



Lineares unbequemes System

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{q}}(t) + \left(\underbrace{\underline{\underline{D}}_{\text{mod}} + \underline{\underline{D}}_{\text{n.mod}}}_{\underline{\underline{D}}} + \underline{\underline{G}} \right) \dot{\underline{q}}(t) + (\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{N}}) \underline{q}(t) = \underline{f}(t)$$

mit $\underline{\underline{N}} = -\underline{\underline{N}}^T$, $\underline{\underline{G}} = -\underline{\underline{G}}^T$, $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^T$ und $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^T$, $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{D}}, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{K}}, \underline{\underline{N}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Allgemeine Lösung der Eigenschwingung

$$\underline{q}_h(t) = \Re \left\{ \sum_{k=1}^{2n} c_k \underline{\varphi}_k e^{\lambda_k t} \right\}$$

Verallgemeinertes Eigenwertproblem

$$[\lambda_k^2 \underline{\underline{M}} + \lambda_k (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{G}}) + (\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{N}})] \underline{\varphi}_k = \underline{0}$$

Stabilität

$$\det [\lambda_k^2 \underline{\underline{M}} + \lambda_k (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{G}}) + (\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{N}})] = 0 \rightarrow \text{Charakteristische Gleichung}$$

$$\text{Realteil}[\text{Re}\{\lambda_k\}] \begin{cases} < 0 & \text{stabil} \\ = 0 & \text{grenzstabil} \\ > 0 & \text{instabil} \end{cases}$$

Eigenfrequenz (Für schwache Dämpfung $\omega_i \approx \omega_0$: Störversatz $\lambda = \pm \omega_0 + \epsilon_i$)
 $\epsilon_i \hat{=} -d_i \hat{=} \text{Dämpfung}$

Harmonisch erzwungene Schwingungen, Tilgung

Lineares zeitinvariantes System

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{q}} + (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{G}}) \dot{\underline{q}} + (\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{N}}) \underline{q} = \Re \{ \underline{F} e^{i\Omega t} \}$$

Partikuläre Lösung

$$\underline{\hat{q}} = \underline{H} \cdot \underline{F}; \quad \underline{Q} = \varphi_1 \hat{u}_1 + \varphi_2 \hat{u}_2 + \dots$$

$$\underline{Q} = \underline{S}(\Omega)^{-1} \underline{F} = \underline{H}(\Omega) \underline{F}; \quad H(\Omega) = \frac{Q(\Omega)}{U(\Omega)}$$

Gleicher
Nenner,
Zähler
Rang

$$Q_n = \frac{Z_n(\Omega)}{N(\Omega)} \text{ mit } N(\Omega) = \det(\underline{S}(\Omega))$$

$$Z_n(\Omega) = \det(\underline{S}_{dyn}(\Omega))$$

Dynamische Steifigkeitsmatrix

$$\underline{S}(\Omega) = -\Omega^2 \underline{\underline{M}} + i\Omega (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{G}}) + \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{N}}$$

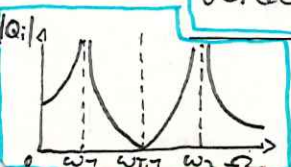
Ungedämpfte Eigenkreisfrequenzen $\omega_{1,2}^2 = -\omega_{1,2}^2$

$$N(\Omega) = 0 \rightarrow \det(\underline{K} - \Omega^2 \underline{\underline{M}}) = 0$$

Tilgung

aus $Q_n(\omega_{T,n}) = 0 \Rightarrow$ insbesondere $Z_n(\omega_{T,n}) = 0$, $N(\omega_{T,n}) \neq 0$
mit Tilgungsfrequenz $\omega_{T,n}$

Tilgungsfrequenzen $\omega_{T,i}$ aus det der modifizierten dyn. Steifigkeitsmatrix $\hat{S}$ beider die i-te Spalte durch Erregervektor $\underline{F}$ ersetzt wird. $Q_i(\Omega = \omega_{T,i}) \neq 0$



Seite 4

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

analog $\underline{\underline{D}}$ und $\underline{\underline{G}}$



Modale Vorgehensweise für lineare Systeme

Im Folgenden sind $\underline{\varphi}_k$, $\underline{\Phi}$ immer massennormiert!

Konservatives, zeitinvariantes System ohne Kreiselkräfte

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{K} \underline{q}(t) = \underline{0} \rightarrow \underline{M} \underline{\varphi}_i \ddot{\eta}_i(t) + \underline{K} \underline{\varphi}_i \eta_i(t) = 0$$

mit $\underline{M} = \underline{M}^T > \underline{0}$, $\underline{K} = \underline{K}^T \geq \underline{0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Bewegung rein in einer Mode:
 $\underline{q}_i(t) = \underline{\varphi}_i \eta_i(t)$

Allgemeine Lösung der Eigenschwingung

$$\underline{q}_h(t) = \sum_{k=1}^{n_0} \underline{\varphi}_k \underbrace{\frac{\eta_k(t)}{(\alpha_k + \beta_k t)}}_{\text{Starrkörpermoden } (\omega_k^2=0)} + \sum_{k=n_0+1}^n \underline{\varphi}_k \underbrace{(\alpha_k \cos(\omega_k t) + \beta_k \sin(\omega_k t))}_{\text{elastische Moden } (\omega_k^2 \neq 0)}$$

Eigenwertproblem

Eigenform der Mode

$$(\underline{K} - \omega_k^2 \underline{M}) \underline{\varphi}_k = \underline{0}, \quad k = 1, \dots, n \quad \omega_k^2 = \frac{\underline{\varphi}_k^T \underline{K} \underline{\varphi}_k}{\underline{\varphi}_k^T \underline{M} \underline{\varphi}_k}$$

Bequemes System

Potentielle Energie aus Bewegungsgleichungen
in den Moden i
 $\tilde{E}_p = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_i^T \underline{K} \underline{q}_i$; $\tilde{E}_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_i^T \underline{M} \dot{\underline{q}}_i$

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{D}_{\text{mod}} \dot{\underline{q}} + \underline{K} \underline{q}(t) = \underline{f}(t)$$

mit $\underline{D}_{\text{mod}} = \underline{D}^T \underline{\Phi}^T \underline{D}_{\text{mod}} \underline{\Phi} = \text{diag}\{2D_i \omega_i\}$

$$\underline{\varphi}_k^* \underline{K} \underline{\varphi}_k = \omega_k^2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \underline{\varphi}_k^T \underline{K} \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \underline{\varphi}_k \rightarrow \underline{\varphi}_k^* = \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \underline{\varphi}_k$$

Rayleigh-Dämpfung

Orthogonalität

$$\underline{D} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}$$

$$D_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta}{2}\omega_i$$

$$\underline{\varphi}_k^T \underline{M} \underline{\varphi}_j = 0, \quad k \neq j$$

$$\underline{\varphi}_k^T \underline{K} \underline{\varphi}_k = \omega_k^2$$

analog für $\underline{K}$ und $\underline{D}_{\text{mod}}$

Massennormierung

$$\underline{\varphi}_k = \frac{1}{\sqrt{\underline{\varphi}_k^* \underline{M} \underline{\varphi}_k}} \underline{\varphi}_k^*$$

Entkoppelte Bewegungsgleichungen

 $\underline{\varphi}_k^*$ = nicht-massennormierter Eigenvektor

$$\ddot{\eta}_k(t) + 2D_k \omega_k \dot{\eta}_k(t) + \omega_k^2 \eta_k(t) = \underline{\varphi}_k^T \underline{f}(t)$$

Homogene Lösung bei unterkritisch gedämpften Systemen mit $\omega_{d,k} = \omega_k \sqrt{1 - D_k^2}$

$$\eta_{k,h}(t) = \begin{cases} (\alpha_k + \beta_k t) & \omega_k = 0 \\ (\alpha_k \cos(\omega_{d,k} t) + \beta_k \sin(\omega_{d,k} t)) e^{-\omega_k D_k t} & \omega_k \neq 0 \end{cases}$$

Partikuläre Lösung mit $\underline{f}(t) = \Re\{\underline{F} e^{i\Omega t}\}$

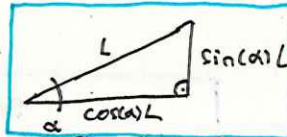
$$\eta_{k,p}(t) = \Re\{\hat{\eta}_k e^{i\Omega t}\} \quad \text{mit} \quad \hat{\eta}_k = \frac{\underline{\varphi}_k^T \underline{F}}{\omega_k^2 + i2D_k \omega_k \Omega - \Omega^2} = \hat{H}_k \hat{f}_k$$

Rücktransformation

$$\underline{q}(t) = \sum_{k=1}^n \underline{\varphi}_k \eta_k(t) = \underline{\Phi} \underline{\eta}(t)$$

$$\hat{\eta}_k = \frac{\underline{\varphi}_k^T \underline{f}}{\omega_k^2 - \Omega^2}$$

Vergroßerungsfunktion
 $V(\gamma) = \alpha_{-1} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$
 η Frequenzverhältnis $\frac{\omega}{\omega_k}$
 D Lehrsche Dämpfung
 ω_k Erregerkreisfrequenz
 ω ungedämpfte Eigenfrequenz



$$\frac{d}{dt} \sin(\alpha x)^2 = 2 \alpha \cos(\alpha x) \sin(\alpha x)$$

Aufstellen von Bewegungsgleichungen von Starrkörpersystemen in der $x-y$ -Ebene

Vorgehen nach Newton-Euler

Impulssatz

$$m_i \ddot{x}_{C,i} = \sum_j F_{j,x}$$

$$m_i \ddot{y}_{C,i} = \sum_j F_{j,y}$$

Punktmasse am Pendel
 $E_k = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$

Drallsatz bzgl. raumfesten Punkt bzw. Schwerpunkt

$$J_i^{(A)} \ddot{\varphi}_i = \sum_k M_k^{(A)}$$

$J_i^{(A)} = m l^2$ bei Pendel

Satz von Steiner mit Punkt A und Schwerpunkt C

$$J_{zz}^{(A)} = J_{zz}^{(C)} + m (x_{AC}^2 + y_{AC}^2)$$

Auf Pendel einfach nur Distanz

Vorgehen nach Lagrange

Kinetische Energie eines Starrkörpers K mit Schwerpunkt C oder raumfestem Punkt Q

$$E_k^{(K)} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J_{zz}^{(C)} \dot{\varphi}_z^2 = \frac{1}{2} J^{(Q)} \dot{\varphi}^2$$

Potentielle Energie einer Feder k

$$E_p^{(k)} = \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

Potentielle Energie einer Masse m im Schwerfeld g

$$E_p^{(mg)} = mgh$$

Nichtkonservative Kräfte und Momente im ebenen Fall X_f : Angriffspunkt der Kraft in x

$$Q_s^{nk} = \sum_i F_{i,x} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s} + F_{i,y} \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_s} + \sum_j M_{j,z} \frac{\partial \dot{\varphi}_{j,z}}{\partial \dot{q}_s}$$

Dämpfer immer neg. Vorzeichen

Aufstellen der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_s} + \frac{\partial E_p}{\partial q_s} = Q_s^{nk}, \quad s = 1, \dots, n$$

Linearisierung, Ruhelagen

Bestimmen der Ruhelage $\underline{q}_0$

$$\underline{M}(\underline{q}) \ddot{\underline{q}} + \underline{g}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \underline{f}(t)$$

$$\underline{f}(t) = \text{const.}, \quad \ddot{\underline{q}} = \underline{0}, \quad \dot{\underline{q}} = \underline{0} \Rightarrow \underline{g}(\underline{q}_0) = \underline{f}$$

Taylorentwicklung um stabile Ruhelage mit $\Delta \underline{q} = \underline{q} - \underline{q}_0$

$$\underline{M}(\underline{q}_0) \Delta \ddot{\underline{q}} + \left. \frac{\partial \underline{g}}{\partial \dot{\underline{q}}} \right|_{\underline{q}_0, \dot{\underline{q}}_0} \Delta \dot{\underline{q}} + \left. \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{q}} \right|_{\underline{q}_0, \dot{\underline{q}}_0} \Delta \underline{q} = \underline{f}(t) + \text{H.O.T.}$$

$$\left. \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{q}} \right|_{\underline{q}_0, \dot{\underline{q}}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial q_1} & \frac{\partial g_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial q_1} & \frac{\partial g_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} \bigg|_{\underline{q}_0, \dot{\underline{q}}_0}$$

Euler-Bernoulli-Theorie: Ansatzfunktion für Balken mit $C = \frac{x}{L}$
 $\psi_1 = 1 - 3C^2 + 2C^3$ $\psi_2 = L \epsilon C(1 - C)^2$ $\psi_3 = \epsilon^2 (3 - 2C)$ $\psi_4 = L \epsilon^2 C^2 (C - 1)$
 Elementmatrizen und Lastvektor aus Vorlesung: $\underline{M}^{(e)} = \{m_{ij}\}$; $\underline{k}^{(e)} = \{k_{ij}\}$; $\underline{f}^{(e)} = \{f_i\}$
 $m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i \psi_j dx = \int_0^1 \rho A L \epsilon \psi_i \psi_j d\epsilon$; $k_{ij} = \int_0^L E I \psi_i'' \psi_j'' dx = \int_0^1 E I L \epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial \epsilon^2} \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \epsilon^2} L \epsilon d\epsilon$; $f_i^{(e)} = \int_0^L \psi_i p^{(e)}(x) dx = \int_0^1 \psi_i p^{(e)}(L \epsilon) L \epsilon d\epsilon$



Dann $D = \frac{1}{2\omega} = \frac{1}{2\omega_0}$
nach mol 7

Einfreiheitsgradsysteme

Standardform, frei

$$\ddot{q} + 2D\omega\dot{q} + \omega^2 q = 0$$

Im Frequenzbereich: $\dot{q} \hat{=} i\omega \times (\omega)$
Allgemeine Lösung $\ddot{q} \hat{=} -\omega^2 \times (\omega)$

$D = \frac{b}{m} = \frac{d}{m} \cdot \frac{1}{2\omega} = \frac{d}{2\sqrt{mk}} = \frac{D\omega}{\omega_0}$; $\omega = |\lambda|$
 $\omega^2 = \frac{k}{m}$; $\lambda_{1,2} = -D\omega \pm \omega\sqrt{1-D^2}$
Periodendauer $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$

Ersatzgleichung
 $m\ddot{q} + b\dot{q} + kq = 0$
↳ Ersatzsteifigkeit
↳ Ersatzdämpfung
↳ Ersatzmasse

kritisch:
 $D > 0.7$

$D = 0.7$

Unterkritisch
 $D < 0.7$

D	Zeitverlauf	Trajektorie	$\delta_{1,2}$	ω_d	$q(t)$
gedämpft	$[+1, +\infty[$ Kriechen	stabil	$D\omega(1 \pm \sqrt{1-D^2})$	—	$Ae^{-\delta_1 t} + Be^{-\delta_2 t}$ für $D > 1$ $(A+Bt)e^{-\delta t}$ für $D = 1$
	$]0, +1[$ Schwingen	stabil	$D\omega$	$\omega\sqrt{1-D^2}$	<u>Ansatz für Pendel</u> $Ae^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \psi)$
ungedämpft	$\{0\}$ Schwingen	grenz-stabil	0	ω	Amplitude, z.B. auch $\hat{e}$ $A \cos(\omega_d t + \psi)$
	$] -1, 0[$ Schwingen	instabil	$D\omega$	$\omega\sqrt{1-D^2}$	$Ae^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \psi)$
angefacht	$] -\infty, -1[$ Kriechen	instabil	$D\omega(1 \pm \sqrt{1-D^2})$	—	$(A+Bt)e^{-\delta t}$ für $D = -1$ $Ae^{-\delta_1 t} + Be^{-\delta_2 t}$ für $D < -1$
$D, \omega \in \mathbb{R}$				$A, B, \delta_i, \omega_d, \psi \in \mathbb{R}$	

Eigenfrequenzen mit AWP: $\det(k - \omega^2 M) = 0$

Eigenformen ξ_i sind dann Eigenvektoren

Gleichwertige Darstellung harmonischer Funktionen

Allgemeine Lösung: $q(t) = e^{-D\omega t} (\alpha \cos(\omega_d t) + \beta \sin(\omega_d t))$

Je größer D, desto schneller fällt die Hüllkurve ab

$$u(t) = A \cos(\Omega t + \beta_c) = A \sin(\Omega t + \beta_s)$$

$$= U_c \cos \Omega t + U_s \sin \Omega t$$

$$= \Re\{U e^{i\Omega t}\} = \Re\{\bar{U} e^{-i\Omega t}\}$$

$$= \frac{U e^{i\Omega t}}{2} + \frac{\bar{U} e^{-i\Omega t}}{2} = U \frac{e^{i\Omega t}}{2} + \text{c.c.}$$

mit $U \in \mathbb{C}$, $U_c, U_s, A, \Omega, t, \beta_c, \beta_s \in \mathbb{R}$ und $U = U_c - iU_s = A e^{i\beta_c}$, $\beta_s = \beta_c + \frac{\pi}{2}$

Erzwungene Schwingung

$$\ddot{q} + 2D\omega\dot{q} + \omega^2 q = \Re\{F e^{i\Omega t}\}$$

Allgemeine Lösung:

$$q(t) = \Re\{|Q| e^{i(\psi_u + \Delta\psi)} e^{i\Omega t}\} + q_h(t)$$

Logarithmisches Dekrement

$$\Lambda = \frac{1}{N} \ln \left(\frac{q_i}{q_{N+i}} \right) = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

Strukturdynamik: Fragestellung + Hilfen

7

Entstehungsmechanismen von Schwingungen:

Autonom (erfolgt ausschließlich in vom System selbst bestimmten Frequenzen)

- freie Schwingungen / Überlagerte Eigenschwingungen
- selbsterregte Schwingungen wie beim Pendel

Heteronom (Frequenzen werden von äußeren Einflüssen verändert)

- erzwungene Schwingungen (zeitlich schwache Einflüsse zwingen System Frequenz auf)
- parametersonterregte Schwingungen (Systemeigenschaft ändert sich mit der Zeit, sodass Schwingungen angefangen werden (wie Schaukeln))

Numerische Zeitschrittintegrationsverfahren

Explizit: Berechnen Zustand des Systems zu einem neuen Zeitpunkt direkt aus Zustand des Systems aus vorherigen Zeitpunkt. - können instabil werden aber sind einfach. (Bsp. Euler-Verfahren)

Implizit: Lösen Gleichungen, die den Zustand des Systems am neuen Zeitpunkt enthalten, was oft Lösung eines LGS erfordert. - stabiler, aber mehr Aufwand.

Verfahren für DGL-Systeme 1. Ordnung: (Wachstumsprozesse, EL-Schaltungen,...)

- Euler-Verfahren, Runge-Kutta-Verfahren

Verfahren für DGL-Systeme 2. Ordnung: (FEM, Beschleunigung,...)

- Newmark-Verfahren, Zentralkoeffizienten-Verfahren

Dynamische Substrukturtechnik

Schwingungsberechnung kopplierter Tragwerke: Vorgehen:

1. Gesamtstruktur in Teilstruktur zerlegen (mehr oder weniger willkürlich)
2. Vorbehandlung der Substrukturen zur Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade
3. Reduktion der Freiheitsgrade mit Methoden der Kondensation und Symmetrieausnutzung
4. Aus Substrukturmetriken die reduzierten Bewegungsgleichungen für das Gesamttragwerk aufstellen.

Alternativ kürzere Formulierung des gleichen Ablaufs:

1. Unterteilung in Komponente
2. Ableitung reduzierter Modelle der einzelnen Komponente
3. Zusammenbau des Gleichungssystems unter Berücksichtigung des Verhaltens an den Schnittstellen.

Eigenschaften eines Systems (Anhand der Bewegungsgleichung)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \cos(3t) \end{bmatrix}}_F$$

M sym + pos. definit

K sym + pos. definit

D Proportional gedämpft

→ System ist bogen

$$D = \frac{1}{2} M + \frac{1}{2} K$$

→ Rayleigh-Dämpfung, System

ist proportional gedämpft

(Also keine gekoppelten!!)

$\omega^2 = 0$ einsetzen
↓
 $\det(K - \omega^2 M) = 0$
 $\omega^2 = 0$
 $\det(K) \neq 0$ → keine Steatormode

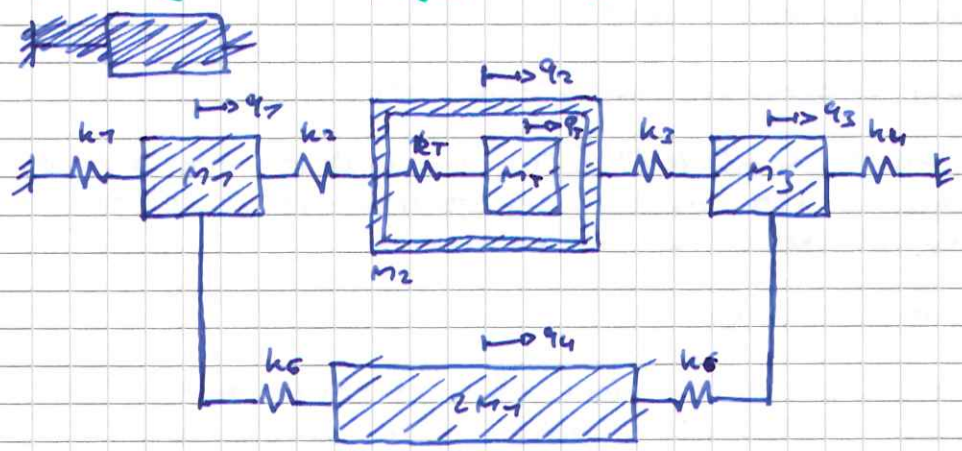
Heteronom, äußere Einflüsse sind zeitabhängig und verändern Frequenz

Dämpfung und äußere Kraft nicht 0
→ Nicht konservatives System

Zwei-Freiheitsgrad-System mit Eigenwerten $\lambda_i = -\delta_i \pm i\omega_{d,i}$

Realteil Eigenwert $\hat{=}$ Dämpfung
 Imaginärteil Eigenwert $\hat{=}$ Kreisfrequenz

Beispielaufgabe Bewegungsgleichung ablesen



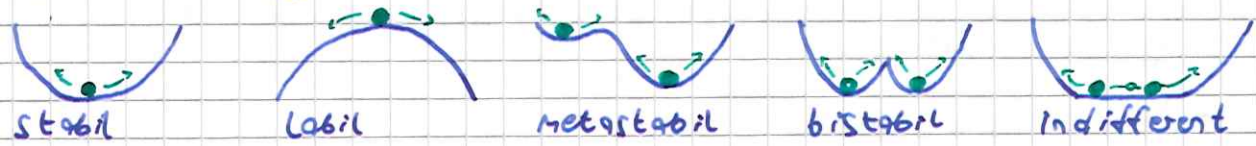
k_{ij} = angrenzende Federn wenn $i=j$
 negative Verbindungsfeder zwischen zwei Massen wenn $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2+k_5 & -k_2 & 0 & -k_5 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3+k_1 & -k_3 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4+k_1 & -k_4 & 0 \\ -k_5 & 0 & -k_4 & k_4+k_5 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_1 \end{bmatrix} = 0$$

System besitzt keine Starrkörpermoden, weil es an Umgebung gehoppelt ist - keine freie Bewegung möglich. Daher alle Moden elastisch

Verhalten von Gleichgewichten bei Störungen:

- Stabil - Das System kehrt nach einer Störung wieder in seinen Ausgangspunkt zurück
- Labil - Das System geht bei der kleinsten Störung in einen anderen Zustand über
- Indifferent - Das System kommt nach jeder Störung in einen neuen Zustand zur Ruhe
- Metastabil - Das System geht nach einer ausreichend großen Störung in einen stabileren Gleichgewichtszustand über



Tilger, Resonanz, Scheinresonanz

Nicht an zwischen zwei Objekten sondern nur an einem. Verbindung ist so weich ausgelegt, dass die Masse des Tilgers den Bewegungen des Objekts mit Verzögerung folgt. Eigenfrequenz ist auf zu eliminierende Resonanzfrequenz des Objekts abgestimmt. (Durch die Phasenverschiebung löschen sich die beiden Schwingungen aus)

Scheinresonanz, wenn Tilgerfrequenz $\omega_{T,i}$ mit einer Eigenfrequenz ω_i zusammenfällt - keine große praktische Bedeutung

Allgemeine Lösung eines linearen, bequemen, konservativen Schwingungssystems ist eine Linearkombination der Eigenschwingungen

Antiresonanz

Frequenzzug zwischen zwei Eigenfrequenzen weist eine Nullstelle auf. Die Kraft auf die Masse an der Einleitungsstelle (nicht überakk!) wird durch eine in Gegenphase schwingende Masse kompensiert (Schwingungstilger)

$$q(t) = \hat{q} \cos(\omega_d t + \psi) e^{-D\omega_d t}$$

$\hat{q}$ $\hat{=}$ "Maximale Anfangsamplitude" / Wenn keine Dämpfung, dann einfach "Amplitude"
 ω_d $\hat{=}$ "Gedämpfte Eigenfrequenz" - Bestimmt Periodendauer der Schwingung $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$
 ψ $\hat{=}$ "Phasenverschiebung" - Verschiebung nach links oder rechts (zeitlich)
 $e^{-D\omega_d t}$ $\hat{=}$ "Exponentialterm" - Je größer D, desto schneller fällt die Hüllkurve ab.

Allgemeines zur Klausur:

stehts ca. eine Aufgabe überhang
Formelsammlungen werden kontrolliert
Kontinguum kommt nur im Fragenteil dran!

