

$= j\omega\underbrace{(-\omega^2 + k_2 + 8)}_{=0} + \underbrace{(-4\omega^2 + 6k_2)}_{=0}$

$-\omega^2 + k_2 + 8 = 0$
$-4\omega^2 + 6k_2 = 0$

$-4(k_2+8) + 6k_2 = 0 \rightarrow k_2 = 16 \rightarrow \omega = \pm 2\sqrt{6}$

Regelung h 20

(I)

(6) $G_{o2} = \frac{k_2(s+6)}{s(s^2+4s+8)}$

$k_2 = 2$ $\quad s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{5}$

a) $k_2 = 16$ $\quad s_{1,2} = \pm j \cdot 2\sqrt{6}$

Grad des Zählers: $m = 1$

Pole: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -2 \pm j \cdot 2$ $\quad n = 3$

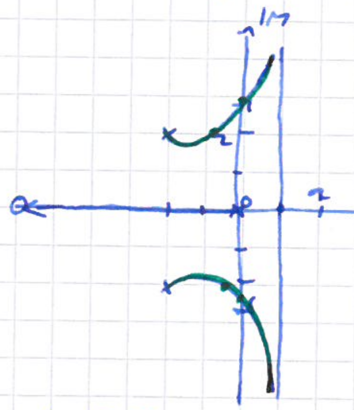
Nullstellen: $s_1 = -6$

$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$

Anzahl Asymptoten: $i = n - m = 2$

Wurzelschwerpunkt: $\sigma_a = \frac{0 + (-2+j\cdot2) + (-2-j\cdot2) + 6}{2} = 1$

Richtungswinkel der Asymptoten: $\beta_i = \frac{\pi \cdot (2i-1)}{n-m}$ $\quad \beta_1 = \frac{\pi}{2}$ $\quad \beta_2 = \frac{3\pi}{2}$



- Nullstelle o einzeichnen
- Pole x einzeichnen
- Asymptotenwinkel von σ_a ausgehend zeichnen
- Pfeil von kleinsten Pol zu Nullstelle

(7) $G_{o2}(s) = \frac{k_2(s+6)}{s(s^2+4s+8)}$ $\quad k_2 = 2$

a)

$A_R|_{dB} = 17dB \rightarrow A_R = 10^{\frac{17}{20}} = 7$

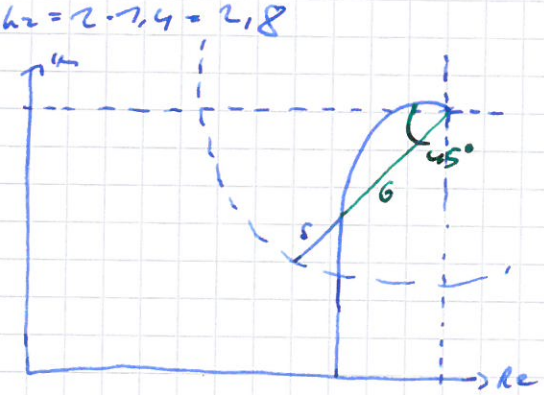
$k_{21}|_{dB} = 3dB \rightarrow k_{21} = 1{,}4 \rightarrow k_2 = 2 \cdot 1{,}4 = 2{,}8$

b)

$z = -\frac{1}{8}$, $A_R = -\frac{1}{z} = 8$

$k_{12} = \frac{\text{Schwarz}}{\text{Grün}} = \frac{75}{5{,}3} = 1{,}4$

$k_2 = 1{,}4 \cdot 2 = 2{,}8$



c) $A_R = \frac{k_{2,krit}}{k_2} = \frac{16}{2} = 8$

① $\ddot{y} + 2\dot{y} = u$

a) $\ddot{y} + 2\dot{y} = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \quad , \quad \dot{y}(0) = 1$

Annahme : $y(x) = e^{\alpha x}$

$\dot{y}(x) = \alpha e^{\alpha x}$

$\ddot{y}(x) = \cancel{2}\alpha^2 e^{\alpha x}$

$\cancel{2}\alpha^2 e^{\alpha x} + 2\alpha e^{\alpha x} = 0$

$\alpha^2 + 2\alpha = 0$

$\alpha(\alpha + 2) = 0$

$\alpha_1 = 0 \quad ; \quad \alpha_2 = -2$

$y(x) = A \cdot e^{0 \cdot x} + B \cdot e^{-2x}$

$y(0) = 1 \quad \rightarrow A + B = 1$

$\dot{y}(x) = -2Be^{-2x}$

$\dot{y}(0) = 1 \quad \rightarrow B = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow A = \frac{3}{2}$

$y(x) = \frac{3}{2} \cancel{x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$

b) $a_n = 1, \; a_{n-1} = 2 \quad b_{n-2} = 1 = b_0$

$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s} = \frac{1}{s(s+2)}$

Grenzstabil : $Re(\alpha_1) = 0 \quad Re(\alpha_2) = -2$

c) I $\quad T\dot{y} + y = k \cdot \int u(t)\, dt \Rightarrow T\ddot{y} + \dot{y} = k\,u(t) = k(\ddot{y} + 2\dot{y})$

II $\quad IT_1$ - Verhalten : $G(s) = \frac{k}{s(1+sT_1)} = \frac{k}{s + T_1 s^2}$

$k = T_1 = \frac{1}{2} \quad ; s \neq -2 ; s \neq 0$

d) $\ddot{y} + 2\dot{y} = u$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \; ; \; \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \; , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 0 \cdot u$

In Musterlösung mit nur zwei Dimensionen gemacht??

② $K_1(s) = k_1$; $k_1 > 0$

a) $G_{01}(s) = K_1(s) \cdot G(s)$

$= k_1 \cdot \frac{1}{s(s+2)}$

$T_1(s) = \frac{Y_1(s)}{W_1(s)} = \frac{G_{01}(s)}{1 + G_{01}(s)}$

$= \frac{k_1}{s^2 + 2s + k_1}$

Regelkreis ist statisch genau, weil $\frac{1}{s}$ als Faktor in $G_{01}(s)$ ist.

b) $T_1(s) = \frac{k_1}{s^2+2s+k_1}$ $\qquad G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0 \xi s + \omega_0^2}$

Koeffizientenvergleich liefert

$k_1 = \omega_0^2 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{k_1}$

$2s = 2\omega_0 \xi s \rightarrow \xi = \frac{1}{\sqrt{k_1}}$ $\qquad k_1 = 2$ für $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$|\xi| < 1 \rightarrow$ Schwingfähig
$|\xi| > 0 \rightarrow$ Asymptotisch stabil

c) $k_1 = 2$ $\qquad$ Einheitssprung : $\frac{1}{s}$

$H_1(s) = T_1(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{k_1}{s(s^2 + 2s + k_1)}$

$= \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + k_1}$

$\underbrace{k_1}_{=2} = A(s^2 + 2s + k_1) + Bs \cdot s + Cs$

$= As^2 + A2s + Ak_1 + Bs^2 + Cs$

$= s^2(A+B) + s(2A + C) + (A\underbrace{k_1}_{=2})$

$A + B = 0 \qquad B = -1$
$2A + C = 0 \qquad C = -2$
$2A = 2 \qquad A = 1$

$H_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{1 \cdot s}{s^2+2s+2} + 2 \cdot \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2}$

$= \frac{1}{s} - \frac{s}{(s+1)^2 + 1^2} - 2 \cdot \frac{1}{(s+1)^2+1^2}$

$h_1(t) = 1 - e^{-1 \cdot t}(\cos(1 \cdot t) - \frac{-1}{1}\sin(1 \cdot t)) - 2 \cdot \frac{1}{1} e^{-1t} \sin(1t)$

$= 1 - e^{-t}(\cos(t) + \sin(t)) - 2e^{-t}\sin(t)$

$= 1 - e^{-t}(\cos(t) - \sin(t))$ $\qquad$ ↯ Anders in Aufgabe?

$h_1(t) = 1 - e^{-t} \cdot \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4})$

$h_1(\infty) = 1 = W_1 \rightarrow$ Sprungantwort gibt 1 aus $\rightarrow$ stationär genau.

c) $e_1(t) = w_1 - y_1 = w_1 - h_1 = 1 - 1 - e^{-t}(\cos(t) - \sin(t))$

$= -e^{-t}(\cos(t) - \sin(t))$

$u_1(t) = k_1 e_1(t) = -2e^{-t}(\cos(t) - \sin(t))$

d) $c_p = h_1(t_p) - 1$

$h_1'(t) = 2\sin(t) \cdot e^{-t} \overset{!}{=} 0$

$t_p = \pi \cdot k$, erster Extrempunkt bei π

$c_p = h_1(t_p) - 1$

$= e^{-\pi}$ $(\approx 0{,}043 \mathrel{\hat{=}} 4{,}3\%)$

e) $T_1(s) = \frac{Y_1(s)}{W_1(s)} = \frac{k_1}{s^2 + 2s + k_1}$

$Y_1(s) = W_1(s) \cdot \frac{k_1}{s^2 + 2s + k_1}$

$Y_1(s) \cdot (s^2 + 2s + k_1) = k_1 W_1(s)$

Laplace:

$\mathcal{L}^{-1}: \ddot{y} + 2\dot{y} + k_1 y = k_1 w_1$

Sprungantwort : $y(0) = 0$; $\dot{y}(0) = 0$; $w_1 = 1$

③ $K_1(s) = k_1 \cdot (s + a)$; $k_1, a > 0$

$G_{o1}(s) = K_1(s) \cdot G(s) = \frac{k_1 \cdot (s+a)}{s \cdot (s+2)}$

a) $U(s) = e(s) \cdot K_1(s)$

$= e(s) \cdot k_1(s + a) = e(s) k_1 s + e(s) k_1 a$

$\mathcal{L}^{-1}: u(t) = \dot{e}(t)\, k_1 + e(t)\, k_1 a$

b) $T_1(s) = \frac{Y_1(s)}{W_1(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$

$= \frac{k_1 \cdot (s+a)}{s^2 + (k+2) \cdot s + a \cdot k_1}$ Polynom 2. Grades, alle Koeffizienten größer 0

$\rightarrow$ Asymptotisch stabil.

c) $s^2 + (k+2) \cdot s + a \cdot k_1 \overset{!}{=} 0$ $s_1 = -2$; $s_2 = -4$

$\mathrm{I}\ (-2)^2 + (k_1+2) \cdot (-2) + a \cdot k_1 = 0$

$\mathrm{II}\ (-4)^2 + (k_1+2) \cdot (-4) + a \cdot k_1 = 0$ oder $s^2 + (k+2) \cdot s + a \cdot k_1 \overset{!}{=} (s+2)(s+4)$

$a = 2, \quad k_1 = 4$

4 4

$$T_1(s) = \frac{h_1 \cdot (s+a)}{s^2 + (h_1+2)\cdot s + h_1 a}$$

a) $\frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 (s+2)}$

Instabil, weil $s=0$ doppeltes Pol auf Im-Achse.

b) $G_{02}(s) = \frac{h_2}{s} \cdot T_1(s) = \frac{h_2 h_1 (s+a)}{s(s^2+(h_1+2)\cdot s + h_1 a)}$

$$T_2(s) = \frac{G_{02}(s)}{1+G_{02}(s)} = \cancel{\frac{h_1 h_2 (s+a)}{s^3 + (a h_1 + h_1 (h_2+1)+2)\cdot s + a h_1 h_2}}$$

$$= \frac{h_1 h_2 (s+a)}{s^3 + (h_1+2)s^2 + (a+h_2)h_1 \cdot s + a h_1 h_2}$$

Polynom 3. Grades: alle Koeffizienten >0

$\Delta_2 = (a+h_2)h_1 \cdot (h_1+2) - (a h_1 h_2) > 0$

$\Rightarrow (a h_1 + h_2 h_1)(h_1+2) - (a h_1 h_2) > 0$

$\Rightarrow a h_1^2 + 2 a h_1 + h_2 h_1^2 + 2 h_1 h_2 - a h_1 h_2 > 0$

$h_1 (a h_1 + 2a + h_2 h_1 + 2 h_2 - a h_2) > 0$

$>0 \rightarrow h_1 (h_2 (h_1 + 2 - a) + a (h_1+2)) > 0$

$h_2(\underbrace{(h_1+2-a)}_{>0} + \underbrace{a(h_1+2)}_{>0}) > 0$

Asymptotisch stabil für $h_1, h_2, a > 0$, falls $h_1 + 2 - a \geq 0$

Asymptotisch stabil für $h_1, a > 0$, falls $h_2(h_1+2-a) \geq 0$

Asymptotisch stabil für $h_1, h_2 > 0$, falls $a \leq 2$

5 $G_{02}(s) = \frac{h_2}{s} \cdot T_1(s) = \frac{4 h_2}{s\cdot(s+4)}$

a) $h_2 = 1 \rightarrow G_{02}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{4}{s+4}$

$\frac{1}{s}$: $\omega_1 = |s_1| = 0\ s^{-1}$ $\qquad \omega_{01} = \frac{1}{T_{s1}} = 0\ s^{-1}$

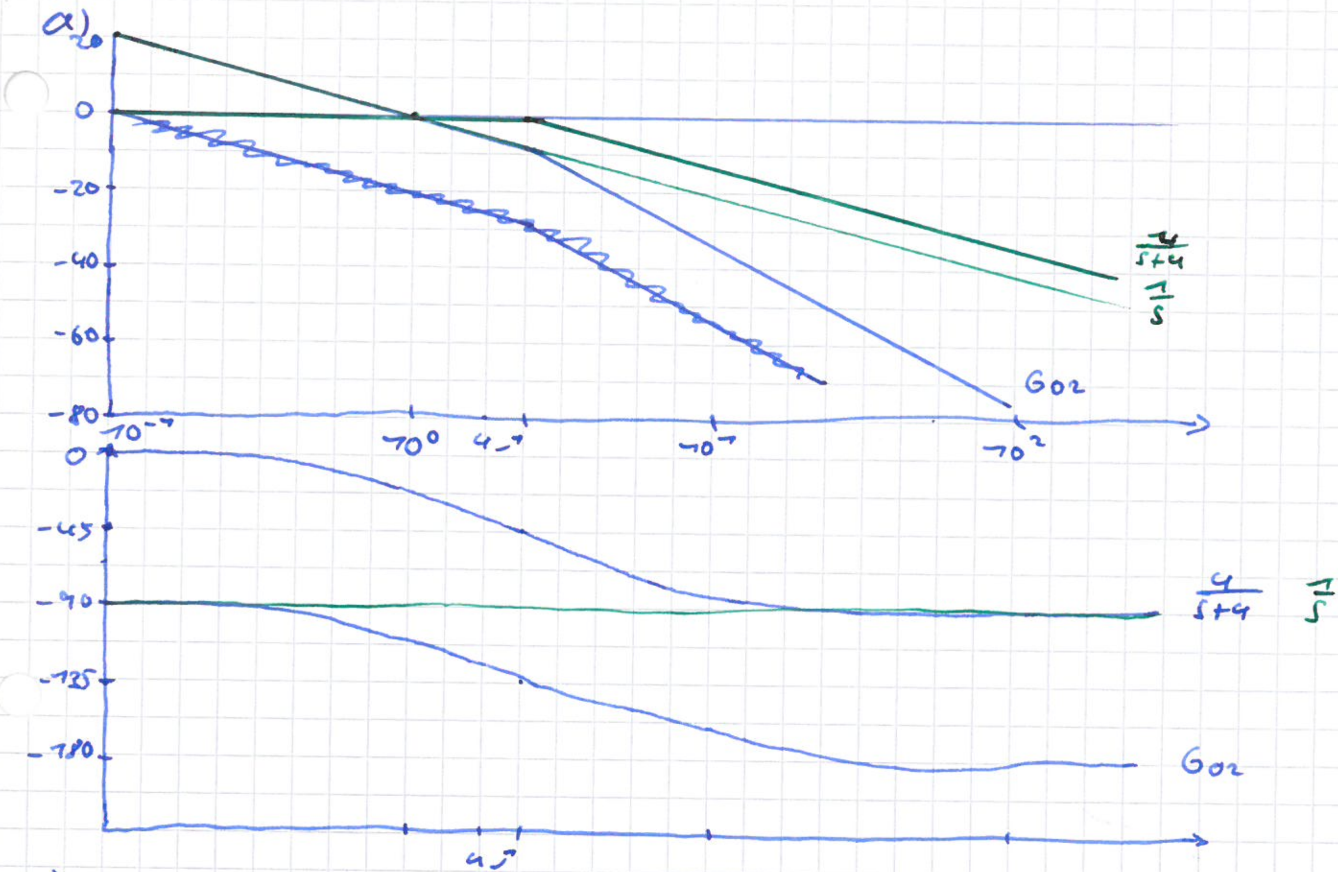
$\frac{1}{s+4}$: $\omega_2 = |s_2| = 4\ s^{-1}$ $\qquad \omega_{02} = \frac{1}{T_{s2}} = 4\ s^{-1}$

4 : $k_p = 20 \log(4) = 12{,}13$ dB

Zeichnungen auf nächster Seite:

Regelung 4-19

a)