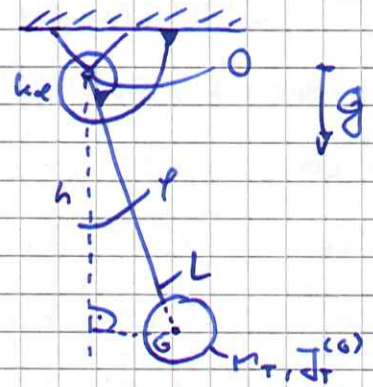
a) Trägheitsmoment um O

$$J_T^{(O)} = J_T^{(G)} + M_T L^2$$

Fkn um G + Steiner-Anteil

Restliche Komponenten im System sind masselos

↳ spielen für Flächenträgheitsmoment keine Rolle



b) $E_p = M_T \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot k_x \cdot e^2$

$h = -L \cdot \cos(\varphi)$ negativ, weil potentielle Energie höher mit kleineren h

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot J_T^{(G)} \cdot \omega^2$$

$\omega = \dot{\varphi}$ keine Translation, daher spielt L keine Rolle

Anderer Ansatz über den Drallsatz $J_T^{(O)} \ddot{\varphi} = \sum M$

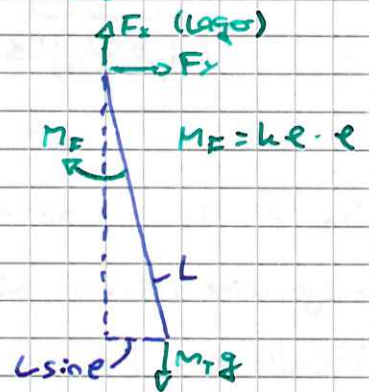
$$J_T^{(O)} \ddot{\varphi} = -k_x \cdot e - M_T \cdot g \cdot L \sin(\varphi)$$

$$J_T^{(O)} \ddot{\varphi} + k_x e + M_T g L \sin(\varphi) = 0 \quad | \cdot \dot{\varphi}$$

$$J_T^{(O)} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + k_x e \dot{\varphi} + M_T g L \sin(\varphi) \dot{\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_T^{(O)} \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k_x e^2 + M_T g L (-\cos(\varphi)) \right)$$

Kettenregel E_{kin} Kettenregel (more Ableitung) E_{pot}



c) $J_T^{(O)} \ddot{\varphi} = -k_x e - M_T g L \sin(\varphi)$

Taylorentwicklung um Ruhelage $\varphi_0 = 0$

↳ Umwandlung der Funktion in Potenzreihe $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i$
Linearisierung für kleine Bewegungen → nur einfache Potenzreihe!

$$J_T^{(O)} \ddot{\varphi} \approx (-k_x \varphi_0 - M_T g L \sin(\varphi_0)) + \left((-k_x - M_T g L \cos(\varphi_0)) (\varphi - \varphi_0) \right) + \dots$$

$$J_T^{(O)} \ddot{\varphi} = (-k_x - M_T g L) \varphi \quad \text{für } |\varphi - \varphi_0| \ll \pi/2$$

Das war ziemlich sicher das "Vorgehen nach Newton"

d) Harmonischer Lösungsansatz $\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega t + \psi)$
klassischer Ansatz bei linearen DGL zweiter Ordnung ungedämpfter Systeme
↳ Phaseverschiebung
↳ Harmonische Schwingung
↳ Eigenfrequenz
↳ Amplitude der Schwingung

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega t + \psi)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\omega \hat{\varphi} \sin(\omega t + \psi)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \hat{\varphi} \cos(\omega t + \psi)$$

Ableitungen in Bewegungsgleichungen einsetzen

$$J^{(0)} \cdot (-\omega^2 \hat{e} \cos(\omega t + \varphi)) = (-m_T g L - k_x) (\hat{e} \cos(\omega t + \varphi))$$

~~$$J^{(0)} \cos(\omega t + \varphi) + J^{(0)} \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = (-m_T g L - k_x) \cos(\omega t + \varphi)$$~~

$$(\hat{e} \cos(\omega t + \varphi)) (-J^{(0)} \omega^2 + m_T g L + k_x) = 0$$

(1) Triviale Lösung für $\hat{e} = 0 \rightarrow$ nicht für uns interessant

$$(2) -J^{(0)} \omega^2 + m_T g L + k_x \stackrel{!}{=} 0$$

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{m_T g L + k_x}{J^{(0)}}}$$

Alternativ lösbar über Standardform der Bewegungsgleichung $\ddot{e} + 2D\omega \dot{e} + \omega^2 e = 0$

$$J^{(0)} \ddot{e} = (-k_x - m_T g L) e$$

$$J^{(0)} \ddot{e} + \underbrace{(k_x + m_T g L)}_{\omega^2 J^{(0)}} e = 0$$

$$\ddot{e} + \underbrace{\left(\frac{k_x + m_T g L}{J^{(0)}} \right)}_{\omega^2} e = 0 \rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{k_x + m_T g L}{J^{(0)}}}$$

②
a)

$q_0 > q_2 \rightarrow$ Abklingende Schwingung

Allgemeine Lösung für gedämpfte Schwingung aus

Tabelle aus Formelsammlung:

$$q(t) = \underbrace{\hat{q}}_{\text{Abkl. Amplitude}} e^{-D\omega t} \underbrace{\cos(\omega_d t + \varphi)}_{\text{Harmonische Schwingung}} ; q(t=0) = q_0 ; q(t=t_2) = q_2$$

$$q_0 = \hat{q} \cos(\varphi)$$

$$q_2 = \hat{q} e^{-D\omega t_2} \cos(\omega_d t_2 + \varphi) \quad t_2 \text{ sind zwei Periodendauern, also muss } \cos \text{ bei } t_2 \text{ wieder gleich sein wie bei } t_0$$

$$q_2 = \hat{q} e^{-D\omega t_2} \cos(\varphi)$$

$$\frac{q_0}{q_2} = \frac{\cos(\varphi) \hat{q}}{\hat{q} e^{-D\omega t_2} \cos(\varphi)} = \frac{\hat{q}}{\hat{q}} e^{D\omega t_2}$$

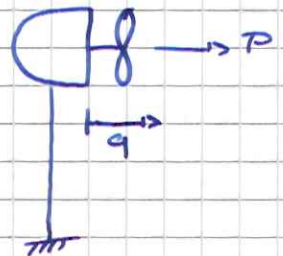
$$D\omega t_2 = \ln\left(\frac{q_0}{q_2}\right) ; \omega_d = \omega \sqrt{1 - D^2}$$

$$t_2 = 2 \cdot T_d = 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega_d} \rightarrow \omega_d = \frac{4\pi}{t_2}$$

$$\frac{4\pi}{t_2} = \omega \sqrt{1 - D^2}$$

$$\omega = \frac{4\pi}{t_2 \sqrt{1 - D^2}}$$

$$\frac{D \cdot 4\pi}{t_2 \sqrt{1 - D^2}} = \ln\left(\frac{q_0}{q_2}\right)$$



Strukturdynamik Übung 7 - Eigenschwingungen von EFS

(3)

$$\frac{D \cdot 4\pi}{\sqrt{1-D^2}} = \ln\left(\frac{q_0}{q_2}\right)$$

$$\frac{D^2 \cdot 76\pi^2}{1-D^2} = \ln^2\left(\frac{q_0}{q_2}\right)$$

$$D^2 \cdot 76\pi^2 = \ln^2\left(\frac{q_0}{q_2}\right) (1-D^2)$$

$$D^2 (76\pi^2 + \ln^2\left(\frac{q_0}{q_2}\right)) = \ln^2\left(\frac{q_0}{q_2}\right)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{76\pi^2 + \ln^2\left(\frac{q_0}{q_2}\right)}} \cdot \ln\left(\frac{q_0}{q_2}\right)$$

Dämpfungsgrad macht nur positiv in dieser Aufgabe Sinn, daher kein $\pm$ vor der Wurzel.

$$D = \frac{\ln\left(\frac{q_0}{q_2}\right)}{\sqrt{76\pi^2 + \ln^2\left(\frac{q_0}{q_2}\right)}}$$

$$b) \omega = \frac{4\pi}{t_2 \sqrt{1-D^2}} = \frac{4\pi}{t_2 \sqrt{1 - \frac{\ln^2\left(\frac{q_0}{q_2}\right)}{76\pi^2 + \ln^2\left(\frac{q_0}{q_2}\right)}}}$$

c) Steifigkeit = Kraft / Auslenkung

$$k^* = \frac{P}{q_0}$$

$$m^* \ddot{q} + b^* \dot{q} + k^* q = 0$$

Ersatzmasse Ersatzdämpfung Ersatzsteifigkeit



d) Die Parameter des Ersatzsystems und die der Normalform hängen voneinander ab:

$$2 D \omega_0 = \frac{b^*}{m^*} ; \omega_0^2 = \frac{k^*}{m^*}$$

$$m^* = \frac{P/q_0}{\left(\frac{4\pi}{t_2 \sqrt{1-D^2}}\right)^2} = \frac{P t_2^2 (1-D^2)}{90 \cdot 76\pi^2}$$

⑦

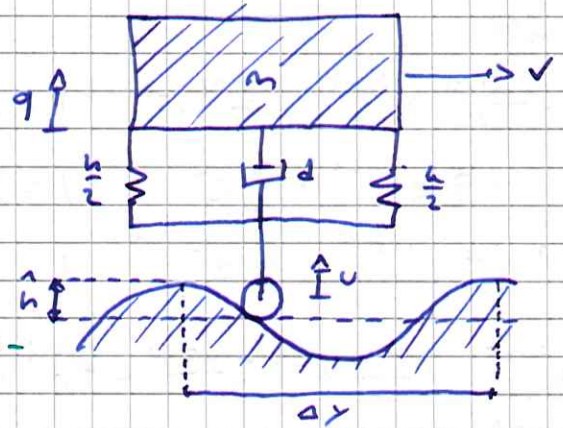
a) Räumliche Periodendauer : Δx

Zeitliche Periodendauer : $T : v = \frac{\Delta x}{T} \rightarrow T = \frac{\Delta x}{v}$

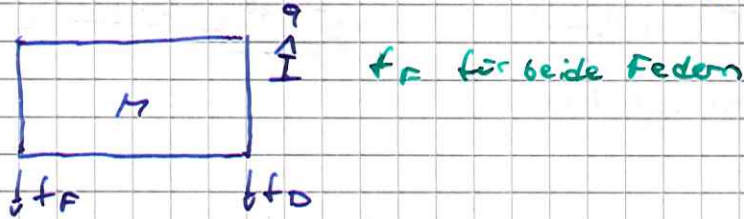
Anregungsfrequenz : $\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\Delta x}$

Frequenz $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\Delta x}$

Bodenwelle werden als cos-Funktion mit Anregungsfrequenz Ω und Amplitude $\hat{u}$ modelliert
 $u(t) = \hat{u} \cos(\Omega t + \varphi)$



b) Freischneiden



Impulssatz bei Rotierendem Systemen Drucksatz (nur in q-Richtung)

$$M \ddot{q} = \sum_i F_{iq}$$

$$f_F = \left(\frac{k}{2} + \frac{k}{2}\right) (q(t) - u(t))$$

$$M \ddot{q} = -f_F - f_D$$

$$f_D = d (\dot{q}(t) - \dot{u}(t))$$

$$M \ddot{q} = -k(q(t) - u(t)) - d(\dot{q}(t) - \dot{u}(t))$$

~~Restriktion~~

$$M \ddot{q} + d \dot{q} + k q = \text{falsch } d \dot{u} + k u \quad | : M$$

c) $2D\omega = \frac{d}{M} \quad \omega^2 = \frac{k}{M}$ Formeln für c) aus Bux und jetzt Formelsammlung

$$\ddot{q} + \frac{d}{M} \dot{q} + \frac{k}{M} q = \frac{d}{M} \dot{u} + \frac{k}{M} u$$

$$\ddot{q} + 2D\omega \dot{q} + \omega^2 q = 2D\omega \dot{u} + \omega^2 u$$

$$\text{mit } D = \frac{d}{M} \cdot \frac{1}{2\omega} = \frac{d}{M} \cdot \frac{1}{2\sqrt{k/M}} = \frac{d}{2\sqrt{Mk}}$$

$$D_{\text{vor}} = \frac{d}{2\sqrt{Mk}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1,7}} \cdot \frac{d}{\sqrt{Mk}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1,7}}$$

D verringert sich bei Massenerhöhung auf ca. 0,95 D

d) Ansatz für partikuläre Lösung abhängig von Anregungsart - siehe Formelsammlung

$$q(t) = \frac{Q}{2} e^{i\Omega t} + \frac{Q}{2} e^{-i\Omega t}$$

$$u(t) = \frac{U}{2} e^{i\Omega t} + \frac{U}{2} e^{-i\Omega t}$$

$$\dot{q}(t) = \frac{i\Omega Q}{2} e^{i\Omega t} - \frac{i\Omega Q}{2} e^{-i\Omega t}$$

$$\dot{u}(t) = \frac{i\Omega U}{2} e^{i\Omega t} - \frac{i\Omega U}{2} e^{-i\Omega t}$$

$$\ddot{q}(t) = -\frac{\Omega^2 Q}{2} e^{i\Omega t} - \frac{\Omega^2 Q}{2} e^{-i\Omega t}$$

Stationäre Schwingung $\hat{=}$ Partikuläre Lösung
 Einschwingvorgang $\hat{=}$ Homogene Lösung

Ansatz in Bewegungsgleichung einsetzen

21

~~Ansatz~~

$$\left(-\frac{\Omega^2 Q}{2} e^{i\Omega t} - \frac{\Omega^2 Q}{2} e^{-i\Omega t}\right) + 2D\omega \left(\frac{i\Omega Q}{2} e^{i\Omega t} - \frac{i\Omega Q}{2} e^{-i\Omega t}\right) + \omega^2 \left(\frac{Q}{2} e^{i\Omega t} + \frac{Q}{2} e^{-i\Omega t}\right) = 2D\omega \left(\frac{i\Omega U}{2} e^{i\Omega t} - \frac{i\Omega U}{2} e^{-i\Omega t}\right) + \omega^2 \left(\frac{U}{2} e^{i\Omega t} + \frac{U}{2} e^{-i\Omega t}\right)$$

$$\underline{e^{i\Omega t} \left(-\frac{\Omega^2 Q}{2} + \frac{2D\omega i\Omega Q}{2} + \frac{\omega^2 Q}{2}\right)} + \underline{e^{-i\Omega t} \left(-\frac{\Omega^2 Q}{2} - \frac{2D\omega i\Omega Q}{2} + \frac{\omega^2 Q}{2}\right)} = \underline{e^{i\Omega t} \left(\frac{2D\omega i\Omega U}{2} + \frac{\omega^2 U}{2}\right)} + \underline{e^{-i\Omega t} \left(\frac{2D\omega i\Omega U}{2} + \frac{\omega^2 U}{2}\right)}$$

Koeffizientenvergleich

~~Ansatz~~

$$Q(-\Omega^2 + 2D\omega i\Omega + \omega^2) \stackrel{!}{=} U(2D\omega i\Omega + \omega^2)$$

$$Q(-\Omega^2 - 2D\omega i\Omega + \omega^2) \stackrel{!}{=} U(-2D\omega i\Omega + \omega^2)$$

Bereits 2. gegeben

Wenn eine Gleichung erfüllt, ist andere automatisch auch erfüllt
 → Es muss nur eine betrachtet werden.

partikuläre Lösung $q(t) = \frac{Q}{2} e^{i\Omega t} + c.c.$

Mit $Q = \frac{-2D\omega i\Omega + \omega^2}{-\Omega^2 - 2D\omega i\Omega + \omega^2}$ $\xrightarrow{U}$ Anregungsweite dynamisch $q(\Omega)$
 $\xrightarrow{}$ Steifigkeit d. dynamisch $s(\Omega)$

Vergrößerung erstmal überspringen

~~Ansatz~~

$$V(D) = \frac{|Q|}{|U|}(D) = \frac{|1 - 2D\omega i\Omega + \omega^2|}{|1 - \Omega^2 - 2D\omega i\Omega + \omega^2|} \quad \Bigg| \cdot \frac{\frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}}$$

$$= \frac{|1 - 2D\omega i\Omega + 1|}{|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - 2D\omega i\Omega + 1|}$$

$$= \frac{|1 - 2D\omega i\Omega + 1|}{|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - 2D\omega i\Omega + 1|}$$

$$= \frac{|1 - 2D\omega i\Omega + 1|}{|1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} - 2D\omega i\Omega + 1|}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 + (2D\omega\Omega)^2)}}{\sqrt{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2})^2 + (2D\omega\Omega)^2}} = f(D, \Gamma)$$

$$\Gamma = \frac{\Omega}{\omega}$$

$$\Omega = 0 \rightarrow \Gamma = 0 \quad V(D) = \frac{1}{1}$$

$$\Omega = \omega \rightarrow \Gamma = 1 \quad V(D) = \frac{\sqrt{(1 + (2D)^2)}}{\sqrt{(1 - 1)^2 + (2D)^2}} \approx \frac{1}{2D} \text{ groß wenn } 0 < D < 1$$

$$\Omega \rightarrow \infty \rightarrow \Gamma \rightarrow \infty \quad V(D) \Rightarrow 0$$

e) Wenn ist $V=1$? bei $\sqrt{1 + (2D\Gamma)^2} = \sqrt{(1 - \Gamma^2) + (2D\Gamma)^2} \rightarrow \Gamma=0; \Gamma=\sqrt{2}$ unabhängig von D

$V > 1$ ($\hat{=}$ Vergrößerung) für $\Gamma \in [0, \sqrt{2}]$ klein für $\Gamma > \sqrt{2}$ ausgelegt sein. Dämpfung sollte groß für $0 < \Gamma < \sqrt{2}$ und

Strukturdynamik Übung 2 Erzwungene Schwingungen von EFS

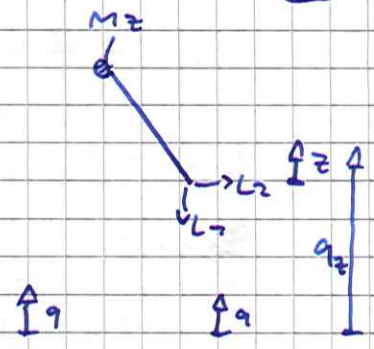
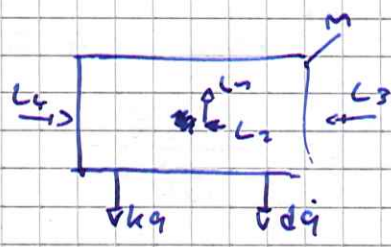
31

2
a)

Impulssatz in Vertikaler Richtung M, M_2 :

$$M \ddot{q} = -kq - d\dot{q} + L_1$$

$$M_2 \ddot{q}_2 = -L_1$$



Kinematischen Bedingungen:

$$q_2 = q + z = q + \hat{z} \cos(\Omega t)$$

$$\dot{q}_2 = \dot{q} + \dot{z} = \dot{q} - \Omega \hat{z} \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{q}_2 = \ddot{q} + \ddot{z} = \ddot{q} - \Omega^2 \hat{z} \cos(\Omega t)$$

$$\rightarrow L_1 = -M_2 (\ddot{q} - \Omega^2 \hat{z} \cos(\Omega t))$$

$$\rightarrow M \ddot{q} = -kq - d\dot{q} - M_2 (\ddot{q} - \Omega^2 \hat{z} \cos(\Omega t))$$

$$\rightarrow (M + M_2) \ddot{q} + d\dot{q} + kq = M_2 \Omega^2 \hat{z} \cos(\Omega t)$$

Einfreiheitsgradschwinger Fremderregt

b) $q(t) = \frac{Q}{2} e^{i\Omega t} + \frac{Q}{2} e^{-i\Omega t}$

$$\dot{q}(t) = \frac{i\Omega Q}{2} e^{i\Omega t} - \frac{i\Omega Q}{2} e^{-i\Omega t}$$

$$\ddot{q}(t) = -\frac{\Omega^2 Q}{2} e^{i\Omega t} - \frac{\Omega^2 Q}{2} e^{-i\Omega t}$$

$$\ddot{q} + 2D\omega \dot{q} + \omega^2 q = \frac{M_2}{M + M_2} \Omega^2 \hat{z} \cos(\Omega t) = z(t)$$

Einsetzen des Ansatzes ergibt:

$$(-\Omega^2 \frac{Q}{2} e^{i\Omega t} - \Omega^2 \frac{Q}{2} e^{-i\Omega t}) + 2D\omega (i\Omega \frac{Q}{2} e^{i\Omega t} - i\Omega \frac{Q}{2} e^{-i\Omega t}) + \omega^2 (\frac{Q}{2} e^{i\Omega t} + \frac{Q}{2} e^{-i\Omega t}) =$$

$$= \frac{M_2 \Omega^2}{M + M_2} \hat{z} \cos(\Omega t) = z(t) = \frac{M_2}{M + M_2} \Omega^2 \hat{z} \cos(\Omega t)$$

$$= \frac{M_2}{M + M_2} \Omega^2 \left(\frac{z}{2} e^{i\Omega t} + \frac{z}{2} e^{-i\Omega t} \right)$$

$$\frac{e^{i\Omega t} (-\Omega^2 \frac{Q}{2} + 2D\omega i\Omega \frac{Q}{2} + \omega^2 \frac{Q}{2}) + e^{-i\Omega t} (-\Omega^2 \frac{Q}{2} - 2D\omega i\Omega \frac{Q}{2} + \omega^2 \frac{Q}{2})}{e^{i\Omega t} \frac{M_2}{M + M_2} \Omega^2 \frac{z}{2} + e^{-i\Omega t} \frac{M_2}{M + M_2} \Omega^2 \frac{z}{2}} =$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$I - \Omega^2 \frac{Q}{2} + 2D\omega i\Omega \frac{Q}{2} + \omega^2 \frac{Q}{2}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{M_2}{M + M_2} \Omega^2 \frac{z}{2}$$

$$II - \Omega^2 \frac{Q}{2} - 2D\omega i\Omega \frac{Q}{2} + \omega^2 \frac{Q}{2}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{M_2}{M + M_2} \Omega^2 \frac{z}{2}$$

$$I \quad Q(-\Omega^2 + 2D\omega i\Omega + \omega^2)$$

$$\stackrel{!}{=} z \left(\frac{M_2}{M + M_2} \Omega^2 \right)$$

$$II \quad Q(-\Omega^2 - 2D\omega i\Omega + \omega^2)$$

$$\stackrel{!}{=} z \left(\frac{M_2}{M + M_2} \Omega^2 \right)$$

Part. Lösung $q(t) = \frac{Q}{2} e^{i\Omega t} + c.c.$ Mit $Q = \frac{M_2}{M + M_2} \frac{\Omega^2 z}{-\Omega^2 + 2D\omega i\Omega + \omega^2}$

c) $d = 0 = 0$

$$q(t) = \frac{Q}{2} e^{i\omega t} + \text{c.c.} \quad \text{Mit } Q = \frac{\frac{m_1}{m_1+m_2} \omega^2}{-\omega^2 + i2\gamma\omega + \omega_0^2} z$$

$$Q/t = \frac{a\omega^2}{-\omega^2 + \omega_0^2} = \frac{\frac{a\omega^2}{\omega_0^2}}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1}$$

~~Q/t =~~

$$\frac{Q}{2} = \frac{a\omega^2}{-\omega^2 + \omega_0^2}$$

$$V = \left| \frac{Q}{t} \right| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2}}$$

$$|Q| = \frac{a\omega^2}{\sqrt{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2}} |z| \leq q_{\max}$$

Fall 1: $r < 1$

$$\frac{r^2 a}{1-r^2} |z| \leq q_{\max}$$

$$\omega \leq \omega \sqrt{\frac{q_{\max}}{a^2 + q_{\max}}} = \omega_1$$

d)

Fall 2: $r > 1$

$$\frac{r^2 a}{r^2 - 1} |z| \leq q_{\max}$$

$$\text{mit } r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\omega \geq \omega \sqrt{\frac{q_{\max}}{q_{\max} - a^2}} = \omega_2$$

(Woch lernen bevor weiterrechnen)

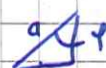
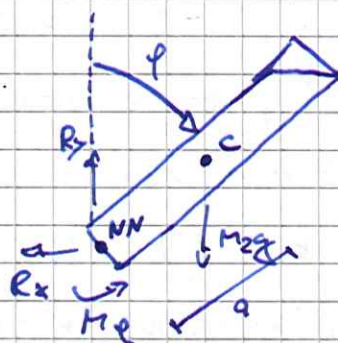
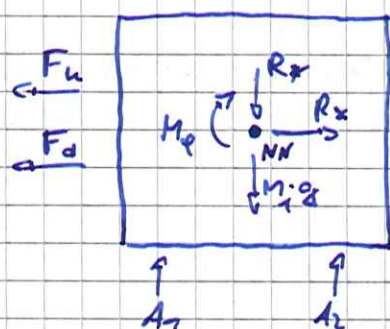
"Vergrößerungsfunktion aus VL-Aufgabe")

$$\frac{\omega}{\omega_0} = r$$

2)

a) $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}$ Translation überlagert mit Rotation

b)



Impulssatz in y-Richtung und Drallsatz: irrelevant hier

Impulssatz in x-Richtung:

~~$$\sum F = m a$$~~

$$m_1 \ddot{x} = -F_h - F_d + R_x$$

$$m_1 \ddot{x} = -k(x-z) - d(\dot{x}-\dot{z}) + R_x \quad (1)$$

Impulssatz in x-Richtung

$$\sum F = m a$$

$$m \ddot{x}_c = -R_x \quad (2)$$

Impulssatz in y-Richtung

$$m \ddot{y}_c = R_y - M_2 g \quad (3)$$

Drallsatz

$$\overset{(c)}{J} \ddot{\varphi} = -M \varphi + R_x \cdot a \cdot \cos(\varphi) + R_y \cdot \sin(\varphi) \cdot a \quad (4)$$

Kinematik

~~$$x_c = x + a \sin(\varphi)$$~~
$$\dot{x}_c = \dot{x} + \dot{\varphi} a \cos(\varphi)$$

~~$$y_c = y + a \cos(\varphi)$$~~
$$y_c = a \cos(\varphi) \quad L_0 = 0$$

$$\dot{y}_c = -\dot{\varphi} a \sin(\varphi)$$

$$\ddot{y}_c = -\ddot{\varphi} a \sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 a \cos(\varphi)$$