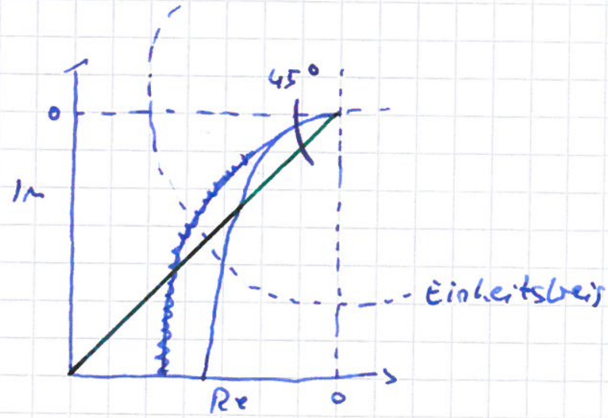
b) - Am Pol ~~[illegible]~~ Differenz ablesen

$k_{2,dB} = 15\,dB$; $\omega_D = 4$

$k_2 = 10^{\frac{1}{20}\cdot 15} = 5{,}623$

- $k_{2,korr} = \frac{\text{Grün}}{\text{Blau}} \approx \frac{5{,}8}{2{,}2} \approx 2{,}6$

$k_2 = 2 \cdot k_{2,korr} = 5{,}2$



- $G_{02}(j\omega_D) = \frac{4\,k_2}{j\omega_D(j\omega_D+4)}$

I $|G_{02}(j\omega)| = 1$

II $\varphi_R = \pi + \arg(G_{02}(j\omega_D))$

I $\frac{4 \cdot \frac{k_2}{\omega_D}}{\sqrt{\omega_D^2 + 16}} = 1$

II $\frac{\pi}{4} = \pi + \left(-\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D}{4}\right)\right)$

$\omega_D = 4$; $k_2 = 4\sqrt{2}$

c) $A_R = \infty$ weil Re-Achse nicht geschnitten wird.

(6)

$$G_{o2}(s) = \frac{k_2}{s} \cdot T_1(s) = \frac{2k_2\left(s+\frac{3}{2}\right)}{s\cdot(s+1)(s+3)}$$

(6)

Grad des Zählers: $m = 1$

Pole: ~~λ_1~~ $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = -3$; $n = 3$

Nullstellen: $s_1 = -\frac{3}{2}$

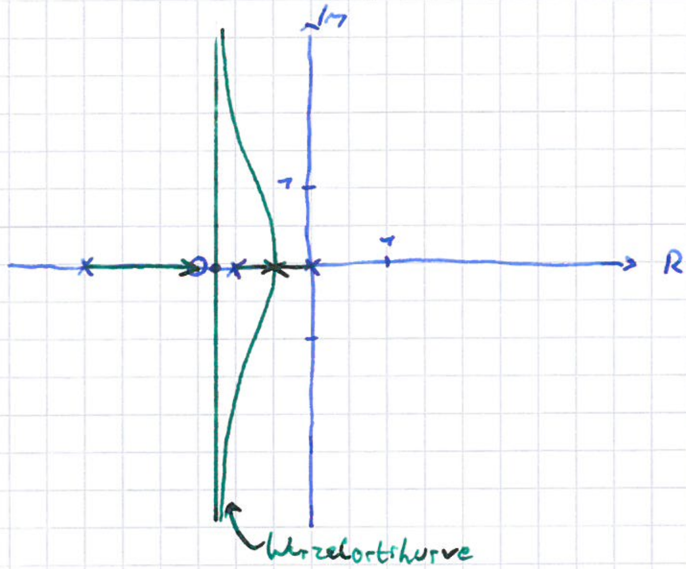
Anzahl Asymptoten $i = n - m = 2$

Wurzelschwerpunkt: $\sigma_a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} = \dfrac{0+(-1)+(-3)-\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}$

$= -\frac{5}{4}$

Richtungswinkel der Asymptoten: $\beta_i = \dfrac{\pi\cdot(2i-1)}{n-m}$, $i = 1, 2, \ldots, n-m$

$\beta_1 = \frac{\pi}{2}$; $\beta_2 = \frac{3\pi}{2}$



- Nullstelle o einzeichnen
- Pole x einzeichnen
- Asymptotenwinkel von σ_a ausgehend zeichnen
- Pfeil von kleinstem Pol zu Nullstelle
- Pfeil von Pol zu Pol, wenn treffen hier Verzweigungspunkt.

(7)

1 a) $\dot{y} + 5y = 5u$

$$Y(s)\,(1 \cdot s^1 + 5 \cdot s^0) = U(s)\,(5 \cdot s^0)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{s+5} = \frac{b_q \prod_{i=1}^{m} (s - s_{0,i})}{a_n \prod_{i=1}^{n} (s - s_i)}$$

$$s_i = -5$$

$$T = \frac{1}{5}$$

b) $u(t) = \sin(5t)$

Partikulär: $y_p(t) = A \cdot \sin(5t) + B \cdot \cos(5t)$

Homogen: $y_h(t) = y_p(t) + y_h(t)$ soll Lösung des AWP sein.

$$\cancel{y_p(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Z(s)}{N(s)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}}$$

I $\dot{y} + 5y = 5 \cdot \sin(5t)$, $y(0) = 0$

II $y_p(t) = A \sin(5t) + B \cos(5t)$

II in I:

$$5 \cdot A \cos(5t) - B \sin(5t) 5 + 5(A \sin(5t) + B \cos(5t)) = 5 \sin(5t)$$

$$\cos(5t)(5A + 5B) + \sin(5t)(-5B + 5A) = 5 \sin(5t)$$

$$5A + 5B = 0$$

$$-5B + 5A = 5$$

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2}$$

$$y_p(t) = \frac{1}{2} \sin(5t) - \frac{1}{2} \cos(5t)$$

$$y(t) = \sin(5t) - \frac{\dot{y}}{5} = y_h(t) + \frac{1}{2} \sin(5t - \frac{1}{2} \cos(5t)$$

$$y_h(t) = e^{-5t} \cdot D$$

$$0 = y(0) = y_p(0) + y_h(0) = \frac{1}{2} \sin(0) - \frac{1}{2} \cos(0) + e^{-5 \cdot 0} \cdot D$$

$$D = \frac{1}{2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(\sin(5t) - \cos(5t)) + \frac{1}{2} e^{-5t}$$

c) $y_p(t) = C\cdot\sin(5t+\varphi)$ mit $C>0$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y)$

$y_p(t) = C\left(\sin(5t)\cdot\cos(\varphi) + \cos(5t)\cdot\sin(\varphi)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sin(5t) - \cos(5t)\right)$

I $C\cdot\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ $\qquad C = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

II $C\cdot\sin(\varphi) = -\frac{1}{2}$ $\qquad \varphi = -\frac{\pi}{4}$

$y_p(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sin(5t - \frac{\pi}{4})$

d) $G(s) = \frac{5}{s+5}$

$u(t) = \sin(5t) \rightarrow \omega = 5 \rightarrow$

$y_p(t) = A\sin(5t+\varphi)$

$A = |G(5j)|$ $\qquad \varphi = \arg(G(5j))$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\qquad \varphi = -\frac{\pi}{4}$

2

a) $U(s) = e_1\cdot k_1(s) = e_1\cdot k_1 + e_1\cdot\frac{k_1 a}{s}$

$= e_1(s)\,k_1 + e_1(s)\cdot\frac{k_1 a}{s}$

$\mathcal{L}^{-1}:\ u(t) = e_1(t)\,k_1 + k_1 a\cdot\int_0^t e_1(\tau)\,d\tau$

PI - Regler

b) Durchtrittsfrequenz: $|G(\omega j)| \overset{!}{=} 1$

$|G(\omega_D j)| = \frac{5\cdot k_1\cdot(5j+10)}{5j(5j+5)}$

$k_1 = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$\varphi_R = \pi + \arg(G_0(j\omega_D)) \approx 1{,}449\text{ rad} = 71{,}57°$

c) $T_1(s) = \frac{G_{01}(s)}{1+G_{01}(s)} = \frac{\frac{5\cdot k_1(s+a)}{s(s+5)}}{1+\frac{5\cdot k_1(s+a)}{s(s+5)}} = \frac{5k_1(s+a)}{s^2+5(k_1+1)\cdot s+5\cdot a\cdot k_1}$

c) Diskriminante im Nenner bilden:

$b^2 - 4ac$ von $s^2 + 5(h_1+1)s + 5ah_1$

$25(h_1+1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot ah_1$

$= 25h_1^2 + 50h_1 + 25 - 20ah_1 \quad = 5(5h_1^2 + 10h_1 - 4h_1 a + 5) \overset{!}{\geq} 0$ für $a \leq 5$

$5(5h_1^2 + 10h_1 - 20h_1 + 5)$

$= 5(5h_1^2 - 10h_1 + 5)$

$= 25(h_1^2 - 2h_1 + 1)$

$= 25\underbrace{(h_1 - 1)^2}_{\geq 0} \geq 0$ ✓

d) $a > 5$

e) $s_1 = -1 \quad s_2 = -6$

$T_1(s) = \dfrac{2 \cdot (s+3)}{(s+1)(s+6)}$

$(s+1)(s+6) = s^2 + 7s + 6$

$s^2 + 5(h_1+1)s + 5a \cdot h_1$

$\text{I} \quad 5(h_1+1) = 7 \qquad h_1 = \frac{2}{5}$

$\text{II} \quad 5a \cdot h_1 = 6 \qquad a = 3$

f) $T_1(s) = \dfrac{2(s+3)}{s^2 + 7s + 6}$

$H_1(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{Einheitssprung}} \cdot \dfrac{2(s+3)}{s^2+7s+6} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{C}{s+6}$

$2(s+3) = A(s+1)(s+6) + B(s+6)s + C(s+1)s$

$= A(s^2+7s+6) + B(s^2+6s) + C(s^2+s)$

$= s^2(A+B+C) + s(7A+6B+C) + 6A$

$7A + 6B + C = 2 \qquad B = -\frac{4}{5}$

$6A = 6 \qquad A = 1$

$A + B + C = 0 \qquad C = -\frac{1}{5}$

$H(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{\frac{4}{5}}{s+1} - \dfrac{\frac{1}{5}}{s+6}$

(Laplace Transformation)

$h(t) = e^{-0 \cdot t} - \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-6t}$

③ ④

$$T_1(s) = \frac{5k_1\cdot(s+a)}{s^2+5\cdot s\cdot(k_1+1)+5k_1\cdot a}$$

a) $G_{o2}(s) = \frac{k_2}{s}\cdot T_1(s) = \frac{5k_1k_2(s+a)}{s^3+5s^2(k_1+1)+5k_1a\cdot s}$

$$T_2(s) = \frac{G_{o2}(s)}{1+G_{o2}(s)} = \frac{5k_1k_2(s+a)}{s^3+5(k_1+1)\cdot s^2+5(a+k_2)k_1\cdot s+5\cdot a\cdot k_1\cdot k_2}$$

b) $a, k_{1,2} > 0 \rightarrow$ Alle Koeffiziente > 0

$\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3$

$\Rightarrow (5(a+k_2)k_1)(5(k_1+1)) - (5ak_1k_2)(1) \overset{!}{>} 0$

$\Rightarrow 25\,k_1(a+k_2)(k_1+1) - 5ak_1k_2 > 0$

$\Rightarrow 5k_1\,(5(a+k_2)(k_1+1) - ak_2) > 0 \qquad |:5k_1$

$\Rightarrow 5(a+k_2)(k_1+1) - ak_2 > 0$

c) Für $k_2 > 0$:

$(5a+5k_2)(5k_1+5) - ak_2$

$= 25ak_1 + 25a + 25k_2k_1 + 25k_2 - ak_2$

$= k_2(25k_1+25-a) + a(25k_1+25)$

$= k_2(25k_1+25-a) + 25a(k_1+1)$

$= \underbrace{k_2}_{>0}\underbrace{(5k_1+5-a)}_{\geq 0} + \underbrace{5a}_{>0}\underbrace{(k_1+1)}_{>0} \qquad k_1, a > 0$

Es muss also gelten $(5k_1+5-a) \geq 0$

d) $5-a \geq 0 \qquad 5a \geq 0$

$a \leq 5$

e) $x = 10^{\frac{-10dB}{20}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$k_{2,60} = k_2\cdot x = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}9487$

Regelung 478

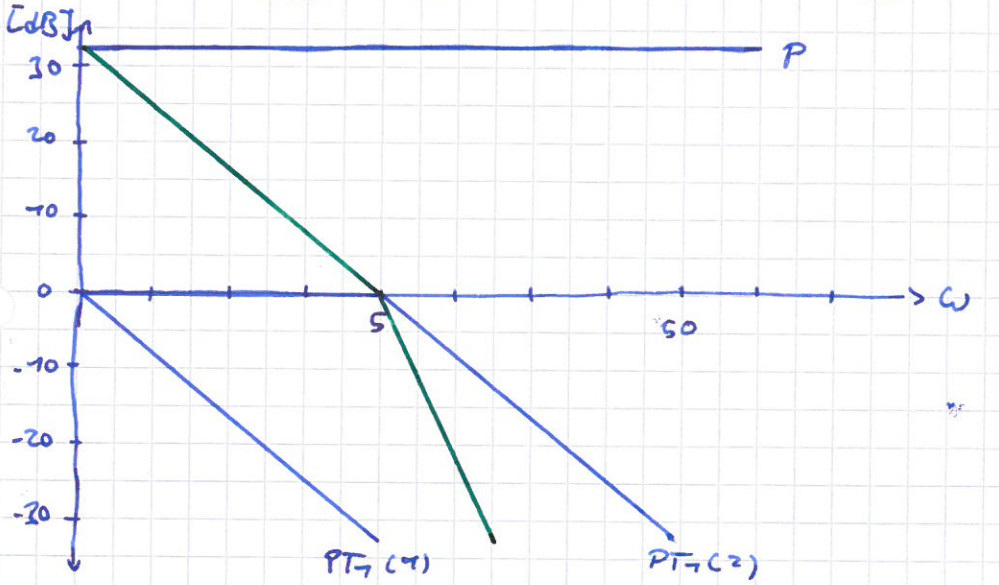
4 Integralregler der Form $k_1(s) = \frac{k_1}{s}$ mit $k_1 > 0$

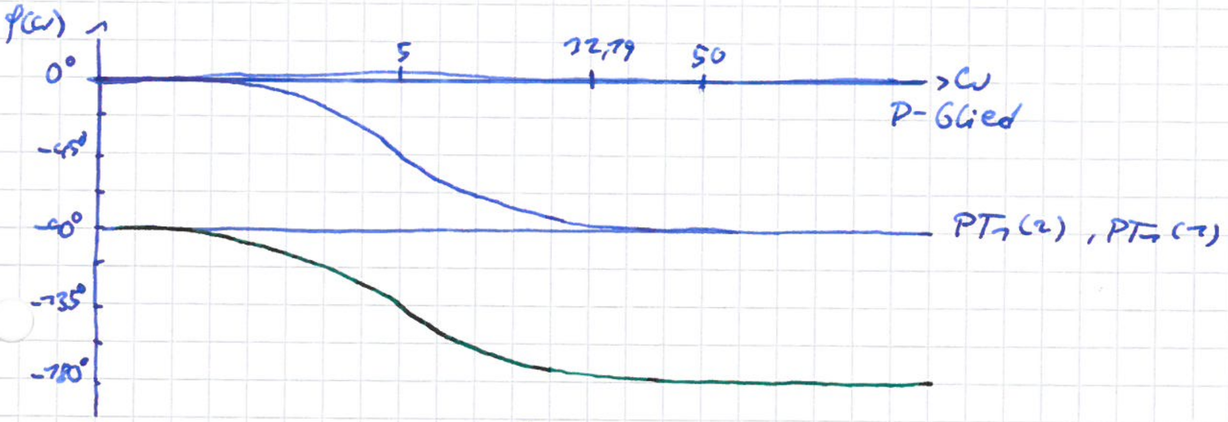
a) $k_1 = 1 \rightarrow G_{01}(s) = \frac{1}{s}\frac{5}{s+5} = \cancel{5}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+s\cdot 0{,}2}$

P-Glied: 5 $\quad k_p = 20\log(5) = 13{,}79\,dB$

PT_1-Glied: $\frac{1}{s}$ $\quad \omega_1 = |s_1| = 0\, s^{-1}$ $\quad \omega_{01} = \frac{1}{T_{s1}} = 0\, s^{-1}$

PT_1-Glied: $\frac{1}{s+5}$ $\quad \omega_2 = |s_2| = |-5| = 5\, s^{-1}$ $\quad \omega_{02} = \frac{1}{T_{s2}} = 5\, s^{-1}$





b) $T_{01} = \frac{G_{01}}{1+G_{01}} = \frac{5k_1}{s^2+5s+5k_1}$

$G_{02} = T_{01}\cdot\frac{k_2}{s} = \frac{5k_1k_2}{s^3+5s^2+5k_1s}$

$T_{02} = \frac{G_{02}}{1+G_{02}} = \frac{5k_1k_2}{s^3+5s^2+5k_1s+5k_1k_2}$

c) $k_1 = \frac{5}{2}$ $\quad k_2 = \frac{5}{4}$ $\quad A_R = 10$

$G_{02} = \frac{15{,}63}{s^3+5s^2+12{,}5s+15{,}63}$

$z = -0{,}25 \rightarrow k_{krit,2} = -\frac{1}{z}\cdot k_2 = 5 = A_R\cdot k_2$

Für $A_R = 10$: $\quad k_{2,10} = \frac{k_{krit,2}}{A_R} = 0{,}5$

d)

$$T_2(j\omega) = \frac{25k_1}{(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 5k_1(j\omega) + 25k_1} \qquad (k_{2,krit} = 5)$$