(5)

~~$$m_1 \ddot{x} + \dot{\varphi} a \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 a \sin(\varphi) = m \ddot{x} + k(x-z) + d(\dot{x}-\dot{z})$$~~

~~$$m_2 \ddot{y} + \dot{\varphi} a \sin(\varphi) - \dot{\varphi}^2 a \cos(\varphi) = R_y - m_2 g$$~~

~~$$\overset{(c)}{J} \ddot{\varphi} = R_x = -m_2 \ddot{x} - m_2 \dot{\varphi} a \cos(\varphi) + m_2 \dot{\varphi}^2 a \sin(\varphi)$$~~

$$R_y = -m_2 \ddot{y} - m_2 \dot{\varphi} a \sin(\varphi) + m_2 \dot{\varphi}^2 a \cos(\varphi) + m_2 g$$

$$\text{I } m_1 \ddot{x} = k(x-z) - d(\dot{x}-\dot{z}) - m_2 \ddot{x} - m_2 \dot{\varphi} a \cos(\varphi) + m_2 \dot{\varphi}^2 a \sin(\varphi)$$

$$\text{II } \overset{(c)}{J} \ddot{\varphi} = -M \varphi - (m_2 \ddot{x} - m_2 \dot{\varphi} a \cos(\varphi) + m_2 \dot{\varphi}^2 a \sin(\varphi)) a \cos(\varphi) + (-m_2 \ddot{y} - m_2 \dot{\varphi} a \sin(\varphi) - m_2 \dot{\varphi}^2 a \cos(\varphi) + m_2 g) \sin(\varphi) a$$

$$= -M \varphi - m_2 \ddot{x} a \cos(\varphi) - m_2 \dot{\varphi}^2 a^2 \cos^2(\varphi) - m_2 \dot{\varphi}^2 a^2 \sin^2(\varphi) + m_2 g a \sin(\varphi)$$

$$I \quad -k(x-z) + d(\dot{x}-\dot{z}) = \ddot{x}(-M_1-M_2) + \ddot{\varphi}(-M_2 a \cos(\varphi)) + \dot{\varphi}^2 M_2 a \sin(\varphi)$$

$$II \quad M \ddot{\varphi} = \ddot{x}(-M_2 a \cos(\varphi)) + \ddot{\varphi}(-M_2 a^2 \cos^2(\varphi) - M_2 a^2 \sin^2(\varphi)) - \dot{\varphi}^2 M_2 a \sin(2\varphi)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 + M_2 & M_2 a \cos(\varphi) \\ M_2 a \cos(\varphi) & M_2 a^2 + J_{zz}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}^2 M_2 a \sin(\varphi) + d\dot{x} + kx \\ -M_2 g a \sin(\varphi) + k_{\varphi} \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k(x-z) + d(\dot{x}-\dot{z}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$z=z(\varphi) \rightarrow$ Explizite Zeitabhängigkeit auf rechte Seite

c) Generell gilt: kinetische Energie eines Körpers i im Ebenen Fall mit Schwerpunkt C

$$E_{k,i} = \frac{1}{2} M_i (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J_{zz}^{(c)} \dot{\varphi}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_2 ((\underbrace{\dot{x} + \dot{\varphi} a \cos(\varphi)}_{\dot{x}_C})^2 + (\underbrace{-\dot{\varphi} a \sin(\varphi)}_{\dot{y}_C})^2) + \frac{1}{2} J_{zz}^{(c)} \dot{\varphi}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{y}_C^2 + \frac{1}{2} J_{zz}^{(c)} \dot{\varphi}^2$$

$$I \quad E_k = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}^2 + M_2 a \cos(\varphi) \dot{\varphi} \dot{x} + \frac{1}{2} M_2 a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_{zz}^{(c)} \dot{\varphi}^2$$

$$II \quad \bar{E}_p = \underbrace{\frac{1}{2} k (x-z)^2}_{\text{Feder } k} + \underbrace{\frac{1}{2} k_{\varphi} \varphi^2}_{\text{Feder } k_{\varphi}} + \underbrace{M_2 g \cos(\varphi) a}_{\text{Stab gewicht}}$$

Gerechnet mit Koordinaten-
ursprung bei NN

Aufstellen der Lagrange'schen Gleichung 2. Art: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} \right) - \left(\frac{\partial E_k}{\partial q_s} \right) + \left(\frac{\partial \bar{E}_p}{\partial q_s} \right) = Q_s^{(k)}$
 $s = 1, \dots, n$

Hier mit $q_1 = x$ und $q_2 = \varphi$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{M_1 + M_2}{2} \dot{x}^2 + M_2 a \cos(\varphi) \dot{\varphi} \dot{x} + \frac{1}{2} M_2 a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_{zz}^{(c)} \dot{\varphi}^2 \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\dot{x} (M_1 + M_2) + M_2 a \cos(\varphi) \dot{\varphi} \right) \\ &= \ddot{x} (M_1 + M_2) + \ddot{\varphi} M_2 a \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 M_2 a \sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{E}_p}{\partial x} = kx - zk = k(x-z)$$

Geschw. des Kraftangriffspunktes /
Uhrzeigerschwindigkeit an Dämpfer

$$Q_1^{(k)} = -k(x-z) \frac{\partial(x-z)}{\partial x} - d(\dot{x}-\dot{z}) \frac{\partial(\dot{x}-\dot{z})}{\partial \dot{x}} = -d(\dot{x}-\dot{z})$$

$$Q_1^{(k)} = -k(x-z) \frac{\partial(x-z)}{\partial x} - d(\dot{x}-\dot{z}) \frac{\partial(\dot{x}-\dot{z})}{\partial \dot{x}} = -d(\dot{x}-\dot{z})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(M_2 a \dot{x} \cos(\varphi) + M_2 a^2 \dot{\varphi} + J_{zz}^{(c)} \dot{\varphi} \right) \\ &= \dot{\varphi} M_2 a \dot{x} \cos(\varphi) - M_2 a \dot{x} \dot{\varphi} \sin(\varphi) + M_2 a^2 \ddot{\varphi} + J_{zz}^{(c)} \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = -M_2 a \dot{\varphi} \dot{x} \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_p}{\partial \varphi} = k_{\varphi} \varphi - M_2 g a \sin(\varphi)$$

$$Q_2^{(k)} = 0$$

Einsetzen in Lagrange Gleichung

$$\ddot{x} (M_1 + M_2) + \ddot{\varphi} M_2 a \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 M_2 a \sin(\varphi) + k(x-z) = -d(\dot{x}-\dot{z})$$

$$\ddot{x} M_2 a \cos(\varphi) - \dot{x} \dot{\varphi} M_2 a \sin(\varphi) + \ddot{\varphi} (M_2 a + J_{zz}^{(c)}) + \dot{x} \dot{\varphi} M_2 a \sin(\varphi) + k_{\varphi} \varphi - M_2 g a \sin(\varphi) = 0$$

d) Ruhelage $\rightarrow$ Es gilt: $\ddot{x}_0 = \dot{x}_0 = 0$; $\ddot{z}_0 = \dot{z}_0 = 0$; Anregung konstant

$$\rightarrow f(t) = \begin{bmatrix} k z_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z_0, \dot{z}_0 = 0$$

$$q_1 = x : - \ddot{z}_0 m_2 g \sin(\varphi) + \overbrace{k(x_0 - z_0)}^{\text{konst.}} + d(\dot{x}_0 - \dot{z}_0) = 0$$

$$q_2 = \varphi : k_e \varphi_0 - m_2 g \sin(\varphi_0) = 0$$

$$\frac{k_e \varphi_0}{m_2 g} = \sin(\varphi_0)$$

Ruhelage an allen Orten, an denen diese Gleichung erfüllt ist.

Linearisierung führt zur lokalen, statischen Stabilität einer Ruhelage

$$\frac{d^2 q(\varphi, \dot{\varphi})}{d\varphi} \bigg|_{\varphi_0, \dot{\varphi}_0=0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 q_1}{\partial \varphi_1^2} & \frac{\partial^2 q_1}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \\ \frac{\partial^2 q_2}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} & \frac{\partial^2 q_2}{\partial \varphi_2^2} \end{bmatrix} \bigg|_{\varphi_0, 0}$$

$$= \begin{bmatrix} k & -\ddot{z}_0 m_2 g \cos(\varphi_0) \\ 0 & -m_2 g \cos(\varphi_0) + k_e \end{bmatrix}$$

Stabil, wenn Matrix positiv definit ist, also EW $\lambda_i > 0$

$$\lambda_1 = k > 0 \quad \checkmark$$

$$\lambda_2 = -m_2 g \cos(\varphi_0) + k_e$$

$$\varphi_{0,1} = 0 : \lambda_2 = -m_2 g + k_e \begin{cases} > 0 \text{ für } k_e > m_2 g & \text{stabil} \\ = 0 \text{ für } k_e = m_2 g & \text{indifferent} \\ < 0 \text{ für } k_e < m_2 g & \text{instabil} \end{cases}$$

Ruhelage 1 bei $\varphi_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \varphi_{0,1} \end{bmatrix}$ Stange senkrecht nach oben

Ruhelage 2 muss irgendwo zwischen $0 < \varphi_{0,2} < \pi$ liegen

$$\varphi_{0,2} : \lambda_2 = -m_2 g \cos(\varphi_{0,2}) + k_e > 0$$

$$\cos(\varphi_{0,2}) < \frac{k_e}{m_2 g} < 0$$

$$\cos(\varphi_{0,2}) < \frac{\sin(\varphi_{0,2})}{\varphi_{0,2}} < 0$$

$$\varphi_{0,2} < \tan(\varphi_{0,2})$$

$$\varphi_{0,2} > \tan(\varphi_{0,2})$$

$$\varphi_{0,2} < \tan(\varphi_{0,2}) \quad \text{Gültig für } 0 < \varphi_{0,2} < \frac{\pi}{2}$$

$$(\varphi_{0,2} > \tan(\varphi_{0,2})) \quad \text{Gültig für } \frac{\pi}{2} < \varphi_{0,2} < \pi$$

Ist immer erfüllt $\rightarrow$ 2. entstehende Ruhelage ist immer stabil, wenn $\varphi_{0,1}$ instabil wird.

e) Linearisieren um q_0 für $h_r > M_2 g a$

(4)

$$M(q_0) \Delta \ddot{q} + \left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \right|_{q_0, \dot{q}_0} \Delta \dot{q} + \left. \frac{\partial \ddot{q}}{\partial q} \right|_{q_0, \dot{q}_0} \Delta q = f(t)$$

$$M(q_0) = \begin{bmatrix} M_1 + M_2 & M_2 a \\ M_2 a & M_2 a^2 + J_{zz}^{(C)} \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \right|_{q_0, \dot{q}_0} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & M_2 g a + h_r \end{bmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial \ddot{q}}{\partial q} \right|_{q_0, \dot{q}_0} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 + M_2 & M_2 a \\ M_2 a & M_2 a^2 + J_{zz}^{(C)} \end{bmatrix} \Delta \ddot{q} + \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & M_2 g a + h_r \end{bmatrix} \Delta \dot{q} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta q = \begin{bmatrix} h_r + d \\ h_r + d \end{bmatrix}$$

1) Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{q}}} + \underbrace{\frac{3EI}{2L^3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}}_{\underline{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o)

Eigenwertproblem: $(\underline{K} - \omega_n^2 \underline{M}) \underline{q}_n = \underline{0}$ Eigenwerte = Eigenkreisfrequenzen²

$$\begin{bmatrix} k - M\omega_n^2 & -2k & k \\ -2k & 4k - M\omega_n^2 & -2k \\ +k & -2k & k - m\omega_n^2 \end{bmatrix} \underline{q}_n = \underline{0}$$

Eigenvektoren = Eigenformen
 $\begin{matrix} -2k & k \\ 4k - M\omega_n^2 & -2k \\ -2k & k - m\omega_n^2 \end{matrix}$

Determinante

$$\begin{aligned} & (k - \omega_n^2 m)(4k - \omega_n^2 M)(k - \omega_n^2 m) + (-2k)^3 + k(4k - M\omega_n^2)(k - \omega_n^2 m) - \\ & - k^2(4k - \omega_n^2 M) - (-2k)^3 - k(4k - \omega_n^2 M)(k - \omega_n^2 m) = 0 \\ & = (k - \omega_n^2 m)^2(4k - \omega_n^2 M) - k^2(4k - \omega_n^2 M) = 0 \\ & = (4k - \omega_n^2 M)((k - \omega_n^2 m)^2 - k^2) = 0 \\ & = (4k - \omega_n^2 M)(\omega_n^4 m^2 - 2k\omega_n^2 m) = 0 \\ & = (4k - \omega_n^2 M)(\omega_n^2 m)(\omega_n^2 m - 2k) = 0 \end{aligned}$$

$$\omega_{n1}^2 = 0 \quad \omega_{n2}^2 = \frac{4k}{M} \quad \omega_{n3}^2 = \frac{2k}{m}$$

⚡ Fehler bei Sarrus
Vorgehen sonst korrekt

Eigentliche Lösung

$$\omega_{n1}^2 = 0 \quad \omega_{n2}^2 = 0 \quad \omega_{n3}^2 = \pm \sqrt{\frac{2k(M+2m)}{Mm}}$$

nach Konvention sind nur positive Eigenkreisfrequenzen möglich

Eigenformen

$$\begin{bmatrix} k & -2k & k \\ -2 & 4k & -2k \\ k & -2k & k \end{bmatrix} \underline{q}_{n2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k - \frac{2k(M+2m)}{M} & -2k & k \\ -2k & 4k - \frac{2k(M+2m)}{M} & -2k \\ k & -2k & k - \frac{2k(M+2m)}{M} \end{bmatrix} \underline{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} q_{3,1} = 1 & \rightarrow 1 - \frac{2(M+2m)}{M} - 2x + 1y = 0 \\ & -2x(4 - \frac{2(M+2m)}{M}) - 2y = 0 \end{aligned}$$

$$12(2 + 4\frac{M}{M}) - 2x + z = 0$$

-2 +

$$\text{I } (1 - 2 + 4\frac{M}{M}) \cdot 1 - 2y + z = 0$$

$$\text{II } (-2) \cdot 1 + (4 - 4 - 2\frac{M}{M})y + z - 2z = 0$$

$$\text{III } 1 \cdot 1 - 2y + (1 - 2 - 4\frac{M}{M})z = 0 \quad | \cdot -I$$

$$\text{III } 1 + 1 - 4\frac{M}{M} + (-1 - 4\frac{M}{M})z - z = 0$$

$$2 - 4\frac{M}{M} - 5z - 4z\frac{M}{M} = 0 \quad z = 1$$

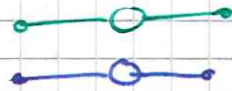
$$1 - 1 - 4\frac{M}{M} - 2y = 0$$

$$y = -2\frac{M}{M}$$

$$\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\frac{M}{M} \\ 1 \end{bmatrix}$$

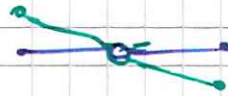
Zeichnung:

$$\omega_1 = 0 \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



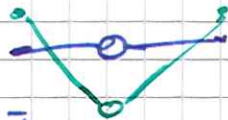
Translation

$$\omega_2 = 0 \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Rotation

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{2k(M+2m)}{Mm}} \quad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\frac{M}{m} \\ 1 \end{bmatrix}$$



Elastische Mode

b) Bewegungen rein in 1. Mode: $\underline{z}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(t)$

2. Mode: $\underline{z}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_2(t)$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} (\underline{e}_1^T u_1(t) \underline{k} \underline{e}_1 u_1(t) + \underline{e}_2^T u_2(t) \underline{k} \underline{e}_2 u_2(t) + \underline{e}_3^T u_3(t) \underline{k} \underline{e}_3 u_3(t))$$

Aus EWP von vorher: $(\underline{k} - \omega_i^2 \underline{M}) \underline{e}_i = 0 \quad ; \quad \omega_{1,2} = 0$

$$\rightarrow \underline{k} \underline{e}_1 = 0 \quad ; \quad \underline{k} \underline{e}_2 = 0$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} (\underline{e}_1^T u_1(t) \underline{k} \underline{e}_1 u_1(t) + \underline{e}_3^T u_3(t) \underline{k} \underline{e}_3 u_3(t))$$

$$= \frac{1}{2} \underline{e}_3^T \underline{k} \underline{e}_3 u_3(t)^2$$

c) Modales Ansatz: $q(t) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \eta_i(t)$

$$M \ddot{q}(t) + K q(t) = 0$$

$$M \varphi_i \ddot{\eta}_i(t) + K \varphi_i \eta_i(t) = 0$$

Mode 1 ($i=1$)

$$M \varphi_1 \ddot{\eta}_1(t) + \cancel{K \varphi_1} \eta_1(t) = 0 \quad \rightarrow = 0$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) = 0$$

$$\begin{bmatrix} M \\ M \\ M \end{bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) = 0 \rightarrow \ddot{\eta}_1(t) = 0$$

$$\dot{\eta}_1(t) = \beta_1$$

$$\eta_1(t) = \beta_1 t + \alpha_1$$

Mode 2 ($i=2$)

$$M \varphi_2 \ddot{\eta}_2(t) + \cancel{K \varphi_2} \eta_2(t) = 0 \quad \rightarrow = 0$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ddot{\eta}_2(t) = 0$$

$$\begin{bmatrix} M \\ 0 \\ -M \end{bmatrix} \ddot{\eta}_2(t) = 0 \rightarrow \ddot{\eta}_2(t) = 0$$

$$\eta_2(t) = \beta_2 t + \alpha_2$$

Mode 3 ($i=3$)

$$M \varphi_3 \ddot{\eta}_3(t) + K \varphi_3 \eta_3(t) = 0$$

Allgemeine Lösung der Eigenschwingung aus FS
(nur Teil für elastische Mode)

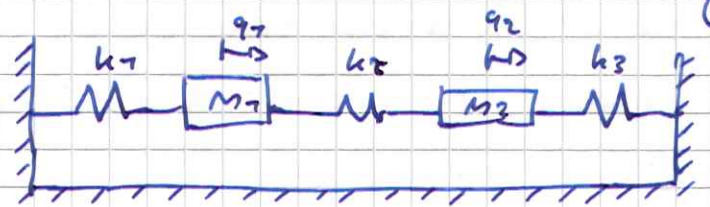
$$\eta_3 = \alpha_3 \cos(\omega_3 t) + \beta_3 \sin(\omega_3 t)$$

Allgemein:

$$q(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\beta_1 t + \alpha_1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} (\beta_2 t + \alpha_2) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \frac{M}{m} \\ 1 \end{bmatrix} (\alpha_3 \cos(\omega_3 t) + \beta_3 \sin(\omega_3 t))$$

$$\text{mit } \omega_3^2 = \sqrt{\frac{2k(M+m)}{Mm}}$$

②



- a) Eigentlich Newton-Euler, aber im Fall von Schwingersystemen kann direkt abgelesen werden: geht aber nur, wenn: - q_i zeigen in gleiche Richtung

$$K = \begin{cases} k_{ii} \hat{=} \text{Summe aller Steifigkeiten an } q_i \\ k_{ij} \hat{=} \text{negative Koppelsteifigkeit; } i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- b) Ansatz: $q(t) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \cdot \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i(t)$

Kopplung gegenüber der Umgebung $\rightarrow$ keine Störkörpermoden

$$q(t) = \xi_1 \eta_1(t) + \xi_2 \eta_2(t)$$

$$q(t) = \xi_1 (\alpha_1 \cos(\omega t) + \beta_1 \sin(\omega t)) + \xi_2 (\alpha_2 \cos(\omega t) + \beta_2 \sin(\omega t))$$

- c) $k_1 = k_2 = k$; $M_1 = M_2 = m$

Eigenwertproblem: $(K - \omega_n^2 M) \xi_n = 0$

~~$$\begin{bmatrix} k+k_2 - m\omega_n^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m\omega_n^2 \end{bmatrix} \xi_n = 0$$~~

~~$$\begin{bmatrix} k - m\omega_n^2 & k - m\omega_n^2 \\ -k_2 & k + k_2 - m\omega_n^2 \end{bmatrix} \xi_n = 0$$~~

~~$$\begin{bmatrix} k - m\omega_n^2 & k - m\omega_n^2 \\ -k_2 & k + k_2 - m\omega_n^2 \end{bmatrix} \xi_n = 0$$~~

Eigenwerte über Determinante:

~~$$(k+k_2 - m\omega_n^2)^2 - (-k_2)^2 = 0$$~~

$$(k+k_2 - m\omega_n^2)(k+k_2 - m\omega_n^2) - (-k_2)^2 = 0$$

~~$$k^2 + k_2k - km\omega_n^2 + k_2k + k_2^2 - km\omega_n^2 - km\omega_n^2 - km\omega_n^2 + m^2\omega_n^4 - k_2^2 = 0$$~~

~~$$k^2 + 2k \cdot k_2 - 2km\omega_n^2 - 2km\omega_n^2 + m^2\omega_n^4 = 0$$~~

~~$$\omega_n^4 m^2 + \omega_n^2 (-2km - 2km) + k^2 + 2k_2k = 0$$~~

~~$$\omega_n^2 = \frac{-(-2km - 2km) \pm \sqrt{(-2km - 2km)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (k^2 + 2k_2k)}}{2 \cdot m^2}$$~~

~~$$\omega_n^2 = \frac{2k_2 + 2k \pm \sqrt{(2k_2 + 2k)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (k^2 + 2k_2k)}}{2 \cdot m}$$~~

~~$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k+hc}{m} \pm \sqrt{\frac{(k+hc)^2}{4m^2} - \frac{4m^2(k^2+2khc)}{4m^4}}$$~~

~~$$\frac{k+hc}{m} \pm \sqrt{\frac{k+hc}{2m^2} - \frac{k^2+2khc}{m^2}}$$~~

~~$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2hc}{m}}$$~~

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{2m(k+hc) \pm \sqrt{(2m(k+hc))^2 - 4m^2(k^2+2khc)}}{2m^2}$$

$$2m^2 = \sqrt{4m^4}$$

$$= \frac{2m(k+hc)}{2m^2} \pm \sqrt{\frac{(2m(k+hc))^2}{4m^4} - \frac{4m^2(k^2+2khc)}{4m^4}}$$

~~$$\frac{k+hc}{m} \pm \sqrt{\frac{k+hc}{2m^2} - \frac{k^2+2khc}{m^2}}$$~~

~~$$\frac{k+hc}{m} \pm \sqrt{\frac{k+hc}{2m^2} - \frac{k^2+2khc}{m^2}}$$~~

~~$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2hc}{m}}$$~~

$$= \frac{k+hc}{m} \pm \sqrt{\frac{(k+hc)^2}{m^2} - \frac{k^2+2khc}{m^2}}$$

$$= \frac{k+hc}{m} \pm \frac{1}{m} \sqrt{hc^2}$$

$$= \frac{k+hc}{m} \pm \frac{hc}{m} \rightarrow \omega_1^2 = \frac{k+2hc}{m} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k+2hc}{m}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

~~$$\frac{k+hc}{m} \pm \frac{hc}{m}$$~~

ω_1 :

$$\begin{bmatrix} k+hc-h & -hc \\ -hc & k+hc-h-2hc \end{bmatrix} \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -hc & -hc \\ -hc & -hc \end{bmatrix} \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beide Massen in Phase - bewegen sich in die gleiche Richtung

ω_2 :

$$\begin{bmatrix} k+hc-h & -hc \\ -hc & k+hc-h \end{bmatrix} \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

phasige Gegenbewegung

c) $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ unabhängig von Koppelsteifigkeit, da die koppelnde Feder nicht gedehnt / gestreckt wird bei gleichphasiger Bewegung

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2hc}{m}}$ Je steifer die Kopplung, desto höher die realisierte Eigenfrequenz

1)

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+k_c & -k_c \\ -k_c & k_c+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigenfrequenzen und Eigenformen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_c}{m}} \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Orthogonalität bzgl. Massenmatrix $\underline{e}_i^T \underline{M} \underline{e}_j = 0$ für $i \neq j$

bzgl. Steifigkeitsmatrix $\underline{e}_i^T \underline{K} \underline{e}_j = 0$ für $i \neq j$

$$\underline{e}_2^T \underline{M} \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = m - m = 0 \quad \checkmark$$

$$\underline{e}_2^T \underline{M} \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = m - m = 0 \quad \checkmark$$

$$\underline{e}_1^T \underline{K} \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+k_c & -k_c \\ -k_c & k_c+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = k - k = 0 \quad \checkmark$$

$$\underline{K} = \underline{K}^T \rightarrow \underline{e}_2^T \underline{K} \underline{e}_1 = 0 \quad \text{weil } (\underline{e}_1^T \underline{K} \underline{e}_2)^T = \underline{e}_2^T \underline{K}^T \underline{e}_1 = \underline{e}_2^T \underline{K} \underline{e}_1$$

b) $\underline{q}_s(t) = \underline{e}_1 u_1(t) + \underline{e}_2 u_2(t) = \underline{\Phi} \underline{u}(t)$ mit $\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ und $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$

Ansatz in allgemeine Bewegungsgleichung einsetzen

Kotroffo

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{K} \underline{q}(t) = \underline{0}$$

$$\underline{M} \underline{\Phi} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{K} \underline{\Phi} \underline{u}(t) = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ddot{\underline{u}}(t) + \begin{bmatrix} k+k_c & -k_c \\ -k_c & k_c+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underline{u}(t) = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} m & m \\ m & -m \end{bmatrix} \ddot{\underline{u}}(t) + \begin{bmatrix} k & k+2k_c \\ k & -k-2k_c \end{bmatrix} \underline{u}(t) = \underline{0} \quad \neq \underline{\Phi}^{-1} /$$

→ Aber nötig zum entkoppeln

(nur formal) Multiplikation von links mit transponierter Modalmatrix $\underline{\Phi}^T$

$$\underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} \underline{u}(t) = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & m \\ m & -m \end{bmatrix} \ddot{\underline{u}}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & k+2k_c \\ k & -k-2k_c \end{bmatrix} \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \ddot{\underline{u}}(t) + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k+4k_c \end{bmatrix} \underline{u}(t) = \underline{0}$$

→ keine Koppelterme mehr → zwei entkoppelte DGL

⚡ Fehler - nicht massennormiert! hier fehlt also eigentlich noch ein Rechenschritt bevor weitergerechnet werden kann! - Siehe Aufschrieb aus der Übung. mit $\underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} = \underline{I}$

$$c) E_{\text{pot}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{q}_i^T k_i \dot{q}_i$$

$$= \frac{1}{2} \dot{q}^T k \dot{q}$$

$$= \frac{1}{2} [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2] \begin{bmatrix} h+h_c & -h_c \\ -h_c & h+h_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [\dot{q}_1(h+h_c) \dot{q}_2 h_c \quad \dot{q}_2(h+h_c) - \dot{q}_1 h_c] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2(h+h_c) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 h_c + \dot{q}_2^2(h+h_c) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 h_c)$$

$$= \frac{1}{2} (h+h_c)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 h_c = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2(h+h_c) + \dot{q}_2^2(h+h_c) - \dot{q}_1 \dot{q}_2 h_c)$$

$$E_{\text{pot}}^{\text{mod}} = \frac{1}{2} \dot{u}^T \Phi^T k \Phi \dot{u}$$

$$= \frac{1}{2} [\dot{u}_1 \ \dot{u}_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h+h_c & -h_c \\ -h_c & h+h_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [\dot{u}_1 \ \dot{u}_2] \begin{bmatrix} 2h & 0 \\ 0 & 2h+4h_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{u}_1^2 2h + \dot{u}_2^2 (2h+4h_c))$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} = \frac{1}{2} [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (m \dot{q}_1^2 + m \dot{q}_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

$$E_{\text{kin}}^{\text{mod}} = \frac{1}{2} \dot{u}^T \Phi^T M \Phi \dot{u}$$

$$= \frac{1}{2} [\dot{u}_1 \ \dot{u}_2] \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{u}_1^2 2m + \dot{u}_2^2 2m)$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2)$$

weil
vorher
nicht
Massen-
normiert
?

gleiches Ergebnis ist aber in modalen Koordinaten bissh. einfacher (debatierbar)

$$d) q(t) = \Phi u(t) \rightarrow u(t) = \Phi^{-1} q(t)$$

Inverse ist immer aufwändig zu berechnen, daher von vorher $\Phi^T M \Phi = I$

$$\Phi^T M \Phi \Phi^{-1} = \Phi^{-1}$$

$$\Phi^T M = \Phi^{-1} \rightarrow u(t) = \Phi^T M q(t)$$

Folgt aus ii

$$u(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} q(t) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} q(t)$$

$$u(0) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} q(0) = \begin{bmatrix} m & m \\ m & -m \end{bmatrix} \dot{q}(t)$$

$$\dot{u}(0) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{bmatrix} \dot{q}(0) = \begin{bmatrix} m & m \\ m & -m \end{bmatrix} \ddot{q}(t)$$

noch immer
nicht Massen normiert

e) Ansatz aus FS: $q(t) = \sum_{k=1}^2 \underbrace{e_k (\alpha_k \cos(\omega_k t) + \beta_k \sin(\omega_k t))}_{u_k(t)}$

Ab hier mit massennormiertem $\phi = \Phi u(t)$

$$= \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u(t)$$

Lösung der AWP für $q_0 = \begin{bmatrix} q_{10} \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\dot{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\dot{q}(t) = \Phi \dot{u}(t)$ mit $\dot{u}(t) = -\omega_1 \alpha_1 \sin(\omega_1 t) + \omega_1 \beta_1 \cos(\omega_1 t)$

$$q(0) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} u_1(0) + u_2(0) \\ u_1(0) - u_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{10} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\sqrt{2m}}{2} q_{10} = -\frac{\sqrt{m}}{2} q_{10}$$

$$\dot{q}(0) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} \omega_1 \beta_1 + \omega_2 \beta_2 \\ \omega_1 \beta_1 - \omega_2 \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 \beta_2}{\beta_1}$$

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(\frac{\sqrt{m}}{2} q_{10} \cos(\omega_1 t) + \frac{\sqrt{m}}{2} q_{10} \cos(\omega_2 t) \right)$$

$$= \Phi u(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{m}}{2} q_{10} \cos(\omega_1 t) \\ -\frac{\sqrt{m}}{2} q_{10} \cos(\omega_2 t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q_{10}}{2} (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)) \\ \frac{q_{10}}{2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} q_{10} (\cos(\sqrt{\frac{2}{m}} t) + \cos(\sqrt{\frac{4+2k}{m}} t)) \\ \frac{1}{2} q_{10} (\cos(\sqrt{\frac{2}{m}} t) - \cos(\sqrt{\frac{4+2k}{m}} t)) \end{bmatrix}$$

f) Anfangsbedingung in Modalen Koordinaten

$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ nur eine Mode wird angeregt

$$q_0 = \Phi u_0 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dot{q}_0 = 0$$

$$\underline{\underline{\dot{q}_0 = 0}}$$

$$q(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 1 + 2\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 1 + \alpha_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 1 \end{array} \quad \checkmark$$

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_2 t) \end{bmatrix}$$

Modale Dämpfung

$$\underline{D} = \frac{0,01 \cdot M}{\alpha} + \frac{0,007 \cdot K}{\beta}$$

$$M = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$$

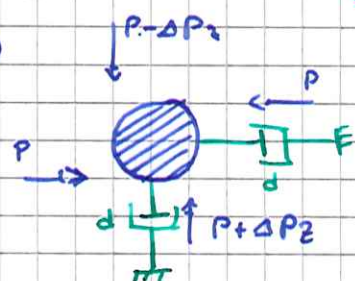
~~$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 0,01 \cos(20t) + 0,007 \sin(20t) \\ 0,007 \cos(20t) + 0,01 \sin(20t) \end{bmatrix}$$~~

$\underline{D}$ = Diagonalmatrix, also keine Kopplungsterme $\rightarrow$ Wenn nur eine Mode angeregt wird, dann folgt Bewegung in nur dieser Mode

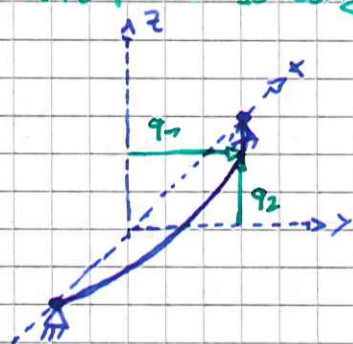
Strukturdynamik Übung 6 - Stabilität freier Schwingungen

(7)

a)



$$P - P = 0$$



Retroakteter Fall (für Vorzeichen)

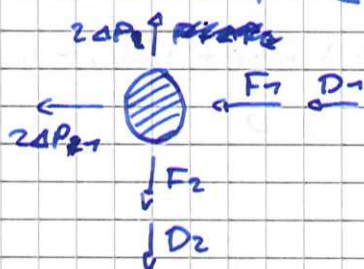
$$-P + \Delta P_2 + P + \Delta P_2 = 2\Delta P_2 \quad (\text{Aerodynamische Kraft}) \quad \uparrow$$

$$\text{Aus Aufgabe: } 2\Delta P_2 = k_D q_1$$

↳ Rückstellkraft durch Biegung der Welle F

Außerdem wirken noch Dämpfungskräfte

Modell:



$$F_1 = k_D q_1$$

$$F_2 = k_D q_2$$

$$\text{Impulsatz } x\text{-Richtung: } F = M \ddot{x} = M \ddot{q}_1 = -2\Delta P_1 - F_1 - D_1$$

$$z\text{-Richtung: } F = M \ddot{z} = M \ddot{q}_2 = 2\Delta P_2 - F_2 - D_2$$

M - Massenmatrix

D - Dämpfungsmatrix

K - Steifigkeitsmatrix

N - Unsymmetr. Kraftmatrix

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} k_B & 0 \\ 0 & k_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k_D \\ -k_D & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

M diagonale, Punktmasse, einfach

Dämpfung sehr klein, proportional zur Geschwindigkeit → einfach durch konstante

k Rückstellkraft prop. ortalional zur Auslenkung - einfach

N Verschiebung in x → Kraft in z Verschiebung in z → Kraft in x

$$M \ddot{q} + D \dot{q} + (K + N) q = 0$$

$$b) D = N = 0$$

$$\text{Eigenfrequenzen: } \det(K - \omega^2 M) = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_B - \omega^2 M & 0 \\ 0 & k_D - \omega^2 M \end{bmatrix} \rightarrow \det(k_B - \omega^2 M)^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2$$

$$\omega_{1,2}$$

$$= \frac{k_B}{M}$$

$$= \sqrt{\frac{k_B}{M}}$$

Eigenfrequenzen immer positiv (Konvention)

Eigenformen

(21)

$$\begin{bmatrix} k_B - \frac{k_D}{2} m & 0 \\ 0 & k_D - \frac{k_D}{2} m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Mode: Schwingung rein in q_1 -Richtung mit $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_B}{m}}$

2. Mode: Schwingung rein in q_2 -Richtung mit $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_D}{m}}$

c) Lösen mit verallgemeinertem Eigenwertproblem

$$(\lambda^2 M + \lambda D + K + N) \underline{e}_k = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 m + \lambda d + k_B & k_D \\ -k_D & \lambda^2 m + \lambda d + k_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_D \end{bmatrix} \quad (\lambda^2 m + \lambda d + k_B)(\lambda^2 m + \lambda d + k_B)$$

$$(\lambda^2 m + \lambda d + k_B)^2 + k_D^2 = 0$$

$$\lambda^4 m^2 + \lambda^3 m d + \lambda^2 m k_B + \lambda^3 d m + \lambda^2 d^2 + \lambda d k_B + \lambda^2 m k_D + \lambda d k_D + k_B^2 + k_D^2 = 0$$

$$\lambda^4 m^2 + 2\lambda^3 m d + \lambda^2 (2m k_B + d^2) + 2\lambda d k_B + k_B^2 + k_D^2 = 0$$

Einsetzen des Störungssatzes $\lambda = \pm i\omega_0 + \epsilon$

$$(i\omega_0 + \epsilon)^4 m^2 + 2(i\omega_0 + \epsilon)^3 m d + (i\omega_0 + \epsilon)^2 (2m k_B + d^2) + 2(i\omega_0 + \epsilon) d k_B + k_B^2 + k_D^2 = 0$$

$$(\omega_0^4 - 4i\omega_0^3 \epsilon - 6\omega_0^2 \epsilon^2 + 4i\omega_0 \epsilon^3 + \epsilon^4) m^2 + 2(-i\omega_0^3 - 3\omega_0^2 \epsilon + i\omega_0 \epsilon^2 + \epsilon^3) m d + 2(-i\omega_0^2 - 2\omega_0 \epsilon + \epsilon^2) d k_B + k_B^2 + k_D^2 = 0$$

Approximation: Terme höherer Ordnung als 2 werden vernachlässigt

→ Es folgt eine quadratische Gleichung in ϵ :

$$\begin{aligned} & m^2 \omega_0^4 - m^2 4i\omega_0^3 \epsilon - m^2 6\omega_0^2 \epsilon^2 - 2i\omega_0^3 m d - 6\omega_0^2 m d \epsilon + 2i\omega_0 \epsilon^2 m d - 2m k_B \omega_0^2 - d \omega_0^2 + \\ & + 4m k_B i\omega_0 \epsilon + 2\omega_0 \epsilon d + 2m k_B \epsilon^2 + \epsilon^2 d^2 + 2i\omega_0 d k_B + 2\epsilon d k_B + k_B^2 + k_D^2 = 0 \\ & = \epsilon^2 (-6m^2 \omega_0^2 + 2im\omega_0 d + 2m k_B + d^2) + \epsilon (-4m^2 i\omega_0^3 - 6md\omega_0^2 + 4m k_B i\omega_0 + 2i\omega_0 d + \\ & + 2d k_B) + (m^2 \omega_0^4 - 2i\omega_0^3 m d - 2m k_B \omega_0^2 - d\omega_0^2 + 2i\omega_0 d k_B + k_B^2 + k_D^2) \end{aligned}$$

$$\text{Lösen mit Mitternachtsformel: } \epsilon_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \frac{k_D}{2m\omega_0}$$

→ Vier EW der Form $\epsilon_j \pm i\omega_0$

$$\lambda_1 = -\frac{d}{2m} + \frac{k_D}{2m\omega_0} + i\omega_0 \quad \lambda_2 = -\frac{d}{2m} + \frac{k_D}{2m\omega_0} - i\omega_0$$

$$\lambda_3 = -\frac{d}{2m} - \frac{k_D}{2m\omega_0} + i\omega_0 \quad \lambda_4 = -\frac{d}{2m} - \frac{k_D}{2m\omega_0} - i\omega_0$$

Betrachtung der Realteile der Eigenwerte

$$\operatorname{Re}(\lambda_{3,4}) < 0 \quad \text{wenn} \quad m, d, k_0 > 0 \quad \rightarrow \text{stabil}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_1) &= +\frac{1}{2m} \left(\frac{k_0}{\omega_0} - d \right) \\ \operatorname{Re}(\lambda_2) &= -\frac{1}{2m} \left(\frac{k_0}{\omega_0} - d \right) \end{aligned} \right\} > 0 \quad \text{wenn} \quad d < \frac{k_0}{\omega_0} \quad \rightarrow \text{stark instabil}$$

$$= 0 \quad \text{wenn} \quad \omega_0 = \frac{k_0}{d} \quad \rightarrow \text{grenzstabil}$$

$$< 0 \quad \text{wenn} \quad \omega_0 > \frac{k_0}{d} \quad \rightarrow \text{stabil}$$

B) Allgemeine Lösung des Systems aus Formelsammlung

$$q(t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^4 C_k \tilde{x}_k e^{\lambda_k t} \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left(\tilde{x}_1 e^{\lambda_1 t} + \tilde{x}_2 e^{\lambda_2 t} + \tilde{x}_3 e^{\lambda_3 t} + \tilde{x}_4 e^{\lambda_4 t} \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left(\tilde{x}_1 e^{\lambda_1 t} + \tilde{x}_2 e^{\lambda_2 t} + \tilde{x}_3 e^{\lambda_3 t} + \tilde{x}_4 e^{\lambda_4 t} \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left(\tilde{x}_1 e^{(+\frac{1}{2m}(\frac{k_0}{\omega_0} - d) + i\omega_0)t} + \tilde{x}_2 e^{(-\frac{1}{2m}(\frac{k_0}{\omega_0} - d) + i\omega_0)t} + \dots \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left((\tilde{x}_1 e^{i\omega_0 t} + \tilde{x}_2 e^{-i\omega_0 t}) e^{\frac{1}{2m}(\frac{k_0}{\omega_0} - d)t} + (\tilde{x}_3 e^{i\omega_0 t} + \tilde{x}_4 e^{-i\omega_0 t}) e^{\frac{1}{2m}(-\frac{k_0}{\omega_0} - d)t} \right)$$

$$= (\tilde{x}_1 \cos(\omega_0 t) + \tilde{x}_2 \cos(-\omega_0 t)) e^{\frac{1}{2m}(\frac{k_0}{\omega_0} - d)t} + (\tilde{x}_3 \cos(\omega_0 t) + \tilde{x}_4 \cos(-\omega_0 t)) e^{\frac{1}{2m}(-\frac{k_0}{\omega_0} - d)t}$$

$$= 2 \tilde{x}_1 \cos(\omega_0 t) e^{\frac{1}{2m}(\frac{k_0}{\omega_0} - d)t} + 2 \tilde{x}_3 \cos(\omega_0 t) e^{\frac{1}{2m}(-\frac{k_0}{\omega_0} - d)t}$$

↪ Grenz harmonisch...

7)

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 70 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & -7 \\ -3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \cos(\omega t)$$

a) Eigenfrequenzen: ALP

$$\det(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \stackrel{!}{=} 0 = N(\omega)$$

$$\det \begin{pmatrix} 70 - \omega^2 m & -3 & -3 \\ -3 & 4 - \omega^2 m & -7 \\ -3 & -7 & 4 - \omega^2 m \end{pmatrix} = 0 \dots \text{Polynom 6. Grades mache ich lieber nicht so gern im Kopf aus ...}$$

$$= (4 - m\omega^2)(54 - m\omega^2)(72 - m\omega^2) = 0$$

Drei Nullstellen: $\omega_1 = \sqrt{\frac{4}{m}}$ $\omega_2 = \sqrt{\frac{54}{m}}$ $\omega_3 = \sqrt{\frac{72}{m}}$
 = Eigenfrequenzen:

Tilgungsfrequenzen

$$Z_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 4 - \omega^2 m & -7 \\ f \cos(\omega t) & -7 & 4 - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & -7 \\ 1 & 0 \\ f \cos(\omega t) & -7 \end{matrix}$$

$$Z_1 = (4 - 3\omega^2 m) f \cos(\omega t) + (72 - 3\omega^2 m)(-f \cos(\omega t))$$

$$Z_1 = 3 f \cos(\omega t) - 72 f \cos(\omega t) + 3 f \cos(\omega t) + \omega^2 m$$

$$Z_1 = f \cos(\omega t) (4 - 3\omega^2 m - 72) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{eig} = 74 f (54 - m\omega^2)$$

$$Z_2 = f \cos(\omega t) (794 - m\omega^2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$Z_3 = f \cos(\omega t) (374^2 - 744m\omega^2 + m^2\omega^4) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{MNF}$$

$$\omega_{T,1} = \sqrt{\frac{3}{m}} \sqrt{\frac{74}{m}} \quad \omega_{T,2} = \sqrt{\frac{794}{m}} \quad \omega_{T,3} = \sqrt{(7 - 3\sqrt{2}) \frac{4}{m}}$$

$$\omega_{T,4} = \sqrt{(7 + 3\sqrt{2}) \frac{4}{m}}$$

Tilgungsfrequenz $\omega_{T,1}$ fällt mit Eigenfrequenz ω_2 des Systems zusammen
 → Möglichkeit für Scheinresonanz

$$Q_1 = \frac{Z_1(\omega)}{N(\omega)} = \frac{34^2 f + 34(44 - m\omega^2) f}{-m^2\omega^6 + 784m^2\omega^4 - 774^2 m\omega^2 + 604^3} = 0$$

L'Hospital

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_{T,1}} Q_1 = \frac{\frac{dZ_1(\omega)}{d\omega}}{\frac{dN(\omega)}{d\omega}} = \frac{784^2 f - 644m\omega}{-6m^2\omega^5 + 724m\omega^3 - 754^2 m\omega} = \frac{-3f}{284}$$

$$|Q_1(\omega_{T,1})| = \frac{3f}{284} \quad \text{endlicher Wert} \rightarrow \omega_{\text{Schein}} = \omega_{T,1}$$

0/0

b) Modale Vorgehensweise

$$\underline{\tilde{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\tilde{K}} \underline{q} = \underline{F} \cos(\omega t) = \underline{F} \frac{1}{2} e^{i\omega t} + \text{c.c.}$$

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -7 & -7 \\ 3 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{M}} &= \underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 3 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -7 & -7 \\ 3 & 7 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 3 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -7 & -7 \\ 3 & 7 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 22 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{K}} &= \underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 3 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & -7 & -3 \\ -3 & 4 & -7 \\ -3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -7 & -7 \\ 3 & 7 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 3 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & -7 & -7 \\ 3 & 7 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 132 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{F}} &= \underline{\Phi}^T \underline{F} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 3 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix} f \end{aligned}$$

Modale Bewegungsgleichung (Normiert mit $\underline{\tilde{M}}^{-1}$)

$$\underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{K}} \underline{q} = \underline{\tilde{M}}^{-1} \underline{\tilde{F}} \frac{1}{2} e^{i\omega t} + \text{c.c.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} \frac{20}{22} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{132}{11} \end{bmatrix} \underline{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{22} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{7}{11} \end{bmatrix} \frac{f}{M} e^{i\omega t} + \text{c.c.}$$

0

④

④

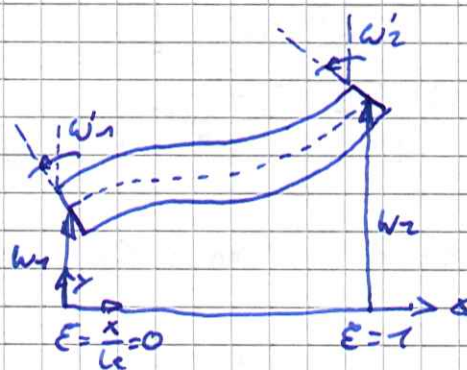
4 Vier Freiheitsgrade $\rightarrow$ vier Funktionen
Ansatz:

$$\psi_7 = 7 - 3\epsilon^2 + 2\epsilon^3$$

$$\Psi_2 = 6e^{\epsilon} (1 - \epsilon)^2$$

$$\psi_3 = e^{\frac{2}{3}}(3 - 2e)$$

$$\Psi_4 = 6eE^2(E-7)$$



Elementarmatrizen- und Lastvektoren: $\underline{M}^{(e)} = \{M_{i,j}\}$; $\underline{k}^{(e)} = \{k_{rs}\}$

$$M_{ij} = \int_0^1 S A \psi_i \psi_j d\epsilon$$

$$M_{13} = \int_0^1 f_A(1-3C^2+2C^3)(C^2(3-2C)) dC$$

47/10/2020

$$= \int_0^1 5A(3C^2 - 2C^3 - 9C^4 + 6C^5 + 6C^5 - 4C^6) dC$$

$$= 9A \left[C^3 - \frac{7}{2}C^4 - \frac{9}{5}C^5 + 2C^6 - \frac{4}{2}C^7 \right]_0^7$$

$$= 9A \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{9}{5} + 2 - \frac{4}{7} \right) = 0$$

= $\frac{1}{70}$ SA le or Woher kommt das?

$$\frac{70}{70} - \frac{35}{70} - \frac{12.5}{70} + \frac{40}{70} - \frac{40}{70} = \frac{9}{70}$$

$$k_{24} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{EI}{l^4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_j \, dx$$

$$= \int_0^7 \frac{E}{18} \frac{\partial^2}{\partial C^2} (16 C (7-C)^2) \frac{\partial^2}{\partial E^2} (16 E^2 (C-7)) 16 dC$$

$$= \int_0^7 \frac{EI}{L^3} (6Ez - 6) (6Ez - 6z^2) 6z \, dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16} (361e^2 - 721e^2 - \frac{24}{1}e^2 + 81e^2) x dx$$

$$= \left[\frac{EI}{L^3} \left(\frac{72}{8} L^2 \epsilon^3 - \frac{24}{8} L^2 \epsilon^2 + 8 L^2 \epsilon \right) \right]_0^1$$

$$= \frac{72}{2} \frac{EI}{L^3} - 72 \frac{EI}{L^3} + 8 \frac{EI}{L^3} - 0$$

$$= 2 \frac{51}{100}$$

Für Eintrag des Lastvektors in 1. Element ist Verlauf $P^{(n)}$ der Streckenlast nötig

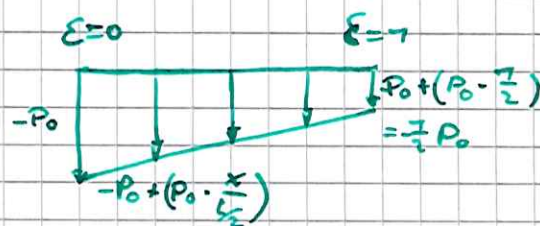
$$f_1^{(e)} = \int_0^1 \gamma_1 p^{(e)}(c) \ln c \, dc$$

$$= \int_0^7 (7 - 3\epsilon^2 + 2\epsilon^3) (P_0(\frac{\epsilon}{2} - 7)) e \, d\epsilon$$

$$= \int_0^1 \ln(P_0 \xi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} P_0 \xi^2 + 3 P_0 \xi^2 + P_0 \xi^4 - 2 P_0 \xi^3) d\xi$$

$$= \left[\ln \left(\frac{1}{4} P_0 \epsilon^2 - P_0 \epsilon - \frac{3}{2} P_0 \epsilon^4 + P_0 \epsilon^3 + \frac{7}{3} P_0 \epsilon^5 - \frac{2}{4} P_0 \epsilon^4 \right) \right]_0^1$$

$$= 6 \left(\frac{7}{4} P_0 - P_0 - \frac{3}{8} P_0 + P_0 + \frac{7}{5} P_0 - \frac{3}{4} P_0 \right) = -\frac{17}{40} P_0 e$$



$$P(\mathcal{E}) = -P_0 + \left(P_0 \cdot \frac{\mathcal{E}}{2}\right)$$

$$= +P_0(-1 + \frac{C}{r})$$

b) Assemblierung

(2)

$$M_{\text{Balken}} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} M^{(1)} \\ M^{(2)} \\ M^{(3)} \\ M^{(4)} \\ 0 \\ M^{(2)} \\ M^{(3)} \\ M^{(4)} \end{matrix}$$

$$K_{\text{Balken}} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} K^{(1)} \\ K^{(2)} \\ K^{(3)} \\ K^{(4)} \\ 0 \\ K^{(2)} \\ K^{(3)} \\ K^{(4)} \end{matrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{bmatrix}$$

Obige Matrizen sind ohne Berücksichtigung der Punktnummern

$$M = M_{\text{Balken}} + \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & m & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 5m & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & m \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ f^{(3)} \\ f^{(4)} \end{matrix}$$

Strukturdynamik Musterprüfung

Teil 1: Verständnisfragen

Nachname, Vorname:

Wille Franz

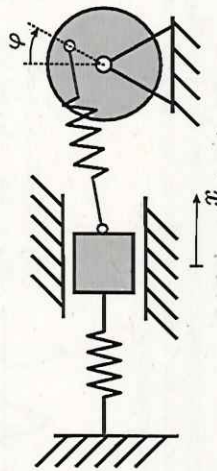
Matrikelnummer:

3560889

- Der Fragenteil muss ohne jegliche Hilfsmittel gelöst werden.
- Skizzen können mit Bleistift vorgezeichnet werden, müssen aber mit einem dokumentenechten Stift finalisiert werden. Bitte verwenden Sie keine rote oder grüne Farbe.
- Der Fragenteil besteht aus 4 Fragen auf 5 Seiten.
- Die Punkteangabe stellt einen Richtwert dar, nicht die endgültige Punktzahl.
- Die Bearbeitungszeit für den Fragenteil beträgt 20 Minuten.
- Im Anschluss wird die Bearbeitungszeit gestoppt und die Arbeitsbögen werden eingesammelt.