Pole bei Nullstellen im Nenner

$$(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 5k_1(j\omega) + 25k_1$$

$$= -j\omega^3 - 5\omega^2 + 5k_1 j\omega + 25k_1$$

$$= j\omega\underbrace{(-\omega^2 + 5k_1)}_{=0} + 5\underbrace{(-\omega^2 + 5k_1)} = \underbrace{(-\omega^2 + 5k_1)}_{=0}\underbrace{(j\omega + 5)}_{\neq 0}$$

$$\omega \overset{!}{=} -\sqrt{5k_1}$$

e) $s^3 + 5s^2 + 5k_1 s + 25k_1$

$$= s(s^2 + 5k_1) + 5(s^2 + 5k_1)$$

$$= \underbrace{(s^2 + 5k_1)}_{=0}\underbrace{(s+5)}_{=0}$$

Pole bei $s = \pm j \cdot \sqrt{k_1 \cdot 5}$ und $s = -5$

$T_2(s)$ ist Grenzstabil, weil $k_2 = k_{2,krit}$ genau auf der kritischen Grenze im Nyquist-Diagramm liegt.

f) $k_1 = \frac{5}{2}$

$$G_{02}(S) = \frac{\frac{25}{2}k_2}{s\cdot(s^2 + 5\cdot s + \frac{25}{2})}$$

Nenner von T_2: $(s+\delta)\cdot(s^2 + 2\delta\cdot s + \omega_0^2)$

T_{02} von vorher (Nenner): $s^3 + 5s^2 + \frac{25}{2}s + \frac{25}{2}k_2$

Gleichsetzen

$$s^3 + 2\delta s^2 + \omega_0^2 s + s^2\delta + 2\delta^2 s + \omega_0^2\delta$$

$$= s^3 + 3\delta s^2 + 2\delta^2 s + \omega_0^2 s + \omega_0^2\delta$$

$$= s^3 + s^2(3\delta) + s(2\delta^2 + \omega_0^2) + \omega_0^2\delta \overset{!}{=} s^3 + 5s^2 + \frac{25}{2}s + \frac{25}{2}k_2$$

Koeffizientenvergleich liefert: $\delta = \frac{5}{3}$; $\omega_0^2 = \frac{125}{18}$; $k_2 = \frac{25}{27}$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{\omega_0} = 0{,}63$$

Grundstruktur eines Regelkreises

- Einzelne Regelkreisglieder: dynamische / statische Systeme
- System: Funktionseinheit zur Übertragung von Signalen
  Anders als bei Regelkreis rückwirkungsfrei.
  Eingangssignal ist nicht an Ausgangssignal gekoppelt

y - Regelgröße	Höhe
d - Störgröße	Wind
y_m - Messgröße	Höhenmessung
u - Stellgröße	Höhenruder
w - Sollwert	Sollhöhe

Regelstrecke	Flugzeugmodell mit Ausgang h
Messglied	Barometrischer Höhenmesser
Regler	Algorithmus, implementiert auf Bordrechner
Stellglied	Höhenruder bzw. Auftriebsklappen.

Regelungsprozess in drei Vorgängen: (laufen gleichzeitig ab)

- 1: Messung oder Berechnung der zu regelnden Größe
- 2: Vergleich von y mit dem Sollwert w, der von Menschen vorgeben, oder auch berechnet wird. Vergleich von y und w ergibt die Regelabweichung $e = f(w, y)$. Meist ist $e = w - y$
- 3: Berechnung der Stellgröße u mit $u = f(e) = f(w, y)$ und Kommandierung des Stellsystems. Der mathematische Zusammenhang $u = f(e) = f(w, y)$ heißt auch Regelgesetz

Lineare Systeme im Zeitbereich.

Zwei Darstellungen für lineare Systeme

- Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung der Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$u \mathrel{\hat{=}}$ Eingangsgröße
$y \mathrel{\hat{=}}$ Ausgangsgröße
a_i und b_i $\mathrel{\hat{=}}$ Koeffizienten

Zusätzlich noch Anfangsbedingungen $y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$

Und es muss $n \geq m$ gelten, sonst ist System nicht technisch realisierbar und nicht kausal.

- Zustandsraumdarstellung als Differentialgleichungssystem erster Ordnung und algebraischer Messgleichung

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = c^T x + du$$

x	Zustandsvektor	$n \times 1$
u, y	Eingang/Ausgang	1×1
A	Systemmatrix	$n \times n$
b	Steuervektor	$n \times 1$
c^T	Beobachtungsvektor	$1 \times n$
d	Durchgangsfaktor	1×1

Anfangsbedingungen müssen durch $x_0 = x(0)$ gegeben sein.

2. Newtonsches Gesetz: $F = m\cdot a$; $F = m\cdot\ddot{x}$

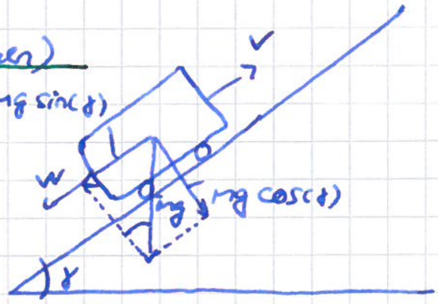
Drallsatz : $M = \Theta\alpha$; $M = I\ \ddot{\varphi}$

↳ Winkelbeschleunigung

↳ Trägheitsmoment

↳ von außen angreifendes Moment

Linearisierung (von nichtlinearen Modellen|Systemen)



Bsp: Fahrzeug auf inklinierter Bahn

Antrieb u

Hangabtriebskraft $F_H = -m\cdot g\cdot\sin(\gamma)$

Luftwiderstand $W = -k\cdot v^2$

Rollreibung $F_R = -\mu\cdot m\cdot g\cdot\cos(\gamma)$

$$m\cdot\dot{v} = -m\cdot g\cdot\sin(\gamma) - \mu\cdot m\cdot g\cdot\cos(\gamma) - kv^2 + u$$

$$\dot{v} = \underbrace{-\frac{k}{m}v^2}_{\text{nicht-linearer Anteil}} - g\cdot(\sin(\gamma) + \mu\cos(\gamma)) + \frac{u}{m}$$

Umrechnung einer Differentialgleichung n-tes Ordnung in eine Zustandsraumdarstellung

Gegeben sei eine Differentialgleichung n-tes Ordnung: ("Originalsystem")

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_0 u \quad ; m \le n$$

Eingangsgröße u darf max. so oft abgeleitet werden wie Ausgangsgröße y

- Algebraische rechte Seite: $b_1 = b_2 = \dots = b_n$; $b_0 \neq 0$

Es müssen $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}$ durch Zustandsgrößen ausgedrückt werden.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{b_0}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \dots - a_0 x_1 + u = y^{(n)} \\
y &= b_0 x_1
\end{aligned}$$

In Matrixform

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b} u$$

$$y = \overbrace{(b_0\ 0\ \dots\ 0)}^{c^T}\ (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T + \overset{d}{0}\ u$$

Im allgemeinen Fall ist rechte Seite nicht algebraisch.

↳ Geeignete Zwischengröße z, um allgemeinen Fall auf eben betrachteten Spezialfall zu überführen. z entspricht dabei "y" und ist als Lösung folgender DGL definiert:

$$\underbrace{z^{(n)} + a_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + a_0 z}_{\text{Identisch zum Originalsystem}} = u$$

Wird das System mit dem Eingang $u(t)$ angeregt, wird es mit dem Ausgang $z(t)$ antworten, bei $\dot{u}(t)$ ist es $\dot{z}(t)$.

Jetzt: Ausgangsgröße y als Überlagerung der Systemantworten von der obigen Gleichung. (Auf die Eingänge $b_0 u, b_1 \dot{u}, \ldots b_n u^{(n)}$)

$$y = b_n z^{(n)} + b_{n-1} z^{(n-1)} + \ldots + b_0 z$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} \end{pmatrix} \qquad \text{Es folgt mit } z^{(n)} = \dot{x}_n$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots - a_{n-1} x_n + u \end{aligned}$$

Obige Gleichung mit Zustandsvariablen geschrieben:

I $\quad y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \ldots + b_{n-1} x_n + b_n \dot{x}_n$

II $\quad b_n \dot{x}_n = -b_n a_0 x_1 - b_n a_1 x_2 - b_n a_2 x_3 - \ldots - b_n a_{n-1} x_n + b_n u$

Einsetzen ergibt

$$y = (b_0 - b_n a_0) x_1 + (b_1 - a_1 b_n) x_2 + (b_2 - b_n a_2) x_3 + \ldots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n + b_n u$$

Kombinationen der Differentialgleichungen und Ausgangsgleichungen ergibt eine Zustandsraumdarstellung der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b} u$$

$$y = \underbrace{(b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \ldots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1})}_{c^T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \underbrace{b_n}_{d} u$$

Das System ist sprungfähig für $b_n \neq 0$. Viele technische Systeme sind jedoch nicht sprungfähig.