Frage 1 (2,5 Punkte)

Kreuzen Sie an, mit welcher der angegebenen Bewegungsgleichungen sich das linearisierte Verhalten des dargestellten Systems beschreiben lässt.



$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

 möglich ☐

 nicht möglich ☒

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

 möglich ☐

 nicht möglich ☒

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

 möglich ☒

 nicht möglich ☐

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

 möglich ☐

 nicht möglich ☒

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

 möglich ☐

 nicht möglich ☒

Frage 2 (10 Punkte)

- 1.) Schwingungen können anhand Ihrer Entstehungsmechanismen unterteilt werden. Nennen Sie die vier typischen Mechanismen unterteilt in autonome und heteronome Schwingungen.

Autonom
frei
Selbsterregt
Heteronom
- erzwungen
- parametrisch

- 2.) Gegeben ist die Bewegungsgleichung $m\ddot{q} + d\dot{q} + kq = f \cos(\Omega t)$

- Überführen Sie das System in Zustandsraumdarstellung der Form $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$.

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f}{m} \cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

$\dot{y}_1 = y_2$
 $\dot{y}_2 = -\frac{k}{m}y_1 - \frac{d}{m}y_2 + \frac{f}{m}\cos(\Omega t)$

- Nennen Sie je ein numerisches Zeitschrittintegrationsverfahren, dass ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung bzw. 2. Ordnung behandelt.

1. Ordnung: Runge-Kutta-Verfahren
2. Ordnung: Newton-Verfahren

- 3.) Welche Aussagen treffen auf die dynamische Substrukturtechnik zu?

wahr falsch

- ☒ stellt eine Möglichkeit der räumlichen Diskretisierung dar
☒ stellt eine Alternative zur Finite-Elemente-Methode dar
☒ kann unterschiedliche Modellarchitekturen berücksichtigen
☐ eignet sich besonders zur exakten Beschreibung einer einzelnen Struktur

- Beschreiben Sie stichpunktartig das allgemeine Vorgehen der dynamischen Substrukturtechnik.

1. Unterteilung in Komponenten
2. Ableite reduzierter Modelle aus der einzelnen Komponente
3. Zusammenbau des Gleichungssystems unter Berücksichtigung des verbleibenden Schnittstellen

Frage 3 (3,5 Punkte)

Kreuzen Sie die Eigenschaften an, welche auf das durch die nachfolgende Bewegungsgleichung beschriebene System zutreffen.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \cos(3t) \end{bmatrix}$$

Autonom
Heteronom

☐ Autonom
☒ Heteronom

Proportional gedämpft
Nicht prop. gedämpft

☒ Proportional gedämpft
☐ Nicht prop. gedämpft

Konservativ
Nicht konservativ

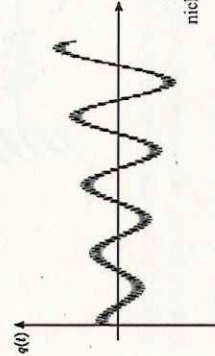
☐ Konservativ
☒ Nicht konservativ

Bequem
Nicht bequem

☒ Bequem
☐ Nicht bequem

Frage 4 (1,5 Punkte)

Gegeben ist links das Eigenschwingungsverhalten eines Zwei-Freiheitsgrad-Systems (Eigenwerte $\lambda_1 = -\delta_1 \pm i\omega_d$). Kreuzen Sie an, welche der drei vorgeschlagenen Eigenwertkombinationen λ_i das System jeweils besitzen könnte.



$$\lambda_{1,2} = 15 \pm 20i \quad \lambda_{1,2} = \pm 1i \quad \lambda_{1,2} = \pm 25i$$

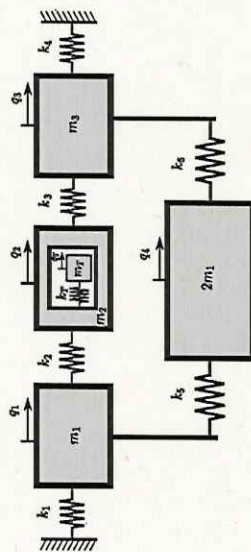
$$\lambda_{3,4} = 1 \pm 1i \quad \lambda_{3,4} = 1 \pm 25i \quad \lambda_{3,4} = 1 \pm 1i$$

- möglich ☐ nicht möglich ☒ möglich ☐ nicht möglich ☒ möglich ☐ nicht möglich ☐

in Prüfungsspeckunde fragen

Frage 5 (6 Punkte)

An das dargestellte Mehrfreiheitsgrad-System soll ein Tilger der Masse m_T über die Feder k_T angekoppelt werden. Für $q_1 = \dots = q_4 = q_T = 0$ sind die Federn entspannt. Vervollständigen Sie die Bewegungsgleichung:



$\ddot{q}_1$	$\ddot{q}_2$	$\ddot{q}_3$	$\ddot{q}_4$	$\ddot{q}_T$		q_1	q_2	q_3	q_4	q_T
k_1	0	0	0	0	+	$k_1 + k_2$	$-k_2$	0	$-k_5$	0
0	k_2	0	0	0	+	$-k_2$	$k_2 + k_3 + k_4$	0	0	$-k_5$
0	0	k_3	0	0	+	0	$-k_3$	$k_3 + k_4$	$-k_6$	0
0	0	0	k_4	0	+	$-k_5$	0	$k_4 + k_5 + k_6$	0	0
0	0	0	0	k_5	+	0	$-k_5$	0	0	k_5

Wie viele Starrkörpermoden besitzt das System?

Nm_{starr} = 0

Wie viele elastische Moden besitzt das System?

Nm_{elastisch} = 5

☐ Ja

Das System besitzt eine indifferente Ruhelage.

☒ Nein

~~Starrkörpermoden~~ Starrkörpermoden n.r., wenn keine Verbindung zu festen Verankerung $\rightarrow$ wenn System frei beweglich
keine Starrkörpermode $\rightarrow$ keine indifferente Ruhelage

Strukturdynamik Musterprüfung

Teil 2: Rechenaufgaben

Nachname, Vorname: Löcherer Frank
 Matrikelnummer: 3960549

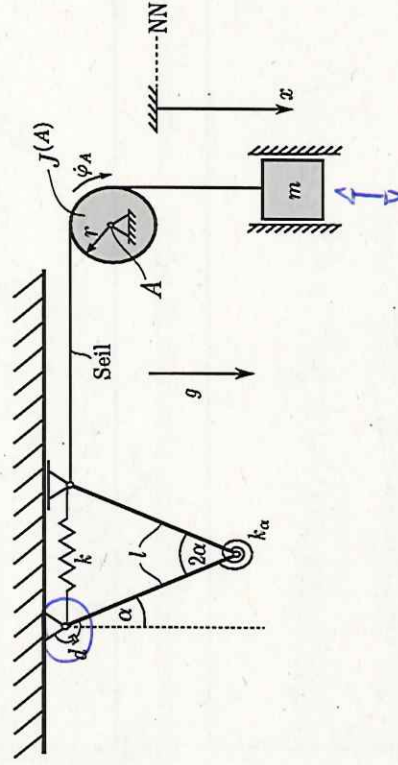
Beachten Sie bitte unbedingt die folgenden Prüfungshinweise:

- Erlaubte Hilfsmittel: vom Institut erstellte Formelsammlung auf 4 Seiten ausgedruckt (doppelseitig oder einseitig mit leeren Rückseiten, keine Skalierung, A4), handschriftliche Ergänzungen erlaubt
- Skizzen können mit Bleistift vorgezeichnet werden, müssen aber mit einem dokumentenechten Stift finalisiert werden. Bitte verwenden Sie keine rote oder grüne Farbe.
- Der Rechenteil besteht aus 4 Aufgaben auf 18 Seiten (plus 2 leere angehängte Seiten).
- Die Punkteangabe stellt einen Richtwert dar, nicht die endgültige Punktzahl.
- Bearbeitungszeit: 70 Minuten
- Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen oder bereits berechneten Größen auszudrücken!
- Benutzen Sie den zur Verfügung stehenden Platz für Ihre Rechnungen. Bitte verweisen Sie darauf, falls Sie für Ihren Rechenweg die angehängten Seiten verwenden (z.B. "siehe S. 19").
- Bitte markieren Sie das Endergebnis eindeutig!

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Das skizzierte System besteht aus zwei masselosen, starren Stäben der Länge l , der Drehfeder k_α , dem Drehdämpfer d , der translatorischen Feder k , einer Seilrolle (Radius r , Trägheitsmoment $J^{(A)}$) sowie einer Masse m . Das Seil läuft schlupfrei über die Rolle. Für $x = 0$ hängen beide Stangen senkrecht nach unten und alle Federn sind entspannt.

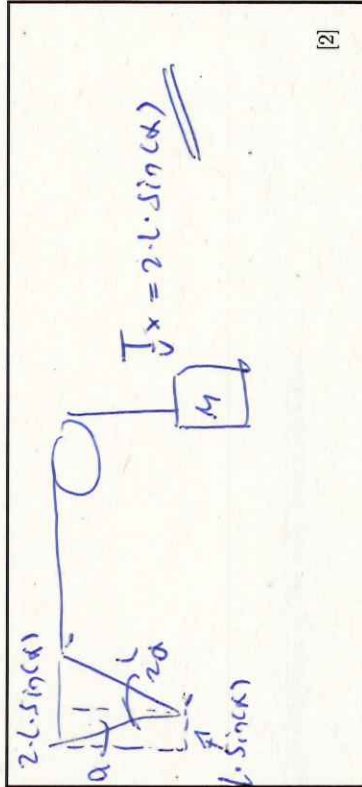
Gegeben: $m, g, l, r, J^{(A)}, k, d, k_\alpha$



a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

[1]

- b) Bestimmen Sie x in Abhängigkeit von a .



- c) Stellen Sie die potentielle Energie E_p des Systems in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate α auf.
- Wenn Sie Aufgabe b) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $x = 4l \cos \alpha$ weiter.*

$$\begin{aligned}\bar{U}_p &= -m \cdot g \cdot x = -m \cdot g \cdot 2L \sin(\alpha) \\ &= -m \cdot g \cdot x + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x \cdot (2x)^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (2L \sin(\alpha))^2 \\ &= -m g 2L \sin(\alpha) + \frac{1}{2} k x^4 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot 4L^2 \sin^2(\alpha) \\ &\quad \text{abgibt sin} \\ &\quad \text{aus} \\ &\quad \text{aus} \\ &= -2m g L \sin(\alpha) + 2k x^2 + 2k L^2 \sin^2(\alpha)\end{aligned}$$

- d) Stellen Sie zunächst einen Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_A$ der Rolle und $\alpha, \dot{\alpha}$ her. Stellen Sie dann die kinetische Energie des Gesamtsystems E_k in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate α auf.

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi}_A \cdot \dot{\varphi}_A \cdot r &= \dot{x} = 2l \cos(\alpha) \cdot \dot{\alpha} \\
 \dot{\varphi}_A &= \frac{2l}{r} \dot{\alpha} \cos(\alpha) \\
 E_k &= \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J^{(A)} \cdot \dot{\varphi}_A^2 \\
 &= 2l^2 \cos^2(\alpha) \dot{\alpha}^2 m + 2J^{(A)} \left(\frac{l \dot{\alpha}}{r} \cos(\alpha) \right)^2 \\
 &= 2m(l^2 \cos^2(\alpha) + 2J^{(A)} \left(\frac{l}{r} \cos(\alpha) \right)^2)
 \end{aligned}$$

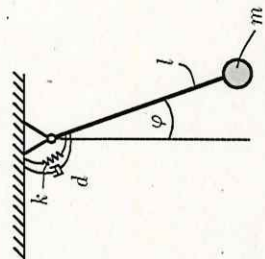
- e) Bestimmen Sie die nichtkonservativen Kräfte Q_{α}^{nk} bzgl. der verallgemeinerten Koordinate α .

$$[1] \quad \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial b}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben ist ein Pendel, welches aus einer Punktmasse m und einem masselosen, starren Stab der Länge l besteht. Auf den Stab wirken eine Drehfeder (Steifigkeit k , für $\varphi = 0$ entspannt) und ein Drehdämpfer (Dämpferkonstante d). Die Bewegung wird mit dem Winkel φ beschrieben und die Schwerkraft wird vernachlässigt.

Gegeben: m, k, d, l



a) Geben Sie die Bewegungsgleichung in Normalform an.

$$m l^2 \ddot{\varphi} = -k \varphi - d \dot{\varphi}$$

mit d = 1/2

$$\ddot{\varphi} + \frac{d}{m l^2} \dot{\varphi} + \frac{k}{m l^2} \varphi = 0$$

[2]

f) Gegeben sei die kinetische und potentielle Energie eines leicht abgeänderten Systems

$$E_k = 3l^2 \sin^2(\alpha) \dot{\alpha}^2 \left(m + \frac{J^{(A)}}{r^2} \right) \quad \text{und} \quad E_p = 7kl^2 \cos^2(\alpha) - 3mgl \cos(\alpha) + 4k_a \alpha^2$$

sowie die nichtkonservativen Kräfte $Q_{\alpha}^{nk} = -3d\dot{\alpha}$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art bzgl. der verallgemeinerten Koordinate α auf.

$$\begin{aligned} Q_{\alpha}^{nk} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_p}{\partial \alpha} \\ &= \frac{d}{dt} \left(6l^2 \sin^2(\alpha) \dot{\alpha} \left(m + \frac{J^{(A)}}{r^2} \right) \right) - 7kl^2 \sin(2\alpha) \dot{\alpha} \left(m + \frac{J^{(A)}}{r^2} \right) + 8kl \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \left(m + \frac{J^{(A)}}{r^2} \right) \\ &= \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\alpha}} = 6l^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha}^2 \left(m + \frac{J^{(A)}}{r^2} \right) \\ &= \frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = -7kl^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) + 3mgl(\sin(\alpha)) + 8kl \alpha \\ &= -3d\dot{\alpha} = 6l^2 \sin^2(\alpha) \ddot{\alpha} \left(m + \frac{J^{(A)}}{r^2} \right) + 7l^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha}^2 \left(m + \frac{J^{(A)}}{r^2} \right) - \\ &\quad - 6l^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha}^2 \left(m + \frac{J^{(A)}}{r^2} \right) - 7kl^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) + \\ &\quad + 3mgl \sin(\alpha) + 8kl \alpha \end{aligned}$$

[7]

b) Bestimmen Sie die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω .

Wenn Sie Aufgabe a) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $\ddot{\varphi} + \frac{3d}{2m l^2} \dot{\varphi} + \frac{4k}{3m l^2} \varphi = 0$ weiter.

$$\ddot{\varphi} + 2D\omega\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4}{m l^2}}$$

[1]

c) Wie muss die Konstante d gewählt werden, so dass das System unterkritisch gedämpft ist? Beachten Sie: $m, k, d, l, \omega > 0$
Zusätzlich gegeben: ω

unterkritisch bei $D < 1$

$$2D\omega = \frac{d}{m l^2}$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{d}{\omega m l^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{\sqrt{\frac{4}{m l^2}} m l^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{\sqrt{\frac{4}{m l^2}} m l^2} = \frac{d}{2\sqrt{4m}} < 1$$

$$d < 2\sqrt{4m} \quad \text{oder äquivalent } \omega$$

$$d < 2\omega m l^2$$

[2]

d) Bestimmen Sie die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_d . bei unterkrit. gedämpfte

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - D^2}$$

$$\text{mit } D = \frac{d}{2\omega m l^2} = \frac{d}{2\sqrt{4m}}$$

[1,5]

e) Geben Sie die Lösung $\varphi(t)$ der Bewegungsgleichung für $t > 0$ an, wenn $\varphi(0) = 0$ und

$$\dot{\varphi}(0) = v_0.$$

Zusätzlich gegeben: $v_0, \omega, \omega_d, D, |D| < 1$

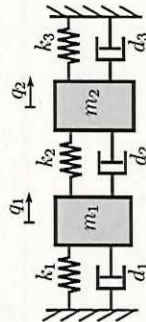
$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 & \dot{\varphi}(0) &= v_0 \\ \varphi(t) &= \frac{1}{\omega} e^{-D\omega t} \cos(\omega_d t + \psi) \\ \dot{\varphi}(t) &= -\frac{1}{\omega} e^{-D\omega t} \omega_d \sin(\omega_d t + \psi) \\ \varphi(0) &= \frac{1}{\omega} e^{0} \cos(\psi) = 0 \rightarrow \psi = \frac{\pi}{2} \\ \dot{\varphi}(0) &= -\frac{1}{\omega} e^{0} \omega_d \sin(\psi) = v_0 \\ &= -\frac{1}{\omega} \omega_d \sin(\frac{\pi}{2}) = v_0 \\ &= -\frac{1}{\omega} \omega_d = v_0 \\ \omega_d &= -v_0 \omega \\ \varphi(t) &= -\frac{v_0}{\omega_d} e^{-D\omega t} \cos(\omega_d t + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

[3,5]

Aufgabe 3 (19 Punkte)

Untersucht wird der abgebildete Zweimassenschwinger. Alle Federn sind für $q_1 = 0 = q_2$ entspannt.

Gegeben: $m_1, m_2, k_1, k_2, k_3, d_1, d_2, d_3$.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung in den verallgemeinerten Koordinaten q_1, q_2 in Matrixform auf.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 + d_3 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{0}$$

[3]

- b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_1, ω_2 sowie die massennormierten Schwingungsformen $\underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2$ des ungedämpften Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \underline{\dot{q}} = \underline{0}$$

$$\det(\underline{k} - \omega^2 \underline{m}) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 - \omega^2 & -2 \\ -2 & 4 - \omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(3 - \omega^2)(4 - \omega^2) - 4 = 0$$

$$12 - 6\omega^2 - 4\omega^2 + 2\omega^4 - 4 = 0$$

$$2\omega^4 - 10\omega^2 + 8 = 0$$

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-8)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{10 \pm 6}{4} \quad \omega_1^2 = 4 \quad \rightarrow \omega_1 = 2$$

$$\omega_2^2 = 7 \quad \rightarrow \omega_2 = \sqrt{7}$$

$$\underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \underline{0} \quad \underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \underline{0} \quad \underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \underline{0} \quad \underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \underline{0} \quad \underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Massennormiert:

$$\underline{\varphi}_1^T \underline{M} \underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \underline{\varphi}_1^*$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \underline{\varphi}_2^*$$

[8]

- c) Gegeben sind die Eigenkreisfrequenzen, die modalen Dämpfungsgrade sowie die massennormierten Eigenvektoren

$$\omega_1 = 10, D_1 = 5\%, \underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \omega_2 = 100, D_2 = 1\%, \underline{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Geben Sie die Dämpfungsmatrix $\underline{D}$ in den verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q}$ an, mit $\underline{\dot{q}}(t) = \underline{\varphi}_1 \eta_1 + \underline{\varphi}_2 \eta_2$.

$$\underline{D} \underline{m} = \begin{bmatrix} \omega_1 \varphi_1 & \omega_2 \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varphi} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} \underline{m} = \underline{\varphi}^T \underline{D} \underline{\varphi} \underline{m}$$



$$\begin{aligned}
 \underline{D} &= (\underline{\Phi}^T)^{-1} \underline{D}_m \underline{\Phi}^{-1} \\
 \underline{\Phi}^{-1} &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\Phi}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \underline{D} &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 95 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

[6]

d) Geben Sie Anfangswerte für die Verschiebungen und Geschwindigkeiten in verallgemeinerten und modalen Koordinaten an, sodass das System aus der Ruhe startet und rein mit der zweiten Mode antwortet. Verwenden Sie dazu die Schwingungsformen aus Aufgabenteil c).

Hinweis: Gesucht sind $\underline{q}(0), \dot{\underline{q}}(0), \begin{bmatrix} \eta_1(0) \\ \eta_2(0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1(0) \\ \dot{\eta}_2(0) \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 \underline{q}(t) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \eta_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \eta_2 \\
 \underline{q}(0) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \eta_1(0) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \eta_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \dot{\underline{q}}(0) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\eta}_1(0) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \dot{\eta}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1(0) \\ \dot{\eta}_2(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \dot{\eta}_1(0) \\ \dot{\eta}_2(0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

[2]

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Ein mechanisches System bestehend aus zwei Körpern kann über die angegebene Bewegungsgleichung mit asymmetrischer Steifigkeitsmatrix beschrieben werden. Das System wird an den Koordinaten q_1 und q_2 jeweils mit der konstanten Amplitude f harmonisch angeregt. Gegeben $\underline{f}, \underline{\Omega}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \mathbb{R}\{\underline{F}e^{i\Omega t}\} \text{ mit } \underline{F} = \begin{bmatrix} f \\ f \end{bmatrix}$$

$\underline{M} \quad \underline{K} + \underline{N}$

a) Stellen Sie die dynamische Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{S}}(\Omega)$ und die dynamische Nachgiebigkeitsmatrix $\underline{\underline{H}}(\Omega)$ auf.

$$\underline{\underline{S}}(\Omega) = -\Omega^2 \underline{M} + (\underline{K} + \underline{N})$$

$$\underline{\underline{H}}(\Omega) = \underline{\underline{S}}(\Omega)^{-1} = \frac{1}{(-3\Omega^2+3)(\Omega^2+2) - (-\Omega^2-1)(-\Omega^2-2)} \begin{bmatrix} \Omega^2+2 & -\Omega^2+1 \\ \Omega^2+2 & -3\Omega^2+3 \end{bmatrix}$$

[2]

b) Geben Sie die Amplitude Q_1 der partikulären Lösung an, mit $\underline{q} = \mathbb{R}\{\underline{Q}e^{i\Omega t}\}$

$$\underline{Q} = \underline{\underline{S}}(\Omega)^{-1} \underline{F}$$

$$= \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 2-\Omega^2 & 7-\Omega^2 \\ 2-\Omega^2 & 3-3\Omega^2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} f \\ f \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det \begin{bmatrix} f(3-2\Omega^2) \\ f(5-4\Omega^2) \end{bmatrix}}$$

$$Q_1 = \frac{f(3-2\Omega^2)}{\det}$$

[2]

c) Berechnen Sie die ungedämpften Eigenkreisfrequenzen ω_1, ω_2 .

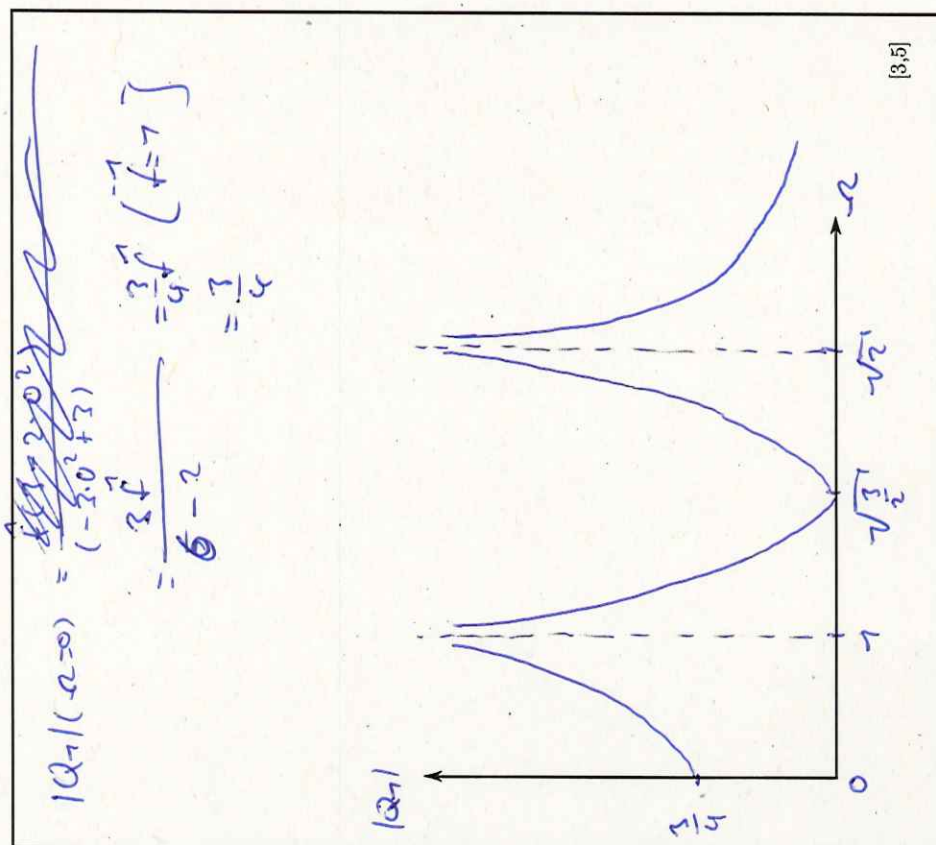
$$\det(\underline{K} - \Omega^2 \underline{M}) = 0 \quad (\text{bei } \underline{N}(\Omega) = 0)$$

$$\det \begin{bmatrix} 3-\Omega^2 & 7-\Omega^2 \\ 2-\Omega^2 & 3-3\Omega^2 \end{bmatrix} = (3-\Omega^2)(3-3\Omega^2) - (7-\Omega^2)(2-\Omega^2) = 0$$

$$4\Omega^4 - 7\Omega^2 + 7 = 0 \quad \omega_1 = \sqrt{7} \quad \omega_2 = \sqrt{7}$$

[2]

- f) Skizzieren Sie den Amplitudenfrequenzgang $|Q_1|$ der partikulären Lösung für $f = 1$. Berechnen Sie dazu auch den Wert der Amplitude $|Q_1|$ für $\Omega = 0$.



[2]

- d) Bestimmen Sie die Tilgungsfrequenz ω_{T1} der Koordinate q_1 .

$$Q_1(\Omega = \omega_{T1}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{f(3 - 2\omega_{T1}^2)}{\det(\omega_{T1})} \stackrel{!}{=} 0 ; \omega_{T1}^2 = \frac{3}{2}$$

$$\omega_{T1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

[2]

Wenn Sie Aufgabe c) und d) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $\omega_1 = 2, \omega_2 = 5$ und $\omega_{T1} = \frac{7}{2}$ weiter.

- e) Tritt Scheinresonanz auf? ☐ Ja ☒ Nein [0,5]

$\omega_1 \neq \omega_{T1}$

Strukturmechanik Prüfung F2022

Teil 1: Verständnisfragen

Nachname, Vorname: Lecker F. & Z.
Matrikelnummer: 1500389
Studiengang: CRT

- Der Fragenteil muss ohne jegliche Hilfsmittel gelöst werden.
- Skizzen können mit Bleistift vorgezeichnet werden, müssen aber mit einem dokumentenechten Stift finalisiert werden. Bitte verwenden Sie keine rote oder grüne Farbe.
- Der Fragenteil besteht aus 7 Fragen auf 6 Seiten.
- Die Punkteangabe stellt einen Richtwert dar, nicht die endgültige Punktzahl.
- Die Bearbeitungszeit für den Fragenteil beträgt 20 Minuten.
- Im Anschluss wird die Bearbeitungszeit gestoppt und die Arbeitsbögen werden eingesammelt.

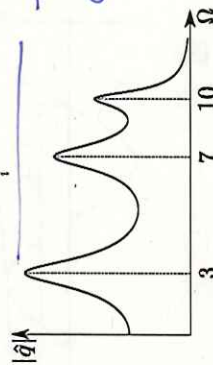
Frage 1 (4 Punkte)

Kennzeichnen Sie die folgenden Aussagen als wahr/falsch.

	Wahr	Falsch
Tilger nutzen das Phänomen der Scheinresonanz aus.	☐	☒
Konservative Systeme sind immer ungedämpft.	☒	☐
Beim Vorgehen nach Newton-Euler kann die Bewegungsgleichung ohne Einführung von Reaktionskräften und -momenten hergeleitet werden.	☐	☒
Die allgemeine Lösung eines linearen, begrenzten, konservativen Schwingungssystems ist eine Linearkombination der Eigenschwingungen.	☒	☐
Antiresonanzen treten bei allen Koordinaten gleichzeitig auf.	☐	☒
Die Dynamik von Kontinua lässt sich mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreiben.	☐	☒
Die Orthogonalitätsbeziehungen hinsichtlich Trägheits- und elastischer Kräfte gelten nicht für die Eigenformen von Kontinua.	☐	☒
Die modale Transformation ist eine exakte Koordinatentransformation.	☒	☐

Frage 2 (1,5 Punkte)

Betrachtet wird ein schwach gedämpftes Ein-Freiheitsgrad-System $\ddot{q} + 2D\omega\dot{q} + \omega^2 q = f(t)$ mit der Eigenkreisfrequenz $\omega = 3$. Die folgende Abbildung zeigt den Amplitudenfrequenzgang bei einer periodischen Anregungskraft $f(t) = \sum_i f_i \cos(\omega_i t)$.



$\omega_1 = 3, \omega_2 = 7, \omega_3 = 10$
 $\omega_i \in \{3, 7, 10\}$

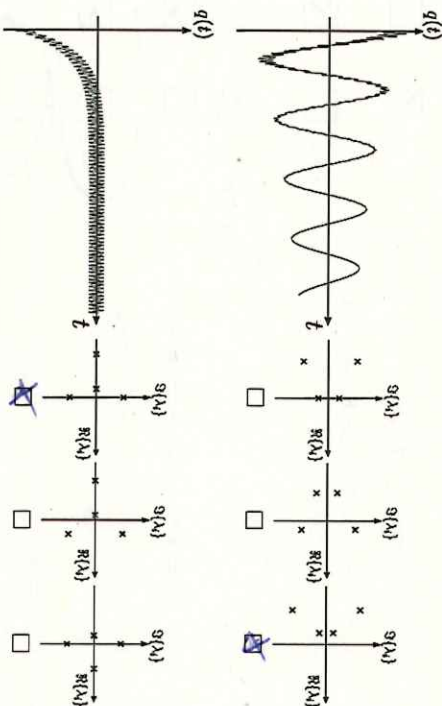
Geben Sie die im Anregungssignal enthaltenen harmonischen Anteile ω_i mit $|f_i| \neq 0$ an:

$\omega_1 = 3, \omega_2 = 7, \omega_3 = 10$



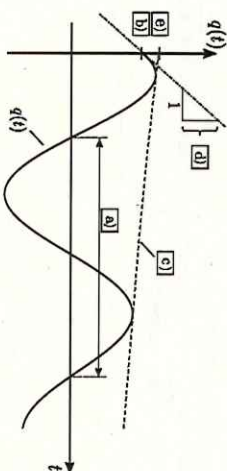
Frage 3 (2 Punkte)

Betrachtet wird das Eigenproblem $(\lambda^2 \underline{M} + \lambda \underline{D} + \underline{K}) \underline{q} = \underline{0}$ eines Zweifreiheitsgrad-Systems (4 Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$). Gegeben ist links das Eigenschwingungsverhalten einer beliebigen Koordinate. Welche der drei vorgeschlagenen Eigenwertkombinationen λ_i könnte das System jeweils besitzen? Mindestens ein Vorschlag ist richtig. Mehrfachlösungen sind möglich.



Frage 4 (3 Punkte)

Gegeben ist die Lösung $q(t)$ einer Differentialgleichung als $q(t) = \hat{q} \cos(\omega_d t + \psi) e^{-D\omega_d t}$ mit $0 \leq \psi \leq \pi$, $0 < D < 1$. Kreuzen Sie die korrekten Maße an. Pro Teilaufgabe ist eine Antwort richtig.



- | | | | |
|---|--|--|--|
| a) ☐ $\frac{2\pi}{\omega}$ | ☒ $\frac{2\pi}{\omega_d}$ | ☐ $\frac{\omega_d}{2\pi}$ | ☐ $\frac{\omega}{2\pi}$ |
| b) ☐ $\hat{q}$ | ☐ $\hat{q} \cos(\omega_d t + \psi)$ | ☒ $\hat{q} \cos(\psi)$ | ☐ $\hat{q} \sin(\psi)$ |
| c) ☒ $e^{-D\omega_d t}$ | ☒ $\hat{q} e^{-D\omega_d t}$ | ☒ $e^{-D\omega_d t}$ | ☐ $\hat{q} e^{D\omega_d t}$ |
| d) ☐ $-\hat{q}\omega_d \sin(\psi)$ | ☐ $-D\omega_d \hat{q} \cos(\psi)$ | ☒ $-\hat{q}\omega_d \sin(\psi) - \hat{q} D\omega_d \cos(\psi)$ | ☐ $\hat{q} \cos(\psi)$ |
| e) ☐ $\hat{q} \cos(\psi)$ | ☐ $\hat{q} \sin(\psi)$ | ☒ 1 | ☒ $\hat{q}$ |



Frage 5 (3 Punkte)

Ein konservatives Ein-Freiheitsgrad-System schwingt ohne Einfluss des Schwerfelds.

- a) Die Gesamtenergie des Systems ist E . Bestimmen Sie die potentielle Energie E_p des Systems in Abhängigkeit von E , zu einem Zeitpunkt bei dem die Auslenkung gerade die Hälfte der maximalen Auslenkung ist.

$$E = E_p + E_a$$

länge geht quadratisch in $\hat{q}$
ein - halbe länge, vierter
energie
 $\rightarrow E_p = \frac{1}{4} E$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{\Delta l^2}{L^2} \quad \text{mit } \Delta l = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow E_p = \frac{1}{4} E$$

- b) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen für den Zeitpunkt zutreffen, an dem die maximale Auslenkung von der Ruhelage aus erreicht wird:

- ☐ Die Beschleunigung ist null
☐ Die Geschwindigkeit hat ein Maximum
☒ Die kinetische Energie hat ein Maximum
☒ keine davon

$$\omega^2 = \left(\frac{5}{2}\right) \rightarrow \omega = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

- c) Die Differentialgleichung des Systems lautet $\ddot{q} + \left(\frac{5}{2}\right) q = 0$. Wie lautet eine zugehörige Lösung?

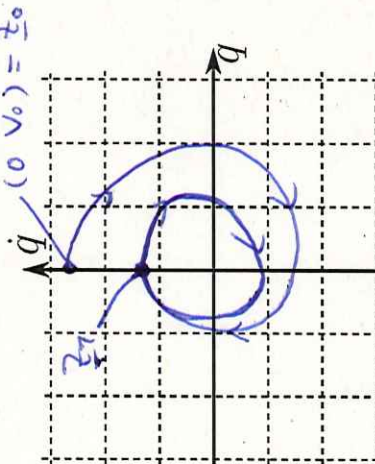
- ☐ $q = \hat{q} \cos(5s^{-1}t + \psi)$
☒ $q = \hat{q} \cos(\sqrt{5} s^{-1}t + \psi)$
☐ $q = \hat{q} \cos(5s^{-2}t + \psi)$
☐ keine davon

Frage 6 (3,5 Punkte)

- a) Ein harmonisch angeregtes System wird beschrieben mit den Koordinaten $\underline{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ und besitzt die linear unabhängigen Eigenvektoren $\underline{\varphi}_1 = [1 \ 2 \ 2]^T$, $\underline{\varphi}_2 = [0 \ -1 \ 1]^T$ und $\underline{\varphi}_3 = [4 \ -1 \ -1]^T$. Wie muss der Kraftamplitudenvektor $\underline{F}$ der harmonischen Anregungskraft $\underline{f}(t) = \Re \{ \underline{F} e^{i\omega t} \}$ gewählt werden, damit nur die zweite Mode antwortet?

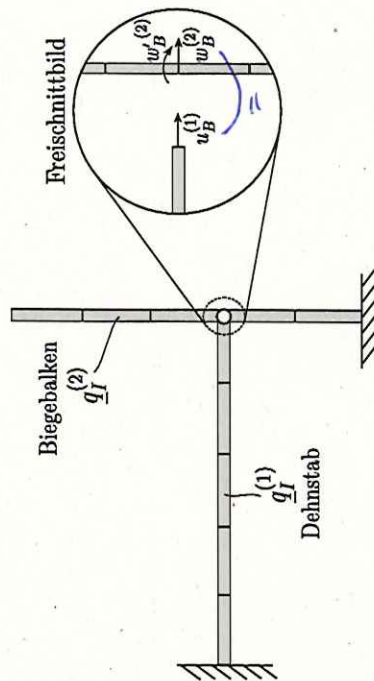
$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- b) Ein autonomes, unterkritisch gedämpftes System (beschrieben durch die Koordinate q) startet zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im Zustandspunkt $\underline{z}_0 = \begin{bmatrix} q(t_0=0) \\ \dot{q}(t_0=0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 > 0 \end{bmatrix}$. Im Zustandspunkt $\underline{z}_1$ nach einer gedämpften Periodendauer wird die Dämpfung in der Art kompensiert, sodass das System fortan ungedämpft schwingt. Skizzieren Sie qualitativ das Eigenschwingungsverhalten ab dem Zeitpunkt t_0 in der Phasenebene. Markieren Sie $\underline{z}_0$, $\underline{z}_1$ und die Durchlaufzeitung der Trajektorie.



Frage 7 (4,5 Punkte)

Ein einseitig eingespannter, homogener Dehnstab wird an seinem freien Ende über ein Drehgelenk mit einem einseitig eingespannten, homogenen Biegebalken verbunden. Beide Strukturen werden räumlich diskretisiert beschrieben. Die Verschiebung der Knoten des Dehnstabes werden mit u , die laterale Verschiebung der Knoten des Biegebalkens mit w und deren Neigung mit w' bezeichnet. Die Verschiebungen im Inneren der Strukturen werden mit $\underline{q}^{(s)}$ beschrieben. Die Verschiebungen und Neigungen sind an der Schnittstelle mit dem Index B gekennzeichnet. Gehen Sie von kleinen Verschiebungen und Neigungen aus.



- a) Tragen Sie die Nicht-Null-Elemente in die Koppelmatrix $\underline{\underline{L}}$ ein.

$$\begin{bmatrix} u_B^{(1)} & q_I^{(1)} & w_B^{(1)} & w_B^{(2)} & q_I^{(2)} \\ u_B^{(2)} & q_I^{(2)} & w_B^{(2)} & w_B^{(2)} & q_I^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Das 3D Finite-Elemente-Modell einer Komponente besteht aus 1500 Knoten mit je 3 Freiheitsgraden.

- b) Geben Sie die Anzahl der verallgemeinerten Koordinaten des ursprünglichen Komponentenmodells und die des reduzierten Komponentenmodells an, wenn bei der Craig-Bampton-Reduktion 15 Fixed-Interface-Moden berücksichtigt werden und das Interface 10 Knoten mit Kopplung in alle 3 Raumrichtungen enthält.

$$\begin{aligned} n_{\text{urspr.}} &= 1500 \\ n_{\text{red.}} &= 450 \end{aligned}$$

1112

let vor der
begeben

- Erlaubte Hilfsmittel: vom Institut erstellte Formelsammlung auf 4 Seiten ausgedruckt (doppelseitig oder einseitig mit leeren Rückseiten, keine Skalierung, A4), handschriftliche Ergänzungen erlaubt
- Skizzen können mit Bleistift vorgezeichnet werden, müssen aber mit einem dokumentenechten Stift finalisiert werden. Bitte verwenden Sie keine rote oder grüne Farbe.
- Der Rechenanteil besteht aus 5 Aufgaben auf 18 Seiten (plus 2 leere angehängte Seiten).
- Die Punkteangabe stellt einen Richtwert dar, nicht die endgültige Punktzahl.
- Bearbeitungszeit: 70 Minuten
- Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen oder bereits berechneten Größen auszudrücken!
- Benutzen Sie den zur Verfügung stehenden Platz für Ihre Rechnungen. Bitte verweisen Sie darauf, falls Sie für Ihren Rechenweg die angehängten Seiten verwenden (z.B. "siehe S. 19"!).
- Bitte tragen Sie das Endergebnis in die Kästchen ein oder markieren Sie es eindeutig.

The diagram illustrates a mechanical system. A cart of mass m_2 moves horizontally on a surface. It is connected to a vertical wall on the left by a spring with stiffness k_2 and a damper with coefficient d . The cart's displacement is x . A rigid arm of length l is pivoted at the cart's center. The arm has mass m_1 and moment of inertia $J(s_1)$ about the pivot. The arm's angular position is s_1 . The arm is divided into segments a , b , and c . A point mass m is at the end of the arm, with a vertical force $f(t)$ applied to it. The arm is also subjected to a torque M . Gravity g acts vertically downwards. A vertical dashed line NN is shown as a reference.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ ✓

[1]



- b) Stellen Sie die kinetische Energie und potentielle Energie des Gesamtsystems bezüglich des gegebenen Nullniveaus in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q} = [x \ \varphi]^T$ und Geschwindigkeiten $\underline{\dot{q}}$ auf.

$$m_1: E_{\text{pot}} = m_1 \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

$$\dot{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + m_1 c^2) \dot{\varphi}^2$$

$$m_2: E_{\text{pot}} = m_2 \cdot g \cdot x$$

$$\dot{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}^2$$

$$m_1: E_{\text{pot}} = m_1 \cdot g \cdot b \sin(\varphi)$$

$$x = b \sin(\varphi) \quad \dot{x} = b \cos(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$\dot{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 (b^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + b^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 b^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))$$

$$F: E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2$$

$$x = g \sin(\varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + m_1 c^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 b^2 \dot{\varphi}^2$$

$$E_p = m_1 g c \sin(\varphi) + m_2 g x - m_1 g b \sin(\varphi)$$

[5]

Falsch verges



- c) Bestimmen Sie die nichtkonservativen Kräfte Q_x^{nk} und Q_φ^{nk} in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten.

$$-d \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + f(t) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$Q_x^{\text{nk}} = -d \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + f(t) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$= f(t) \frac{\partial}{\partial x} b \cos(\varphi)$$

$$Q_x^{\text{nk}} = -d \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + f(t) b \cos(\varphi)$$

[2]

Falsch

d) Für ein verändertes System ergeben sich die kinetische und potentielle Energie zu

$$E_k = \frac{1}{4} m \dot{x}^2 + \frac{1}{8} M c^2 \dot{\varphi}^2, \quad E_p = \frac{\sqrt{2}}{2} (k_2 (b \cos \varphi + x)^2 + k_1 x^2) + m g (-a \cos \varphi + 3x).$$

Es gilt $Q_x^{pk} = 0 = Q_\varphi^{pk}$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die verallgemeinerten Koordinaten x und φ auf.

x:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x} \right) = \frac{1}{2} m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2} (k_2 (2b \cos \varphi + 2x) + 2k_1 x) + 3mg$$

e:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4} M c^2 \dot{\varphi} \right) = \frac{1}{4} M c^2 \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2} (k_2 b^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) - b^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) - 2b \sin(\varphi)) + mg a \sin(\varphi)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (k_2 (-2b^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)) - 2b \sin(\varphi) \cos(\varphi) + mg a \sin(\varphi))$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (k_2 (-2b^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)) - 2b \sin(\varphi) \cos(\varphi) + mg a \sin(\varphi))$$

$$\frac{1}{2} m \ddot{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} (k_2 (2b \cos \varphi + 2x) + 2k_1 x) + 3mg$$

$$\frac{1}{4} M c^2 \ddot{\varphi} + \frac{\sqrt{2}}{2} (k_2 (-2b^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)) - 2b \sin(\varphi) \cos(\varphi) + mg a \sin(\varphi)) = 0$$

e) Die Bewegungsgleichungen eines leicht veränderten Systems lauten

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M b^2 + J^{(A)} \end{bmatrix} \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} -k_1 (a \sin \varphi - x) + k_2 x \\ k_1 a \cos \varphi (a \sin \varphi - x) \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad \text{mit } \underline{q} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}.$$

Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen um die Ruhelage $\underline{q}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

19 > Entwicklung um stabile Ruhelage

$$\Delta q = q - q_0; \quad \Delta \dot{q} = \dot{q} - \dot{q}_0; \quad \Delta \ddot{q} = \ddot{q} - \ddot{q}_0$$

$$\dot{q}_0 = 0; \quad \ddot{q}_0 = 0$$

$$\underline{M}(\underline{q}_0) \Delta \ddot{q} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{q}} \bigg|_{\underline{q}_0} \Delta \underline{q} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{\dot{q}}} \bigg|_{\underline{q}_0, \dot{\underline{q}}_0} \Delta \underline{\dot{q}} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M b^2 + J^{(A)} \end{bmatrix} \Delta \ddot{q} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \underline{\dot{q}} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 a \cos \varphi \\ -k_1 a \cos \varphi & -k_1 a^2 \end{bmatrix} \Delta \underline{q} = \underline{0}$$

$$\begin{pmatrix} -k_1 a \sin \varphi a \sin \varphi + k_1 a \sin \varphi a \cos \varphi \\ -k_1 a^2 \sin^2 \varphi + k_1 a^2 \cos^2 \varphi \\ = k_1 a^2 (-\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ = -k_1 a^2 \end{pmatrix}$$

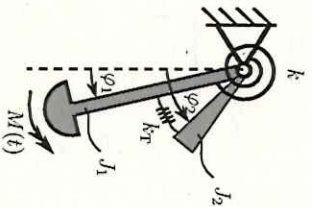
Nebenrechnung

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M b^2 + J^{(A)} \end{bmatrix} \Delta \ddot{q} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 a \cos \varphi \\ -k_1 a \cos \varphi & -k_1 a^2 \end{bmatrix} \Delta \underline{q} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M b^2 + J^{(A)} \end{bmatrix} \Delta \ddot{q} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 a \cos \varphi \\ -k_1 a \cos \varphi & -k_1 a^2 \end{bmatrix} \Delta \underline{q} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M b^2 + J^{(A)} \end{bmatrix} \Delta \ddot{q} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 a \cos \varphi \\ -k_1 a \cos \varphi & -k_1 a^2 \end{bmatrix} \Delta \underline{q} = \underline{0}$$

Aufgabe 2 (9 Punkte)



Ein mit dem Moment $M(t)$ harmonisch angeregter Körper (Trägheitsmoment J_1 bezüglich Drehpunkt) ist in seinem Drehpunkt elastisch gelagert (Drehsteifigkeit k) und mit einem zweiten Körper (Trägheitsmoment J_2 bezüglich Drehpunkt) über die Feder k_T gekoppelt. Für $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ sind alle Federn entspannt. Es werden kleine Winkel φ_1, φ_2 angenommen, sodass das System linearisiert betrachtet werden darf. Damit gilt für die Bewegungsgleichungen des abgebildeten Gesamtsystems:

$$\underline{\underline{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{M} \cos(3t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gegeben: $J_1, J_2, k, k_T, \dot{M}$

- a) Bestimmen Sie zunächst die Massen- und Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{K}}$.
Hinweis: Nutzen Sie dazu Ihr Wissen über das direkte Ablesen von $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{K}}$ bei Schwingerketten.

$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$	$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k+k_T & -k_T \\ -k_T & k_T \end{bmatrix}$	[3]
--	--	-----

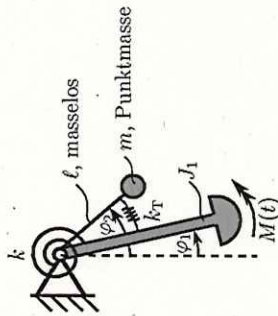
- b) Wie lautet die Eigenkreisfrequenz ω des Systems wenn der Körper mit Trägheitsmoment J_1 festgehalten wird?

$\omega^2 = \frac{k}{J_1}$	
$\omega = \sqrt{\frac{k}{J_1}}$	[1]

- c) Bestimmen Sie die dynamische Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{S}}(\Omega)$ des Gesamtsystems. Bestimmen Sie daraus die Amplitude der partikulären Lösung $Q_1(\Omega)$ für die Koordinate φ_1 .

$\underline{\underline{S}}(\Omega) = \begin{bmatrix} -J_1 \Omega^2 + k + k_T & -k_T \\ 0 & -J_2 \Omega^2 + k_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_T & -k_T \\ -k_T & k_T \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -J_1 \Omega^2 + k + 2k_T & -k_T \\ 0 & -J_2 \Omega^2 + k_T \end{bmatrix}$ $\det(\underline{\underline{S}}) = (k + 2k_T - J_1 \Omega^2)(k_T - J_2 \Omega^2) - k_T^2$ $= k k_T - J_1 J_2 \Omega^4 + k_T^2 \Omega^2 - k_T J_1 \Omega^2 + J_2 k_T \Omega^4$ $\underline{\underline{S}}(\Omega) = \begin{bmatrix} J_1 \Omega^2 + k + k_T & -k_T \\ -k_T & -J_2 \Omega^2 + k_T \end{bmatrix} \quad Q_1(\Omega) = \frac{J_1}{J_1 J_2 \Omega^2 + k_T} (k_T - J_2 \Omega^2)$	
---	--

- d) Nun soll der Körper 2 durch einen Tilger der Masse m (Punktmasse) ersetzt werden. Dieser wird über eine masselose Stange der Länge ℓ und der Feder k_T mit dem Körper 1 verbunden. Welche Masse muss der Tilger haben, damit der angeregte Körper 1 bei Anregung mit der Frequenz $\Omega = \sqrt{\frac{k}{J_1}}$ ruht?



Zusätzlich gegeben: ℓ

$$Q(\Omega) = -\sqrt{\frac{k}{J_1}} = 0$$

$$Q(\Omega) = \vec{S}^{-1} \vec{F} \quad \text{mit} \quad \vec{S} = \begin{bmatrix} -J_1 \Omega^2 + k + k_T & -k_T \\ -k_T & m \Omega^2 + k_T \end{bmatrix}$$

$$-k \Omega^2 k_T = 0$$

$$-m \ell^2 \frac{k}{J_1} k_T = 0$$

$$m = \frac{k \Omega^2 J_1}{\ell^2 k}$$

$$m =$$

[2]

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die Bewegungsgleichungen eines rotierenden Zwei-Freiheitsgrad-Systems sind gegeben mit

$$m \ddot{q}_1 + 2d \dot{q}_1 - (d + 2m\Omega) \dot{q}_2 + 2kq_1 - kq_2 = 0$$

$$m \ddot{q}_2 - (d - 2m\Omega) \dot{q}_1 + d \dot{q}_2 - kq_1 + kq_2 = 0.$$

Bestimmen Sie für die Bewegungsgleichungen der Form $\underline{M} \ddot{\underline{q}} + (\underline{D} + \underline{G}) \dot{\underline{q}} + (\underline{K} + \underline{N}) \underline{q} = \underline{0}$ die Matrizen $\underline{D}$, $\underline{G}$, $\underline{K}$, $\underline{N}$, wobei gilt $\underline{D} = \underline{D}^T$, $\underline{G} = -\underline{G}^T$, $\underline{K} = \underline{K}^T$, $\underline{N} = -\underline{N}^T$.
Gegeben: m, k, d, Ω

$$\underline{D} + \underline{G} = \begin{bmatrix} 2d & -d-2m\Omega \\ -d+2m\Omega & d \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} + \underline{N} = \begin{bmatrix} 2 & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, \quad \underline{N} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

$$x - y = -k \quad x = -k + y \quad x = -k$$

$$x + y = -k \quad -k + y + y = -k \quad y = 0$$

$$\underline{D}, \underline{G}, m, \Omega, \log$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 2d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}, \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} 2 & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad \underline{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[3]



Aufgabe 4 (5 Punkte)

Ein autonomes, unterkritisch gedämpftes Ein-Freiheitsgrad-System mit ungedämpfter Eigenkreisfrequenz ω und Dämpfungsgrad D besitzt die Anfangsauslenkung q_0 und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q}_0$. Bestimmen Sie die Auslenkung q_2 und die Geschwindigkeit $\dot{q}_2$ nach der doppelten gedämpften Periodendauer. Verwenden Sie den Ansatz der Form

$$q(t) = e^{-D\omega t} (U_c \cos(\omega_d t) + U_s \sin(\omega_d t)).$$

Gegeben: $\omega, D, q_0, \dot{q}_0$

$$T_d = 2\pi / \omega_d$$

$$q(0) = U_c = q_0$$

$$\dot{q}(t) = -D\omega e^{-D\omega t} U_c \cos(\omega_d t) + e^{-D\omega t} U_c \omega_d \sin(\omega_d t)$$

$$-D\omega e^{-D\omega t} U_s \sin(\omega_d t) + e^{-D\omega t} U_s \omega_d \cos(\omega_d t)$$

$$\dot{q}(0) = U_s = U_c + U_s$$

$$q_2 = q(T_d) = e^{-D\omega T_d} q_0 = e^{-\frac{4D\pi}{\omega_d T_d}} U_c$$

$$\dot{q}_2 = \dot{q}(T_d) = e^{-\frac{4D\pi}{\omega_d T_d}} U_s$$



$$q_2 =$$

$$\dot{q}_2 =$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Es sollen verschiedene Zwei-Freiheitsgrad-Systeme untersucht werden.