Zeitverhalten - Stabilität, homogenes System

"kehrt ein aus dem Ruhezustand ausgelenktes System in den Ruhezustand zurück?"

↳ Die Anfangswerte $y^{(n-1)}(0), \dots, \dot{y}(0), y(0)$ sollen nicht gleichzeitig Null sein, das bedeutet Auslenkung aus dem Ruhezustand

Wir betrachten den Ausgangsverlauf $y(t)$ ohne Steuereingriff ($u \hat{=} 0$) und prüfen, ob $y(t)$ und Ableitungen gegen 0 konvergieren

↳ Dies ist gleichbedeutend mit der Systemeigenschaft Stabilität.

Stabilität unabhängig von Eingangssignal $u(t)$

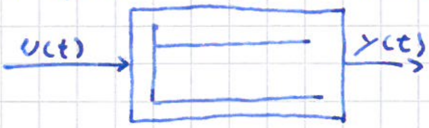
Ein System heißt asymptotisch stabil genau dann, wenn $Re\ \lambda_i < 0$ ist für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Wie die Formulierung "genau dann" andeutet, handelt es sich um eine notwendige und hinreichende Bedingung. Ein asymptotisch ~~stabiles System~~ stabiles System kehrt nach einer Auslenkung aus dem Ruhezustand ohne Steuereingriff in den Ruhezustand zurück.

Ein System heißt instabil, wenn $Re\ \lambda_i > 0$ für mindestens ein i ist. Wird ein instabiles System aus dem Ruhezustand ausgelenkt, so wächst $|y(t)|$ ohne Steuereingriff im allgemeinen über alle Grenzen. Im Gegensatz zur asymptotischen Stabilität handelt es sich hierbei um eine hinreichende Bedingung, insbesondere wenn man die Möglichkeit mehrfacher Lösungen der Polynomgleichung einschließt.

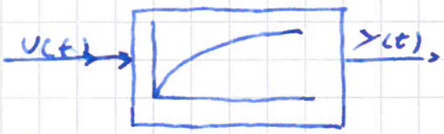
Ein System heißt grenzstabil, wenn $Re(\lambda_i) \leq 0$ ist für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $Re(\lambda i) = 0$ für mindestens ein i. Die λ_i mit $Re(\lambda_i) = 0$ sollen einfache Lösungen der Polynomgleichung sein. Wird ein Grenzstabiles System ausgelenkt, so ist $y(t)$ zwar beschränkt, strebt aber im allgemeinen nicht mehr in den Ruhezustand zurück

Testsignale

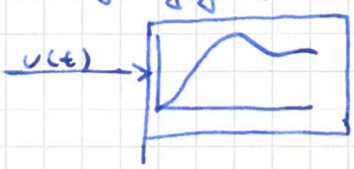
Proportionalglied, P-Glied



Verzögerungsglied 1. Ordnung, PT_1-Glied



Verzögerungsglied 2. Ordnung

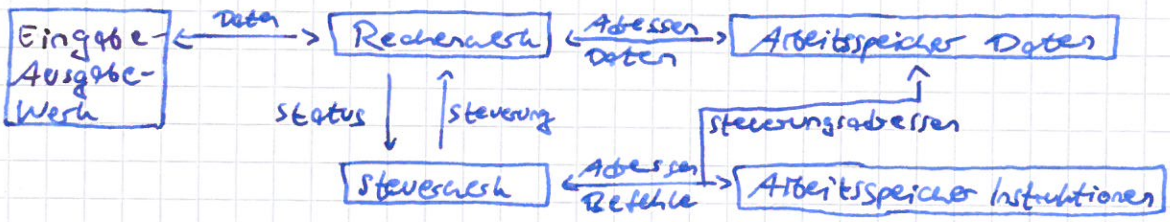


LVDT - Linear variable differential transformer
Zwei Eingänge, vier Ausgänge
Überprüft Symmetrie eines Konstruktion

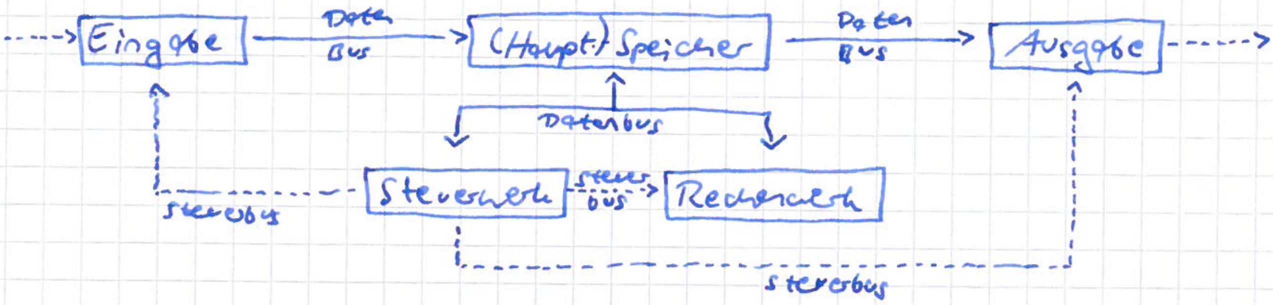
Preemtive scheduling - Prozesse werden zu beliebigen Zeitpunkten unterbrochen um später weiter ausgeführt zu werden.

Non preemtive multitasking - Prozesse geben Berechnungszeit regelmäßig oder bei Blocks von sich aus auf. Funktioniert nur, wenn alle Prozesse zusammen arbeiten.

Harvard-Archetektur - Programm- und Datenspeicher sind voneinander getrennt



Von-Neumann-Archetektur - Gemeinsamer Speicher enthält Daten und Programme



CAN-Nachricht: "Controller Area Network"

Start of Frame	1 Bit
Arbitriesungsfeld	11 Bit
Steuerungsfeld	6 Bit
Datenfeld	Bis zu 8 Byte ← Daten
Prüfsummenfeld	15 Bit
Bestätigungsfeld	2 Bit
End of Frame	7 Bit
Intermission	3 Bit

EPROM	SRAM	DRAM
Erasable Programable ROM	Static random access Mem.	Dynamic random access memory
Nicht flüchtig	Flüchtig	Flüchtig

ADC - Analog-to-digital converter
Minimale Abtastrate: größer als das doppelte der maximal möglichen Frequenz im Eingangssignal. (Nyquist)

Ausführungsdauer eines Programmes + Beeinflusst durch Interrupts, Caching, Pipelining

Lemp-Schaltung – Überspannungsschutz gegen Blitze (lightning electromagnetic pulse) 16

32

48

Zahlensysteme 64

Dezimal	Hexadezimal	Binär
63	0x3F	0011 1111
91	0x5B	0101 1011
106	0x6A	0110 1010

80 96 112 128 144 160

Endianness

Big-Endian

0x0000 0x0001

212 0000 0000 1101 0100

"Normal"

Little-Endian

0x0000 0x0001

1101 0100 0000 0000

"Bytes in gedrehter Reihenfolge"

1 16 256 4096 65536

Zweierkomplement

-6 : 1010 "-8+2"

-2 : 1110 "-8+4+2"

+~~1~~1000 "-8+0"

IEEE Single Precision Standard

|1|10000010|00011000 000000000000000|

VZ Exponent Mantisse

$-\ 2^{(130-127)} \cdot 1{,}00011$

Komma um drei nach rechts verschieben weil 2^3

$-1000{,}11$ ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$)

$-8{,}75$

```
uint8_t a = 100;
uint8_t i = 10;
while (i >= 6) {
    a = a + a;
    i --;
}
```

0x0024	LDI R24, 100	1 Takt
0x0025	LDI R25, 10	1 Takt
0x0026	RJMP 2	2 Takte
0x0027	ADD R24, R24	1 Takt
0x0028	SUBI R25, 1	1 Takt
0x0029	CPI R25, 6	1 Takt
0x002A	BRCC -4	1/2 Takte

Execution Time bei Taktrate von 1MHz

Schleife 5 mal ausgeführt

1 + 1 + 2 + 5·5 + 1 = 30 Takte gesamt bei 1MHz: 30µs

Stapelspeicher

Stack-Pointer 0x20FC (SPH: 0x20, SPL: FC) → Alle darunter liegenden Bytes liegen im Stapelspeicher und sind "besetzt" → 0x20FC wird als nächstes beschrieben.

Program-Counter zeigt auf Adresse mit nächster auszuführender Instruktion.