- a) Gegeben sind die Massen- und Steifigkeitsmatrix

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} ak & -k \\ -k & ak \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie $a > 1$, so dass das Verhältnis der Eigenkreisfrequenzquadrate $(\omega_2/\omega_1)^2 = 2$ beträgt.

$$\det(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} ak - \omega^2 m & -k \\ -k & ak - \omega^2 m \end{bmatrix} = 0$$

$$(ak - \omega^2 m)^2 - k^2 = 0$$

$$a^2 k^2 - 2ak\omega^2 m + \omega^4 m^2 - k^2 = 0$$

$$m^2 \omega^4 - 2akm\omega^2 + k^2(a^2 - 1) = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{2akm \pm \sqrt{(2akm)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (k^2(a^2 - 1))}}{2m^2}$$

$$= \frac{2akm \pm \sqrt{4a^2 k^2 m^2 - 4k^2 m^2 (a^2 - 1)}}{2m^2}$$

$$= \frac{2akm \pm \sqrt{4k^2 m^2 (a^2 - (a^2 - 1))}}{2m^2}$$

$$= \frac{2akm \pm \sqrt{4k^2 m^2}}{2m^2}$$

$$= \frac{2akm \pm 2km}{2m^2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{ak+1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{ak-1}{m}}$$

$$a = 3$$

$$\frac{ak-1}{m} \cdot \frac{ak+1}{m}$$

$$\frac{(ak-1)m}{(ak+1)m}$$

$$\frac{k(a-1)}{k(a+1)}$$

10:30

- b) Die Bewegungsgleichungen eines anderen Systems sind gegeben mit

$$2m\ddot{q}_1 - d\dot{q}_1 \sin q_2 + \frac{mg}{L^2} \left(q_1^2 - \frac{1}{L} q_1 \right) = 0$$

$$mL^2 \ddot{q}_2 + d\dot{q}_1 \cos q_2 + bq_2 + a = 0$$

mit $\underline{q} = [q_1 \ q_2]^T$. Bestimmen Sie die beiden Ruhelagen des Systems $\underline{q}_{0,1}$ und $\underline{q}_{0,2}$ sowie deren lokale, statische Stabilität. Weisen Sie die Stabilitätseigenschaft durch Rechnung nach.

Gegeben: $m, g, L, a, b > 0$

$$\dot{q} = 0 \quad \ddot{q} = 0$$

$$g(q_0) = 0$$

$$\frac{mg}{L^2} (q_{1,0}^2 - \frac{1}{L} q_{1,0}) = 0$$

$$6q_{2,0} + a = 0 \Rightarrow q_{2,0} = -\frac{a}{6}$$

$$q_{1,0}^2 - \frac{1}{L} q_{1,0} = 0$$

$$q_{1,0} = 0 \quad q_{1,0} = \frac{1}{L}$$

ausgewählte Gleichung



- c) Die zwei Moden eines anderen, ungedämpften Systems haben die Eigenkreisfrequenzen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \sqrt{5}$. Die zugehörigen, massennormierten Eigenvektoren sind

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad \text{und} \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Das System erfährt eine Krafterregung mit

$$\underline{f}(t) = \Re \left\{ \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\Omega t} \right\}.$$

Bestimmen Sie die Amplituden $\hat{\eta}_k$ der modalen Koordinaten η_k für beide Moden, $\eta_k(t) = \Re \{ \hat{\eta}_k e^{i\Omega t} \}$.
Gegeben: Ω, f

Wahr kommt
diese
Formel?

$$\hat{u}_1 = \frac{\varphi_1^T f}{\omega_1^2 - \Omega^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}}{1 - \Omega^2}$$

$$\hat{u}_1(\Omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} f}{1 - \Omega^2}$$

$$\hat{u}_2(\Omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}}{\omega_2^2 - \Omega^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} f}{5 - \Omega^2}$$

$$\hat{\eta}_1(\Omega) =$$

$$\hat{\eta}_2(\Omega) =$$

[2]

Mathematisch?

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}} + \underline{C} \dot{\underline{q}} + \underline{K} \underline{q} = \underline{F} e^{i\Omega t}$$

$$\varphi_1^T - \frac{1}{2} \varphi_1 = 0 ; \varphi_{1,1} = 0 \quad \varphi_{1,2} = \frac{1}{2}$$

$$6 \varphi_{2,1} + \varphi_{2,2} = 0 ; \varphi_{2,1} = -\frac{9}{6} \quad \varphi_{2,2} = -\frac{9}{6}$$

Mathematisch?

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{q}} \bigg|_{\underline{q}=0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m \Omega^2 \varphi_{1,1} - \frac{m \Omega^2}{2} & -d \dot{\eta} \cos(\varphi_2) \\ 0 & -d \dot{\eta} \cos(\varphi_1) + 6 \end{bmatrix} \bigg|_{\underline{q}=0}$$

$$\underline{q}_{0,1} = \begin{bmatrix} -\frac{3m \Omega^2}{2} \\ \frac{m \Omega^2}{2} \end{bmatrix} \quad \underline{q}_{0,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{m \Omega^2}{2} \end{bmatrix}$$

negativ $\rightarrow$

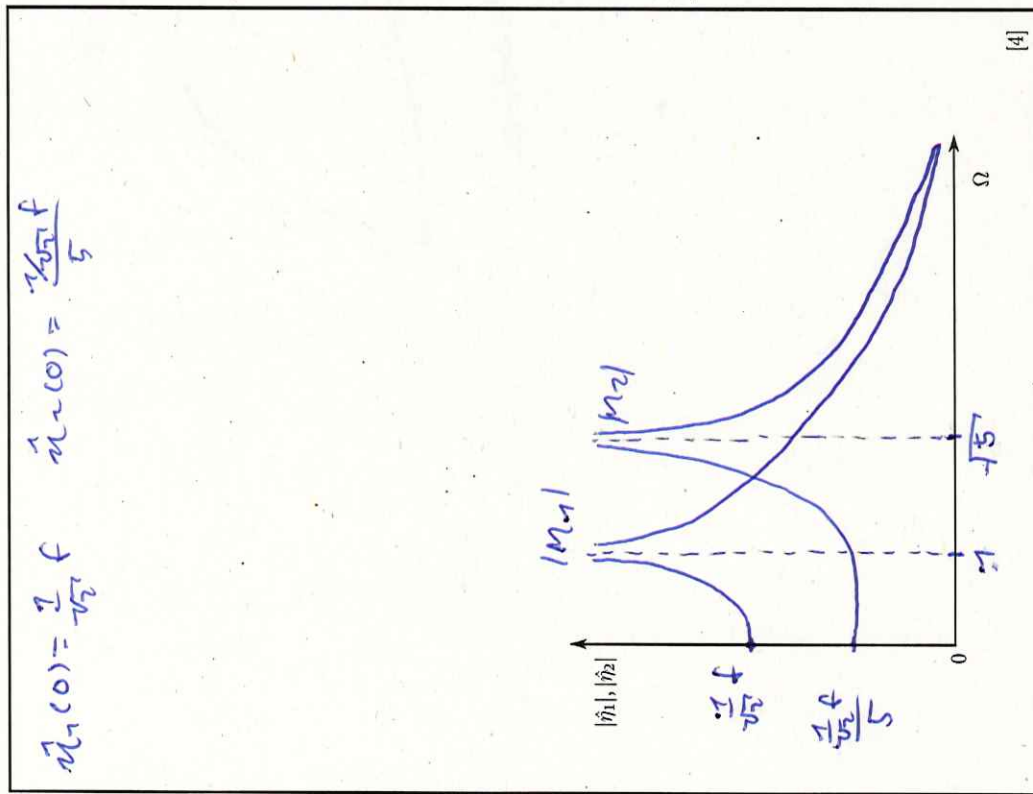
$$\underline{q}_{0,1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

☐ stabil ☒ instabil ☒ indifferent

$$\underline{q}_{0,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

☒ stabil ☐ instabil ☐ indifferent [4]

- d) Skizzieren Sie den Betrag der beiden modalen Amplituden $|\hat{q}_1|, |\hat{q}_2|$ aus c) in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz Ω in ein Diagramm. Kennzeichnen Sie die Kurven eindeutig. Berechnen Sie die Eckwerte $|\hat{q}_1(\Omega = 0)|, |\hat{q}_2(\Omega = 0)|$ und $|\hat{q}_1(\Omega \rightarrow \infty)|, |\hat{q}_2(\Omega \rightarrow \infty)|$ und tragen Sie die Werte im Diagramm ein. Kennzeichnen Sie auch die ungedämpften Eigenkreisfrequenzen.



- e) Die partikuläre Lösung des Systems aus c) in den verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q}$ ist

$$\underline{q}(t) = \Re \left\{ \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} e^{i\Omega t} \right\}.$$

Bestimmen Sie das Verhältnis der Beträge der Schwingungsamplituden $|Q_2|/|Q_1|$, wenn das System mit $\Omega = 2$ angeregt wird.

~~gegeben~~

$\frac{\hat{q}_2}{\hat{q}_1}$ mit $\Omega = 1$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} f}{-3} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} f \cdot 1}{-3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} f} = -\frac{1}{3}$$

$$Q = \hat{q}_1 \gamma_1 + \hat{q}_2 \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} f + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} f$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{f}{1-\Omega^2} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{f}{5-\Omega^2}$$

$$\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \left| \frac{\frac{1}{2} f + \frac{1}{2} f}{\frac{1}{2} f - \frac{1}{2} f} \right| = 2$$

[2]

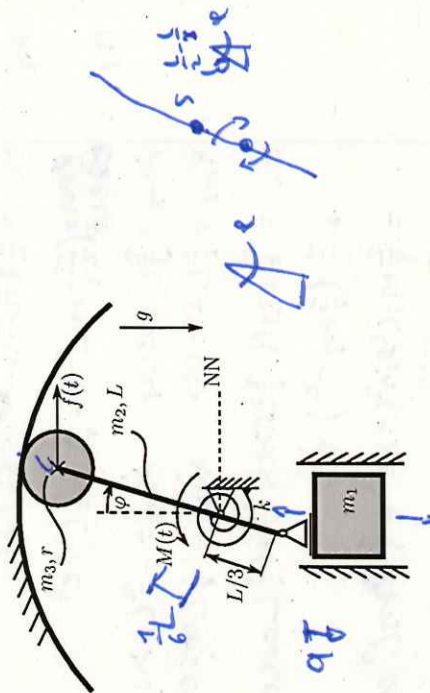
Strukturmechanik Prüfung H2019 Teil 2: Rechenaufgaben

Nachname, Vorname: Köhler Franz
Matrikelnummer: 356087
Studiengang: CR

- Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen oder bereits berechneten Größen auszudrücken!
- Benutzen Sie den zur Verfügung stehenden Platz und ggf. die Rückseite für Ihre Rechnungen.
- Bitte tragen Sie das Endergebnis in die Kästchen ein oder markieren Sie es eindeutig.

Aufgabe 1 (24 Punkte)

Das skizzierte System besteht aus einer Masse m_1 , die mit einem homogenen Stab (Masse m_2 , Länge L) verbunden ist. Die Masse m_1 bewegt sich reibungsfrei in der vertikalen Lagerung. Die Verbindung des Stabes mit der Punktmasse ist in horizontaler Richtung frei beweglich. Der Stab ist mit einer Drehfeder der Steifigkeit k und am oberen Ende mit einer dünnen Scheibe (Masse m_3 , Radius r) verbunden. Die Scheibe rollt auf einer Kreisbahn ohne zu rutschen. Es wirkt das Schwerfeld g . Die Drehfeder ist für $\varphi = 0$ entspannt. Die Kraft $f(t)$ wirkt immer horizontal, das Moment $M(t)$ wirkt um das Festlager im Nullniveau. Hinweis: Das Trägheitsmoment einer Scheibe mit Masse M und Radius R bezüglich des Schwerpunktes ist $\frac{1}{2}MR^2$. Das Trägheitsmoment eines Stabes mit Masse M und Länge L bezüglich des Schwerpunktes ist $\frac{1}{12}ML^2$. Gegeben: $m_1, m_2, m_3, k, L, r, f(t), M(t), g$



- a) Stellen Sie die kinetische und potentielle Energie des Gesamtsystems bezüglich des gegebenen Nullniveaus in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$ auf.

$$E_p = \frac{1}{2} k \varphi^2 + m_1 g \cdot h + m_2 g \cdot h + m_3 g \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} k \varphi^2 + m_1 g \left(\frac{L}{3} \cdot \cos(\varphi) \right) + m_2 g \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) \cos(\varphi) + m_3 g \frac{L}{3} \cos(\varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_{m_2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_{m_3} \dot{\varphi}^2$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} \rightarrow \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}} = 1$$



~~Bestimmen Sie~~

Stoß

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 + \frac{1}{2} m_5 v_5^2$$

$$\dot{x}_{m1} = \frac{1}{2} L \cos(\varphi) \quad \dot{x}_{m2} = -\frac{1}{2} L \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$m_1 : E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 + \frac{1}{2} m_5 v_5^2$$

$$m_2 : E_k = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 + \frac{1}{2} m_5 v_5^2$$

$$m_3 : E_k = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 + \frac{1}{2} m_5 v_5^2$$

$$\dot{x}_{m3} = \frac{1}{2} L \cos(\varphi) \quad \dot{x}_{m4} = -\frac{1}{2} L \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 + \frac{1}{2} m_5 v_5^2 + \frac{1}{2} m_6 v_6^2 + \frac{1}{2} m_7 v_7^2 + \frac{1}{2} m_8 v_8^2 + \frac{1}{2} m_9 v_9^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 + \frac{1}{2} m_5 v_5^2 + \frac{1}{2} m_6 v_6^2 + \frac{1}{2} m_7 v_7^2 + \frac{1}{2} m_8 v_8^2 + \frac{1}{2} m_9 v_9^2$$

$$E_p = q L \cos(\varphi) \left(\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 + \frac{1}{2} m_4 + \frac{1}{2} m_5 + \frac{1}{2} m_6 + \frac{1}{2} m_7 + \frac{1}{2} m_8 + \frac{1}{2} m_9 \right)$$

[5]



b) Bestimmen Sie die nichtkonservativen Kräfte und Momente Q_k^* in Abhängigkeit von φ und ψ .

$$Q_k^* = f_k(t) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{2} L \cos(\varphi) \right) + f_k(t) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{2} L \sin(\psi) \right)$$

$$= f_k(t) \left(\frac{1}{2} L \sin(\varphi) \right) + f_k(t) \left(\frac{1}{2} L \cos(\psi) \right)$$

$$Q_k^* =$$

[2]

c) Die kinetische und potentielle Energie eines anderen Systems mit den verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q} = [x \ y]^T$ ergibt sich zu

$$E_k = \left(\frac{1}{24} m R^2 + \frac{1}{4} M x^2 \right) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad \text{und} \quad E_p = -\frac{1}{2} M R g \cos(y) + m x g \sin(y)$$

Die nichtkonservativen Kräfte sind $Q_k^* = Q_k^* = 0$. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten. Gegeben: m, M, R, g

$$Q_k^* = x \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial x} \right) = \frac{d}{dt} (M \dot{x}) = M \ddot{x}$$

~~Bestimmen Sie~~

9a: x

$$\frac{\partial E_k}{\partial x} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = M g \sin(\gamma)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \right) \dot{x}$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \ddot{x} + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \ddot{x} + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} M g \sin(\gamma) + M x g \cos(\gamma)$$

$$M \ddot{x} - \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + M g \sin(\gamma) = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \right) \ddot{x} + \frac{1}{2} M x \ddot{x} + \frac{1}{2} M g \sin(\gamma) + M x g \cos(\gamma) = 0$$

[6]

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

d) Ein verändertes Zwei-Freiheitsgrad-System wird über die Bewegungsgleichungen

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} (k \cos y + k_c) x + k_c y - k_c - k \\ k \sin y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \underline{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \dot{\underline{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

beschrieben. Bestimmen Sie durch Linearisieren um die Ruhelage $\underline{q}_0 = [1 \ 0]^T$ die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ und die Matrix der zirkulatorischen Kräfte $\underline{N}$. $\underline{q}_0 = 0$

Gegeben: k, k_c

Ta: Lorentzkraft um stabile Ruhelage

$$M(\underline{q}_0) \Delta \ddot{\underline{q}} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{q}} \bigg|_{\underline{q}_0} \Delta \underline{q} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \dot{\underline{q}}} \bigg|_{\underline{q}_0} \Delta \dot{\underline{q}} = \underline{F}(\underline{q}) = 0$$

$$M(\underline{q}_0) \Delta \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} k \cos(\gamma) + k_c & -k \sin(\gamma) + k_c \\ 0 & k \cos(\gamma) \end{bmatrix} \Delta \underline{q} + \begin{bmatrix} \dot{\underline{q}}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \dot{\underline{q}} = 0$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \dot{\underline{q}}$$

$$= M(\underline{q}_0) \Delta \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \dot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} k \cos(\gamma) + k_c & -k \sin(\gamma) + k_c \\ 0 & k \end{bmatrix} \Delta \underline{q} = 0$$

$$x + \gamma = k c \quad x = \frac{1}{2} k c$$

$$x - \gamma = 0 \quad \gamma = \frac{1}{2} k c$$

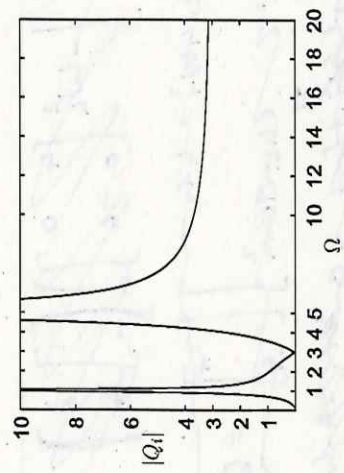
[4]

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} k + k_c & \frac{1}{2} k c \\ \frac{1}{2} k c & k \end{bmatrix} \quad \underline{N} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} k c \\ -\frac{1}{2} k c & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Untersucht werden Zwei-Freiheitsgrad-Systeme.

- a) Die Abbildung zeigt den Amplituden-Frequenzgang einer verallgemeinerten Koordinate des ungedämpften Systems unter harmonischer Anregung. Vervollständigen Sie den Amplituden-Frequenzgang $Q_1(\Omega)$, indem Sie die Kästchen ausfüllen.



$$Q_1(\Omega) = \frac{3\Omega^4 - 17\Omega^2}{(\Omega^2 - 7)(\Omega^2 - 15)}$$

$\omega_1 = 7 \quad \omega_2 = 5 \rightarrow \text{Nenner: } (\Omega^2 - 7)(\Omega^2 - 5^2)$
 $Q(\Omega \rightarrow \infty) = 3 \rightarrow \text{Gleiches Zähler, Nennergrad: } \Omega^4$
 Nullstellen bei 0 und 3
 $3 \cdot 3 = x \cdot 3^2$
 $6 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$

[3]

- b) Ein verändertes System ist unterkritisch modal gedämpft und eines der komplex-konjugierten Eigenwertpaare lautet $\lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{7}$. Bestimmen Sie die zugehörige ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω und den modalen Dämpfungsgrad D .

$$\omega = 1 \quad \lambda_1 = -\sqrt{-3^2 + 7^2} = \sqrt{9+7} = 4$$

$$D = 3$$

$$D = \frac{3}{4}$$

$\omega =$
 $D =$

[3]

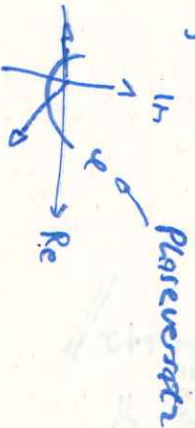


- c) Für ein anderes System ohne Kreiskräfte ergibt sich der Eigenvektor der ersten Mode zu

$$\underline{\varphi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie für eine harmonische Bewegung rein in der ersten Mode den Phasenwinkel ψ zwischen den verallgemeinerten Koordinaten. Es gilt $\omega_1 \neq \omega_2$. Ist das System modal gedämpft?

$$q_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} m_1(t)$$



$$\psi = \frac{3}{4}\pi$$

$$\psi = \frac{3}{4}\pi$$

modal gedämpft?

☐ Ja

☒ Nein

?

[1]

[2]



- d) Die ungedämpften Eigenkreisfrequenzen eines veränderten Zwei-Freiheitsgrad-System sind $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = 2$. Die Matrix der zugehörigen Eigenvektoren ist $\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Die Vektoren wurden so normiert, dass der erste Eintrag gleich 1 ist. Die zugehörige modale Massenmatrix ist $\underline{M} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ des Systems, ausgedrückt in den ursprünglichen physikalischen Koordinaten.

$$\underline{K} = \underline{M} \underline{\omega}^2 \underline{\Phi}^{-1}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{0}$$

$$\underline{K} = \underline{M} \underline{\omega}^2 \underline{\Phi}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{0}$$

$$\underline{K} = \underline{M} \underline{\omega}^2 \underline{\Phi}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{0}$$

$$\underline{K} = \underline{M} \underline{\omega}^2 \underline{\Phi}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{0}$$

$$\underline{K} = \underline{M} \underline{\omega}^2 \underline{\Phi}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{0}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{h} &= (\underline{\Phi}^{-T})^T \underline{K} \underline{\Phi}^{-1} \quad \text{Faktor in der Lösung?} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{+16} \\
 &= \begin{bmatrix} -4 & 16 \\ 4 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Upside ist ja} \\ \text{eigentlich} \\ 64, \text{ nicht } 16! \end{array} \\
 &= \begin{bmatrix} -12 & 20 \\ 20 & -12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 8 & 20 \\ 16 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\underline{K} =$
[5]

Aufgabe 4 (7 Punkte)

An einem Mehr-Freiheitsgrad-System wurde eine lineare Modalanalyse durchgeführt. Die Eigenkreisfrequenzen und modalen Dämpfungsgrade von zwei Moden konnten experimentell extrahiert werden:

$$\omega_n = 1, D_n = \frac{1}{2}; \quad \omega_m = 2, D_m = \frac{1}{2}.$$

Für eine Simulation soll die Systemdämpfung mithilfe der Rayleigh-Dämpfung $\underline{D} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}$ abgeschätzt werden.

- a) Bestimmen Sie die Koeffizienten α und β .

$$\begin{aligned}
 D_n &= \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta}{2} \omega_n = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} \\
 D_m &= \frac{\alpha}{2\omega_m} + \frac{\beta}{2} \omega_m = \frac{1}{4} \alpha + \beta = \frac{1}{2} \\
 \alpha &= 1 - \beta \\
 \frac{1}{4} - \beta \cdot \frac{1}{4} + \beta &= \frac{1}{2} \\
 -\frac{1}{4} &= -\frac{3}{4} \beta \\
 \frac{1}{3} &= \beta; \quad \alpha = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$\alpha =$
 $\beta =$
[3]

- b) Bei diesem Modellierungssatz ist der Dämpfungsgrad frequenzabhängig. Bestimmen Sie den minimalen Dämpfungsgrad.
Gegeben: α, β

$$D = \frac{\alpha}{2\omega^2} + \frac{\beta}{2}\omega^2 \quad \frac{\alpha}{2}\omega^{-2}$$

Minimum mit Ableitung

$$\frac{dD}{d\omega} = -\frac{\alpha}{2\omega^3} + \frac{\beta}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\alpha}{\omega^3} = \beta \quad = \beta$$

$$\pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad = \omega_{\min}$$

$$D_{\min} \text{ bei } \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$= \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$= \frac{\alpha}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\underline{\underline{\omega_{\min} = \sqrt{\alpha\beta}}}$$

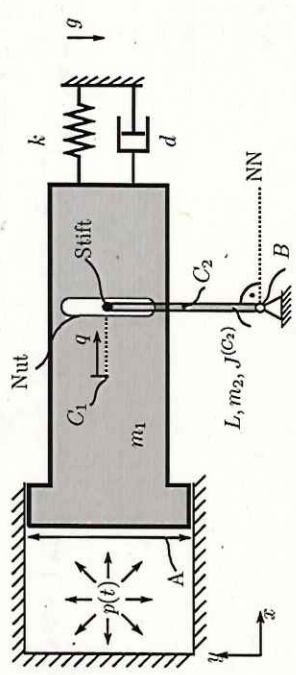
$D_{\min} =$

[4]

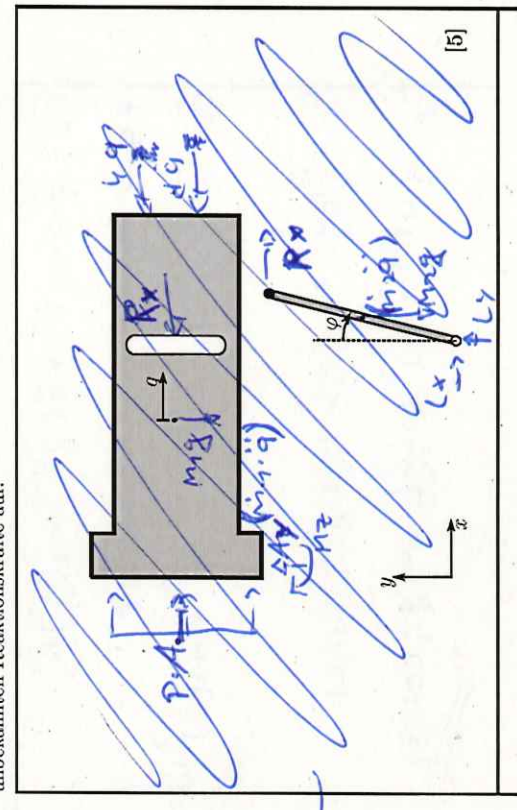
Aufgabe 1 (21 Punkte)

Ein Kolben (Masse m_1 , Schwerpunkt C_1) ist mit einer Feder k und einem Dämpfer d an die Umgebung gekoppelt. Der Kolben kann sich reibungsfrei in einem Zylinder mit Querschnittsfläche A bewegen in dem ein zeitlich veränderlicher Druck $p(t)$ wirkt. Der Kolben ist über eine Nut und einen Stift mit einem homogenen Stab (L änge L , Masse m_2 , Trägheitsmoment $J(C_2)$ bezüglich des Schwerpunkts C_2) verbunden. Der Stift läuft reibungsfrei in der Nut. Für $q = 0$ ist die Feder entspannt. Es wirkt die Erdbeschleunigung g .