Direct-Mapped-Cache für 12 bit-Speicheradressen

- Die MMU (Memory Management Unit) sucht, ob die geforderte Adresse im Cache vorhanden ist
  - -> Ja : Cache-Hit : Inhalt wird an den Prozessor übergeben
  - Nein: Cache-Miss : Wert erst aus dem Arbeitsspeicher laden
- Es werden immer größere zusammenhängende Speicherbereiche ("Cache-Lines") in den Cache transportiert.
- Beim Laden einer neuen Line wird die am wenigsten gebrauchte wieder freigegeben.
- Ergebnisse werden in den Cache zurückgeschrieben und die Line als "dirty" markiert.
- Wenn in jedem Schritt eine neue Line geladen werden muss, verkehrt sich der Effekt des Caches ins Gegenteil ("Thrashing")

Bsp für Cache-Adressaufteilung : Tag [11-4] Index [3-2] Offset [1-0]

Mapping:
Datensatz pro Cache-Line in Bytes : $2^{\text{offset}} = 2^2 = 4$ Bytes
Anzahl der Cache Lines im Cache : $2^{\text{index}} = 2^2 = 4$ Lines
Größe des Caches : (8 bits Tag + 1 bit "valid")
Mit internen Speicherbits : $4 \cdot (4 \cdot 8 + 8 + 1) = 164$ bits
Ohne interne Speicherbits : $4 \cdot (4 \cdot 8) = 128$ bits
~~Tag~~ valid: stehen gültige Daten in der Line? (bei Boot erstmal auf 0)

Index	✓	Tag		Data			
0	1	0000	0000	0x03	0xB5	0xCC	0xDE
1	0	0000	0000	0x00	0x00	0x00	0x00
2	0	0000	0000	0x00	0x00	0x00	0x00
3	0	0000	0000	0x00	0x00	0x00	0x00

Zeit	Speicheradresse	Hit / Miss	Index	Data	~~Adresse~~ in binär
1	0x00C	M	11->3	0xFF	0000 0000 1100
2	0x005	M	01->1	0xBE	0000 0000 0101
3	0x000	H	00->0	0x03	0000 0000 0000
4	0x017	M	01->1	0x24	0000 0001 0111
5	0x00E	H	11->3	0x01	0000 0000 1110

Cache nach Ausführung der Speicherzugriffe :

Index	V	Tag	Data			
0	1	0000 0000	0x03	0xB5	0xCC	0xDE
1	1	0000 0001	0xCF	0xC3	0x43	0x24
2	0	0000 0000	0x00	0x00	0x00	0x00
3	1	0000 0000	0xFF	0xFF	0x01	0xD5

Hauptspeicherinhalt ist in Klausurvorbereitung Seite 8

Trefferquote
Hit: 2/5 => 40%
Miss: 3/5 => 60%

DAC – Digital-to-Analog-Converter

Anzahl an Stufen bei 8-bit : $2^8 = 256$ Stufen

Minimale Spannungsdifferenz zwischen zwei Stufen: $\frac{\Delta U_{x,intervall}}{N-1}$; $N \hat{=}$ Stufen

Stufe bei gegebener Ausgangsspannung: $DACDAT = U_{ziel}/U_{ref}\,(N-1)$

Auflösungsbestimmung Beispiel:

$$e_{quant,max} = \frac{\Delta U}{2}$$

$$\Delta U_{x,Stufe} = \frac{\Delta U_{x,intervall}}{N-1} = \frac{5V}{255}$$

$$e_{quant,max} = \frac{\Delta U_{x,Stufe}}{2} < 1mV = 0{,}001\,V$$

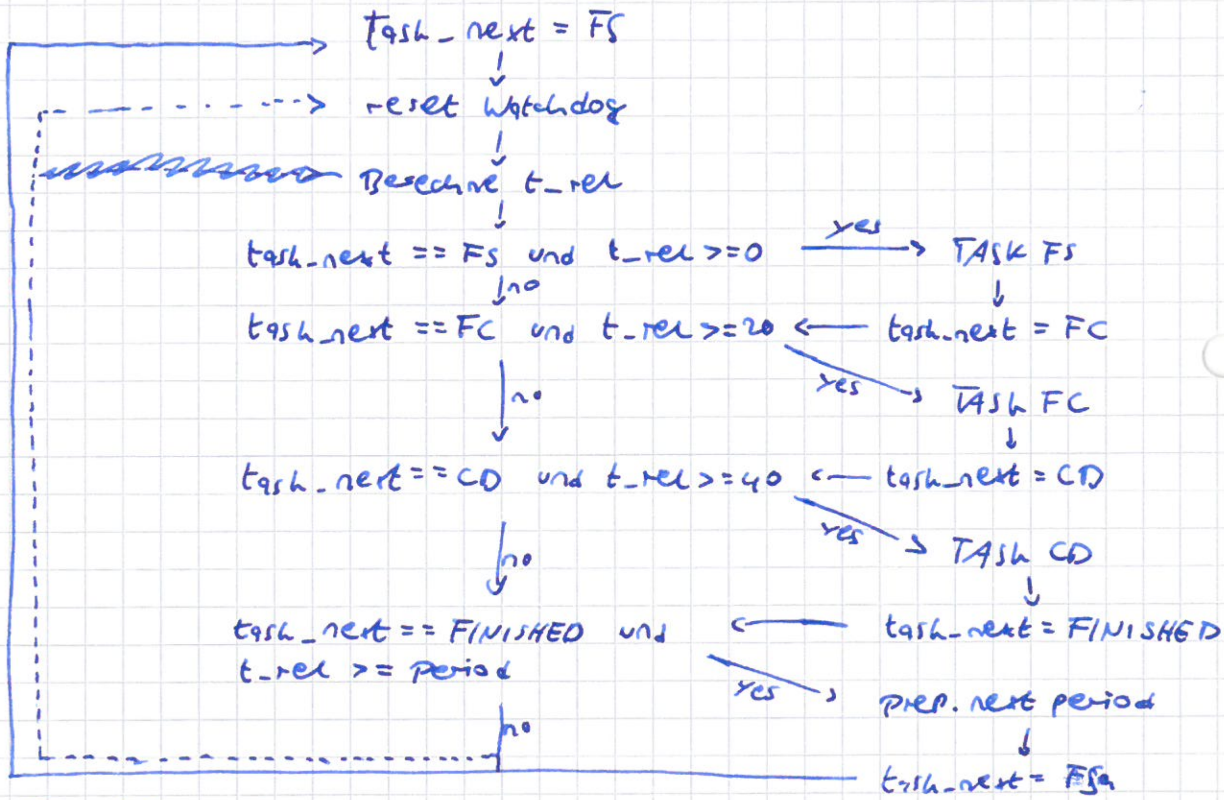
$$e_{quant,max} = \frac{\Delta U_{x,intervall}}{2N-2} < 1mV = 0{,}001\,V$$

$$N > \frac{\Delta U_{x,intervall}}{2 \cdot e_{quant,max}} + 1$$

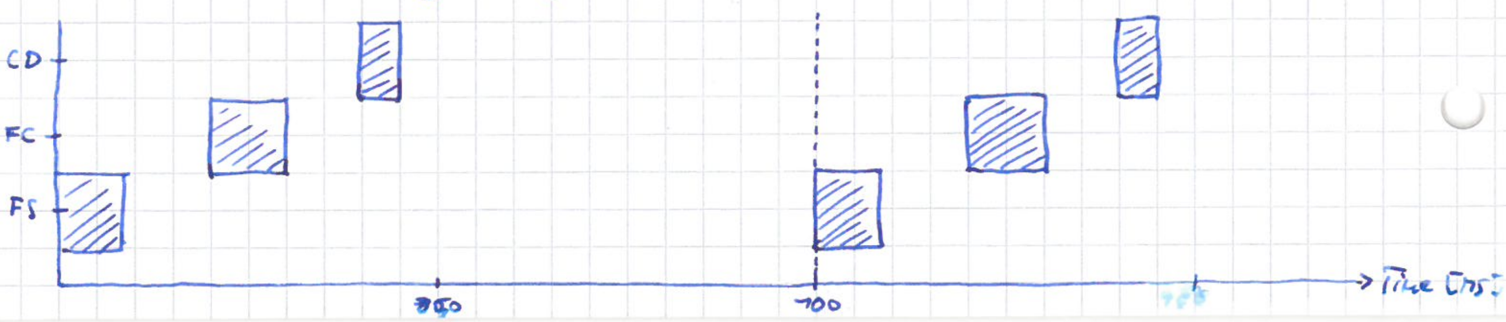
$N > 2501$ → Auflösung muss mind. 12 bits entsprechen

Unterbrechungsfreie Ablaufsteuerung

Task	FC	FS	CD
Anfangsverzögerung t_0 [ms]	20	0	40
Periode Δt [ms]	100	100	100
WCET t_{WCET} (Worst case execution time)	10	8	5



Dazu das Scheduling-Diagramm



IMA – Integrierte modulare Avionik

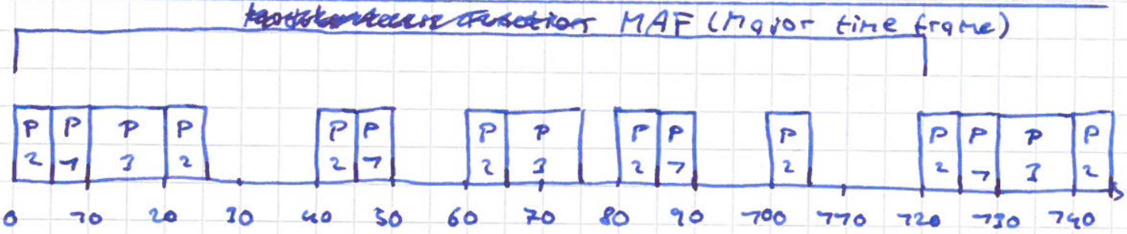
Im Gegensatz zur föderierten Avionik werden bei IMA mehrere Funktionen auf einem einzigen Rechner ausgeführt. Es hat nicht jede Funktion ein eigenes System. (Wurde bis ca. 1990 so gemacht)

Partitionierung auf IMA Rechner

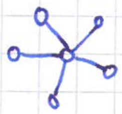
Betriebssystem nach dem "ARINC653" sorgt für robuste räumliche und zeitliche Partitionierung

ARINC653 Partition Schedule (Avionics full-duplex switched Ethernet)

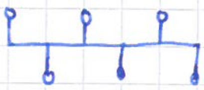
Partition	Periode [ms]	Rechenzeit [ms]
P1	40	5
P2	20	5
P3	60	10



Luftfahrtbussysteme Topologien


Stern-Topologie


Line- oder Daisychain-Topologie


Bus-Topologie

Mögliche Übertragungsrichtungen auf einem Bus

1 – 1	Ein Teilnehmer ist mit genau einem anderen Teilnehmer verbunden
1 – N	Ein Teilnehmer kann N anderen Teilnehmern Nachrichten schicken
N – M	Jeder Teilnehmer kann jedem anderen Nachrichten schicken
Broadcast	Eine Nachricht, die an ~~mehrere~~ alle Busteilnehmer geht ~~[illegible]~~
Multicast	Eine Nachricht, die an mehrere Busteilnehmer geht (nicht zwingend alle)
Peer-to-Peer	Eine Nachricht an genau einen Teilnehmer

Verbindungstopologie im ARINC ~~653~~ 664 (als Beispiel)

Physikalisch : Sterntopologie
Virtuell : 1 – N

Beispiele für digitale Bussysteme

In der Mikroelektronik	In der Industrie	Zu Hause
I^2C, SPI, PCI, USB	CAN, FlexRay, LIN, TTP, TTE, Profibus, KNX	Ethernet, Wlan, DSL, Bluetooth, USB

Echtzeitfähigkeit (Mit 100 Mbit/s AFDX-Netz mit folgenden virtual Links:)

VL [#]	BAG (Bandwidth allocation gap) [ms]	MTU (Maximum transmission unit) [Byte]
1	1	1433
2	2	933
3	8	633

$$8 \cdot \sum_{VL} \frac{MTU_{VL}+67}{BAG_{VL}/1000} \le 6\,[Bit/s] \qquad 67 \mathrel{\hat{=}} \text{Overhead}$$

$$8 \cdot \left(\frac{1433+67}{1/1000} + \frac{933+67}{2/1000} + \frac{633+67}{8/1000} \right) = 16\,700\,000\ \frac{Bit}{s}$$

$$\le 100\,000\,000\ \frac{Bit}{s}$$

Ja, das Netzwerk ist also Echtzeitfähig

AFDX Nachrichtenstruktur

Overhead vor und nach Daten: 67 Byte

Präambel	Ethernet-Header	IP	UDP	Daten	Postambel
konstant	Zieladresse: konst + VLID Quelladresse	Header	Header	17-1471 Byte FDS1, FDS2, ... ~~Functional data~~ sets	Sequenz Nr Prüfsumme konst "0"

Functional data sets (FDS)

Reserved			
FS1	FS2	FS3	FS4
Data set 1			
Data set 2			
Data set 3			
Data set 4			
FS5			
Data set 5			

4 Byte

Bsp einer AFDX Nachricht basierend auf FDS

Name	Datentyp	Status
Motordrehzahl	uint 16	Normal operation
Motortemperatur	uint 16	Normal operation
Propellerpitch	uint 8	No data
Öldruck	float	Normal operation
Treibstoffflussrate	double	No data

	Byte 1	Byte 2	Byte 3	Byte 4
Byte 1	Reserved	Reserved	Reserved	Reserved
Byte 5	NO	NO	NO	NO
" 9	Motordrehzahl	Motordrehzahl		
" 13	Motortemperatur	Motortemperatur		
" 17	Propellerpitch			
" 21	Öldruck	Öldruck	Öldruck	Öldruck
" 25	NO			
" 29	Treibstoffflussrate	Treibstoffflussrate	Treibstoffflussrate	Treibstoffflussrate
" 33	Treibstoffflussrate	Treibstoffflussrate	Treibstoffflussrate	Treibstoffflussrate

Alle Data sets müssen an 4-Byte-Grenzen ausgerichtet sein.

Bandwidth-allocation-gap (BAG)
Festlegung eines maximalen Bandbreite für einen virtual link in einem AFDX-Netzwerk

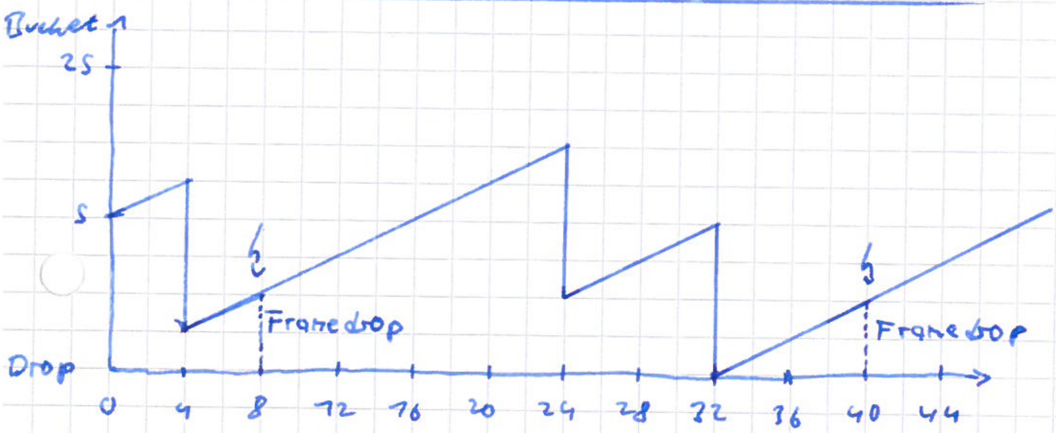
Wahl eines passenden BAGs für 100 Mbit/s AFDX-VL:
kombinierte Rate aller Nachrichten: 20 Hz + 30 Hz + 15 Hz = 65 Hz = $\frac{1}{65}$ s ≈ 15 ms
BAG von 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... möglich. Nächst kleinere wählen.
-> Ein BAG von 8 ms ist ausreichend damit keine Nachricht verloren geht

Maximale Bus-Last bei Nachrichtengröße von 250 Bytes:
65 Hz · (250 · 8) = 130 000 bits/s
130 000 / 100 000 000 = 0,013%

Es wäre nicht sinnvoll, für jeden VL die minimale BAG von 1 ms zu vergeben, weil dadurch unnötig viel Bandbreite reserviert werden würde, die dann für andere Funktionen nicht mehr nutzbar wäre.

Token-Bucket-Verfahren
Diagramm für einen VL mit einer BAG von 16 ms und einer festen Länge von 200 Byte

Ankunft [#]	Zeit [ms]
1	4
2	8
3	24
4	32
5	40



Sampling und Queuing ports
AFDX

Empfangszeitpunkt [ms]	Wert	Lesezeitpunkt [ms]	Sampling port Eingelesen	Queuing Port (n=3) Eingelesen	Bufferinhalt
0	1	2	1	1	[1, -, -]
5	2				[2, -, -]
10	3				[3, 2, -]
15	4				[4, 3, 2]
20	5	22	5	2	[4, 3, -]
25	6				[6, 4, 3]
30	7				[6, 4, 3]
35	8				[6, 4, 3]
40	9	42	9	3	[6, 4, -]
45	10				[10, 6, 4]
50	11				[10, 6, 4]
55	12				[10, 6, 4]