Gegeben: $m_1, m_2, J(C_2), d, k, p(t), A, L, g$



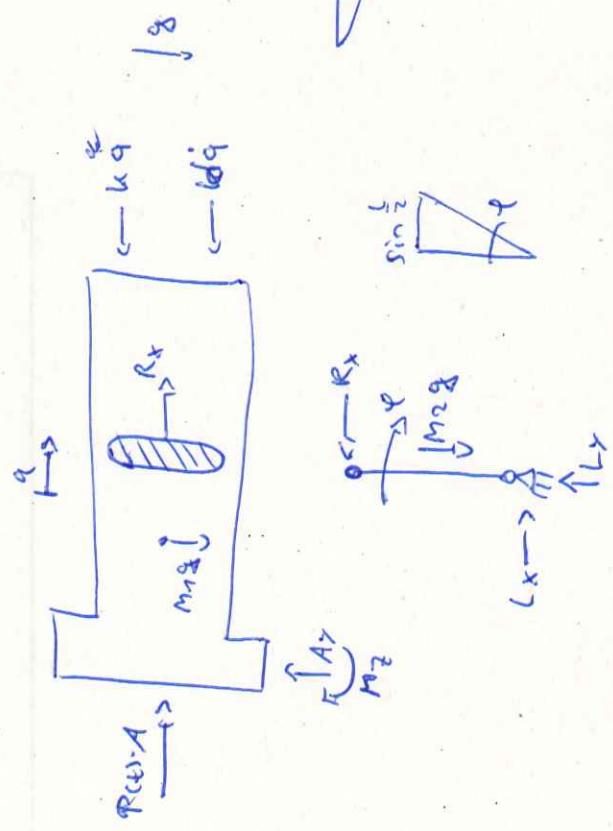
- Vervollständigen Sie das Freischnittbild. Stellen Sie den Impulssatz für den Kolben in x -Richtung und den Drallsatz für den Stab um den Lagerpunkt B in Abhängigkeit von $q, \dot{q}$, der gegebenen Größen sowie der unbekannten Reaktionskräfte auf.



Strukturmechanik Prüfung F2019 Teil 2: Rechenaufgaben

Nachname, Vorname: Köller, Peter
Matrikelnummer: 580589
Studiengang: FT

- Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen oder bereits berechneten Größen auszudrücken!
- Benutzen Sie den zur Verfügung stehenden Platz und ggf. die Rückseite für Ihre Rechnungen.
- Bitte tragen Sie das Endergebnis in die Kästchen ein oder markieren Sie es eindeutig.





$$m_1 \ddot{x} = F(t) + R_x - kx - d\dot{x}$$

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$$

$$m_1 \ddot{x} = F(t) + R_x - kx - d\dot{x}$$

$$\left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \ddot{x} = m_2 g \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\epsilon) - R_x \cos(\epsilon)$$

Impulssatz:

Drallsatz:

[3]

b) Stellen Sie die kinetische und potentielle Energie des Gesamtsystems in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$ auf.

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_2 + m_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2$$

$$E_p = L \sin(\epsilon) \dot{\varphi} = L \cos(\epsilon) \dot{\varphi}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{\varphi}^2 \cos^2(\epsilon) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_2 + m_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k L^2 + m_1 g L + m_2 g \cdot \frac{1}{2} \cos(\epsilon)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k L^2 \sin^2(\epsilon) + m_1 g L + m_2 g \frac{1}{2} \cos(\epsilon)$$

$$E_k =$$

[3]

$$E_p =$$

[4]

c) Für ein leicht verändertes System ist der folgende Impuls- und Drallsatz mit der unbekannten Reaktionskraft R sowie die kinematische Zwangsbedingung $q = -L \cos \varphi$ gegeben:

$$3m_1 \ddot{q} = R - kq + f(t) - d\dot{q}$$

$$(J_1 + 4m_2 L^2) \ddot{\varphi} = R \frac{L}{2} \sin \varphi - m_2 g L \cos \varphi$$

Ermitteln Sie die Bewegungsgleichung des Systems in der Form $a(\varphi) \ddot{\varphi} + h(\varphi, \dot{\varphi}, t) = 0$.
Zusätzlich gegeben: $f(t)$

$$q = -L \cos(\varphi); \quad \dot{q} = L \sin(\varphi) \dot{\varphi}; \quad \ddot{q} = L \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + L \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{q} = L \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + L \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{q}$$

$$3m_1 \ddot{q} = R - kq + f(t) - d\dot{q}$$

$$3m_1 (L \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + L \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2) = R - k(-L \cos(\varphi)) + f(t) - d(L \sin(\varphi) \dot{\varphi})$$

$$3m_1 L \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + 3m_1 L \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 = R - kL \cos(\varphi) + f(t) - dL \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$3m_1 L \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + 3m_1 L \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 = R - kL \cos(\varphi) + f(t) - dL \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$3m_1 L \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + 3m_1 L \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 = R - kL \cos(\varphi) + f(t) - dL \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$R = 3m_1 L \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + 3m_1 L \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + kL \cos(\varphi) - f(t) + dL \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$R = 3m_1 L \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + 3m_1 L \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + kL \cos(\varphi) - f(t) + dL \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} (J_1 + 4m_2 L^2) \ddot{\varphi} &= (3m_1 L \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + L \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2) - \\ &- kL \cos(\varphi) - f(t) + dL \sin(\varphi) \dot{\varphi} + \frac{1}{2} L \sin(\varphi) - m_2 g L \cos(\varphi) \\ &= \frac{3m_1 L^2}{2} \cos(\varphi) \ddot{\varphi} \sin(\varphi) + \frac{3m_1 L^2}{2} \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 - \frac{kL^2}{2} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ &- \frac{1}{2} f(t) \sin(\varphi) + \frac{dL^2}{2} \sin^2(\varphi) \dot{\varphi} - m_2 g L \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$q(\varphi) = (J_1 + 4m_2 L^2 - \frac{3m_1 L^2}{2} \sin^2(\varphi))$$

$$\begin{aligned} h(\varphi, \dot{\varphi}, t) &= \frac{3m_1 L^2}{2} \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + \frac{kL^2}{2} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ &+ \frac{1}{2} f(t) \sin(\varphi) - \frac{dL^2}{2} \sin^2(\varphi) \dot{\varphi} + m_2 g L \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$a(\varphi) = [3]$$

$$h(\varphi, \dot{\varphi}, t) = [3]$$



Aufgabe 2 (12,5 Punkte)

Untersucht wird ein Ein-Freiliegtrag-System, beschrieben mit der verallgemeinerten Koordinate q .

a) Gegeben ist die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} + \dot{q} - q^2 \sin q = 0.$$

Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen $\Delta q = q - q_0$ um die Ruhelage $q_0 = \pi$. Bestimmen Sie die Stabilität der Eigendynamik des um diese Ruhelage linearisierten Systems und begründen Sie kurz.

$$q_0 = \pi, \quad \dot{q}_0 = 0, \quad \ddot{q}_0 = 0$$

$$M(\pi) \Delta \ddot{q} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \bigg|_{q_0, \dot{q}_0} \Delta \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \bigg|_{q_0, \dot{q}_0} \Delta q = \underline{f(t)}$$

$$\Delta \ddot{q} + 1 \Delta \dot{q} + \frac{1}{2} (2 q_0 \sin q_0 + q_0^2 \cos q_0) \Delta q = 0$$

$$\ddot{q} + \dot{q} + \pi^2 \Delta q = 0$$

$$\Delta \ddot{q} + \Delta \dot{q} + \pi^2 \Delta q = 0$$

$$\text{Stabilität bei } D > 0 \quad D = \frac{1}{2\omega} = \frac{1}{2\pi} < 1$$

$\rightarrow D > 0$ ist gegeben $\rightarrow$ stabil



linearisierte DGL:

[2]

☒ stabil

☐ grenzstabil

☐ instabil

Begründung:

[2]

b) Gegeben ist nun die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} - s\dot{q} + r q = 0$$

mit den Parametern $u, s, r > 0$ und $s < 2\sqrt{ur}$. Das System erfährt die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{q}(0) = v_0 > 0$, wobei $q(0) = 0$. Bestimmen Sie $q(t)$ und skizzieren Sie die Bewegung in der Phasenebene. Markieren Sie die Anfangswerte und die Bewegungsrichtung.

Gegeben: u, s, r, v_0

$$q(t) = e^{-D\omega t} (\alpha \cos(\omega_d t) + \beta \sin(\omega_d t))$$

$$\text{Skizze}$$

$$m\ddot{q} - s\dot{q} + r q = 0$$

$$\ddot{q} - \frac{s}{m}\dot{q} + \frac{r}{m}q = 0 \quad (\text{normalisiert})$$

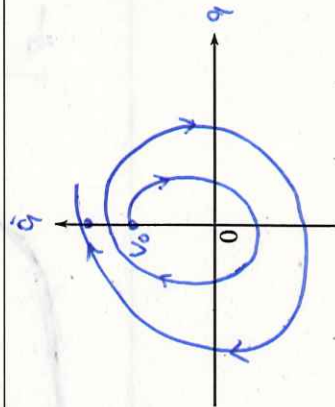
$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m}}, \quad 2D\omega = -\frac{s}{m} \rightarrow D = -\frac{s}{2\omega m} = -\frac{s}{2\sqrt{ur}}$$

$$\omega_d \omega = \sqrt{\omega^2 - D^2 \omega^2} = \sqrt{\frac{r}{m} - \frac{s^2}{4ur}}$$

$\dot{q}(t) = -D\omega e^{-D\omega t} (\alpha \cos(\omega_d t) + \beta \sin(\omega_d t)) + e^{-D\omega t} (-\alpha \sin(\omega_d t)\omega_d + \beta \cos(\omega_d t)\omega_d)$
 $\dot{q}(0) = \alpha + \beta\omega_d = v_0 \rightarrow \beta = \frac{v_0}{\omega_d}$
 $q(0) = \alpha = 0$
 $q(t) = e^{\frac{t}{2\sqrt{5}}} \sqrt{5} t \frac{v_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t)$
 $= e^{\frac{t}{2\sqrt{5}}} \sqrt{5} \frac{v_0}{\sqrt{5} - \frac{5}{4\omega^2}} \sin(\omega \sqrt{5 - \frac{5}{4\omega^2}} t)$
 $= e^{\frac{5}{20} t} \frac{v_0}{\omega_d} \sin(\sqrt{5 - \frac{5}{4\omega^2}} t) \quad D < 0$

$q(t) =$

[6,5]



[2]

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben ist die Übertragungsfunktion H eines schwach gedämpften Ein-Freilheitsgrad-Systems in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz Ω ,

$$H(\Omega) = \frac{p}{-a\Omega^2 + i2\omega\Omega b + a\omega^2}$$

Die Konstanten p, a, b seien reell und positiv und die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ist gegeben mit ω .

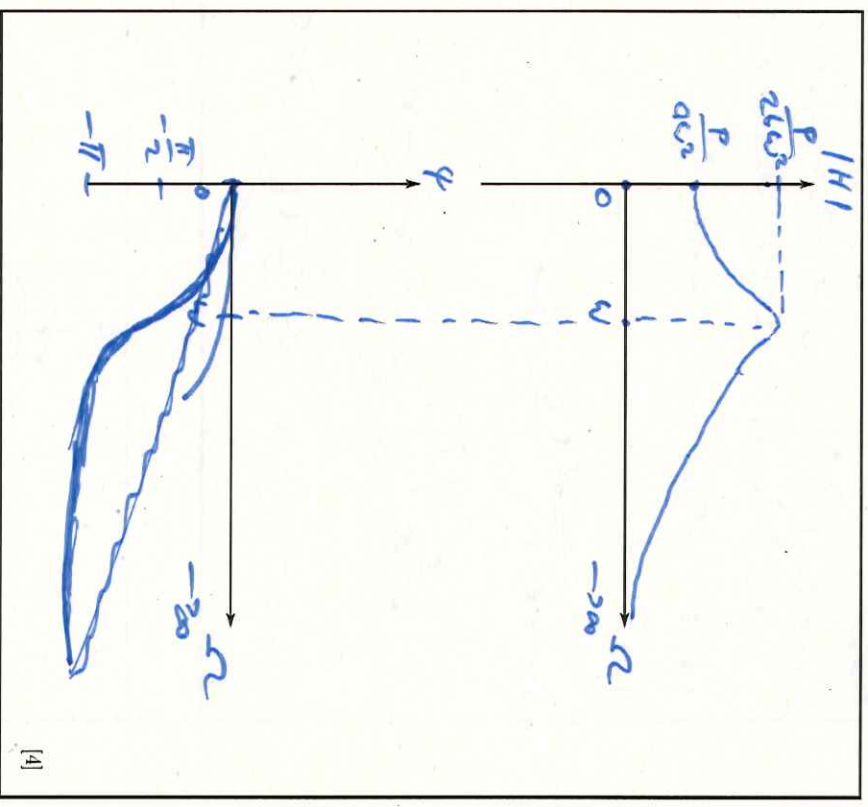
Verwenden Sie den Zusammenhang $H = |H|e^{i\psi}$.

Gegeben: p, a, b, ω

- a) Bestimmen Sie den Betrag $|H|$ und den Phasenwinkel ψ der Übertragungsfunktion für $\Omega = \omega$, $\Omega = 0$ und $\Omega \rightarrow \infty$.

$|H|(\Omega=\omega) = \frac{p}{-a\omega^2 + i2\omega\omega b + a\omega^2} = \frac{p}{-a\omega^2 + i2a\omega^2 b + a\omega^2} = \frac{p}{i2a\omega^2 b}$
 $= \frac{p}{2a\omega^2 b}$
 $-0.5(2i\omega^2 b) = -\frac{\pi}{2} = \psi$
 $|H|(\Omega=0) = \frac{p}{a\omega^2} = 1 \quad \psi = 0$
 $|H|(\Omega \rightarrow \infty) = 0 \quad \psi = \pi$

b) Skizzieren Sie den Betrag und den Phasenwinkel der Übertragungsfunktion in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz Ω . Beschriften Sie die in a) berechneten Punkte.



[4]

$\Omega \rightarrow \infty$

$$|H(\Omega \rightarrow \infty)| = \left| \frac{P}{a\Omega} \right| = 0$$

max ($-a\Omega^2$ überwiegt)

$$\arg(-a\Omega^2) = -\pi = \varphi$$

$$|H(\Omega = \omega)| =$$

$$\psi(\Omega = \omega) =$$

[2]

$$|H(\Omega = 0)| =$$

$$\psi(\Omega = 0) =$$

[2]

$$|H(\Omega \rightarrow \infty)| =$$

$$\psi(\Omega \rightarrow \infty) =$$

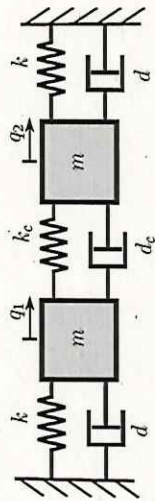
[2]

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Untersucht wird ein Zwei-Freiheitsgrad-System.

- a) Die Massen m und die Steifigkeiten k und k_c des zu untersuchenden Systems sind bekannt. Es wird angenommen, dass die Dämpfung als Rayleigh-Dämpfung modelliert werden kann, wobei α und β als bekannt vorausgesetzt werden. Wie groß sind die Dämpferkonstanten d und d_c ?

Gegeben: m, k, k_c, α, β



$$\vec{D} = \alpha \vec{H} + \beta \vec{K}$$

~~$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X$$~~

$$\begin{bmatrix} d+d_c & -d_c \\ -d_c & d+d_c \end{bmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} + \beta \begin{bmatrix} h+h_c & -h_c \\ -h_c & h+h_c \end{bmatrix}$$

$$d+d_e = \alpha n + \beta_h + \beta_{ke}$$

$$-d_c = -\beta_{kc} \rightarrow \cancel{\beta_{kc}} d_c = \beta_{kc} //$$

$$p = \alpha m + \beta k$$

$d = p$

$$d_r =$$

[7]

- b) Die Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{K}}$ eines veränderten Systems und die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_1 mit dem zugehörigen Eigenvektor φ , sind gegeben mit

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3}{10}}, \quad \underline{\underline{\varphi}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie den massennormierten Eigenvektor $\hat{\varphi}_1$.

$$z_1 = \sqrt{\frac{z_1}{z_1}}$$

$$u_{\ell-1} = \omega_{\ell-1}^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

$$3 = \frac{1}{10} \sqrt{14} [14] \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$3\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$u = 100$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

11

[4]

Strukturdynamik Prüfung H2018

Teil 2: Rechenaufgaben

 Nachname, Vorname: Lecker, Tim

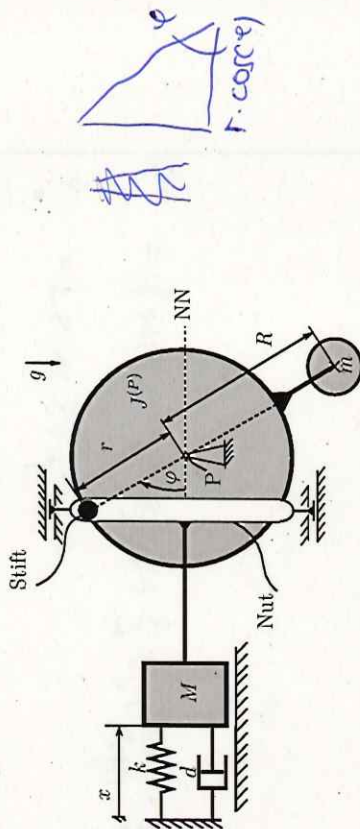
 Matrikelnummer: 756649

 Studiengang: LPT

- Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen oder bereits berechneten Größen auszudrücken!
- Benutzen Sie den zur Verfügung stehenden Platz und ggf. die Rückseite für Ihre Rechnungen.
- Bitte tragen Sie das Endergebnis in die Kästchen ein oder markieren Sie es eindeutig.

Aufgabe 1 (19 Punkte)

Untersucht wird ein System, das aus zwei Punktmassen M und m , einer Scheibe mit Trägheitsmoment $J(P)$ und einem Feder-Dämpfer-Element (Dämpferkonstante d , Federsteifigkeit k) besteht. Dreht sich die Scheibe, bewegt sich der mit ihr verbundene Stift in der Nut und verschiebt die Nut horizontal, wie abgebildet. Die Nut ist starr mit der linken Masse M gekoppelt. Es wirkt die Erdbeschleunigung g , die Koppellemente sind masselos und das System ist reibungsfrei. Die Feder ist für $x = 0$ entspannt. Für $\varphi = 0$ gilt $x = 0$.
 Gegeben: $r, R, M, m, k, d, g, J(P)$



a) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen x und φ her.

$$x = R \sin(\varphi)$$

$$r - r \cos(\varphi)$$

$$x = r(1 - \cos(\varphi))$$

[2]



- b) Stellen Sie die kinetische Energie E_k des Gesamtsystems in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate $q = \varphi$ auf.
Wenn Sie Aufgabe a) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $x = r(1 + \sin \varphi)$ weiter.

$$E_k = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2) + \frac{1}{2} J^{(P)} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$J_{zz}^{(P)} = J_{zz}^{(M)} + m R^2$$

$$\dot{x} = r \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$E_k = \frac{1}{2} M (r^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \left(J_{zz}^{(P)} + \frac{3}{2} m R^2 \right)$$

 $E_k =$

$$\frac{1}{2} M r^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \left(J_{zz}^{(P)} + \frac{3}{2} m R^2 \right)$$

[4]

- c) Stellen Sie die potentielle Energie E_p des Gesamtsystems in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate $q = \varphi$ auf.

$$E_p = \frac{1}{2} k \Delta l^2 + m \cdot g \cdot h$$

$$\Delta l = r(1 - \cos(\varphi))$$

$$h = R \cdot \sin(\varphi)$$



- d) Bestimmen Sie die nichtkonservativen Kräfte bzgl. der verallgemeinerten Koordinate $q = \varphi$.

$$E_p = \frac{1}{2} k r^2 (1 - \cos^2(\varphi)) - m g R \sin(\varphi)$$

[3]

$$Q_\varphi^{\text{nk}} = -d \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$= -d \sin(\varphi) \dot{\varphi} \frac{\partial \sin(\varphi) \dot{\varphi}}{\partial \varphi \dot{\varphi}}$$

$$= -d \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$Q_\varphi^{\text{nk}} = -d r^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}$$

[3]

e) Gegeben sind die kinetische und potentielle Energie eines leicht abgeänderten Systems

$$E_k = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, E_p = mgR(1 + \sin \varphi) + \frac{1}{2} k r^2 (1 - \sin \varphi),$$

sowie $Q_\varphi^{ik} = F \dot{\varphi} \cos^2 \varphi$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die verallgemeinerte Koordinate $q = \varphi$ mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art auf.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi + J \dot{\varphi} \right) \\ &= \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\varphi} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi} \cos \varphi (-2 \sin \varphi) + J \ddot{\varphi} \\ \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} &= -\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} &= mgR \cos \varphi - \frac{1}{2} k r^2 \cos \varphi \\ \text{Einsetzen in:} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} &= Q_\varphi^{ik} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\varphi} \cos^2 \varphi + J \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} k r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + mgR \cos \varphi - \frac{1}{2} k r^2 \cos \varphi &= 0 \end{aligned}$$

[5]

f) Gegeben ist die Bewegungsgleichung eines leicht abgeänderten Systems

$$\frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - m r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + mgR \cos \varphi - k r^2 (1 + \cos \varphi) - d \dot{\varphi} \cos \varphi = 0.$$

Bestimmen Sie die Ruhelage φ_0 des Systems wobei gilt $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$ und $mgR \geq 2kr^2$.

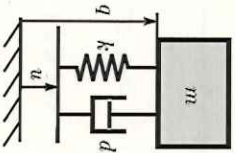
$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = 0, \ddot{\varphi} = 0 \\ mgR \cos(\varphi_0) - k r^2 (-1 + \cos \varphi_0) &= 0 \\ mgR \cos(\varphi_0) - k r^2 \cos(\varphi_0) - k r^2 &= 0 \\ \cos(\varphi_0) (mgR - k r^2) - k r^2 &= 0 \\ \cos(\varphi_0) &= \frac{k r^2}{mgR - k r^2} \\ \varphi_0 &= \arccos \left(\frac{k r^2}{mgR - k r^2} \right) \end{aligned}$$

$\varphi_0 =$

[2]

Aufgabe 2 (14 Punkte)

Die Bewegung des abgebildeten Einmassenschwingers und die Bewegung des Feder- und Dämpferfußpunkts werden mit den Koordinaten q bzw. u beschrieben. Die Erdbeschleunigung wird vernachlässigt.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung (BGL) auf.

Wie groß ist die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_d ?

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $H(\Omega) = \frac{Q}{U}$ mit $q(t) = \frac{Q}{2} e^{i\Omega t} + c.c.$ und

$$u(t) = U \frac{e^{i\Omega t}}{2} + c.c.$$

Gegeben: m, k, d, Ω

Impulsatz:

$$m(\ddot{q}) = -k(q - u) - d(\dot{q} - \dot{u})$$

$$m\ddot{q} + d\dot{q} + kq = -d\dot{u} - ku$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \delta^2}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \delta = \frac{d}{2\sqrt{mk}}$$

$$q(t) = \frac{1}{2} Q e^{i\Omega t} + c.c., \quad \dot{q} = \frac{1}{2} i \Omega Q e^{i\Omega t} + c.c., \quad \ddot{q} = -\frac{1}{2} \Omega^2 Q e^{i\Omega t} + c.c.$$

Einsetzen in BGL:

$$-\frac{1}{2} m \Omega^2 Q e^{i\Omega t} + c.c. = \frac{1}{2} d i \Omega Q e^{i\Omega t} + c.c. - \frac{1}{2} k U e^{i\Omega t} + c.c.$$

$$Q(-\frac{1}{2} m \Omega^2 + \frac{1}{2} d i \Omega + \frac{1}{2} k) = U(-\frac{1}{2} d i \Omega - \frac{1}{2} k)$$

$$\frac{Q}{U} = \left(\frac{-\frac{1}{2} m \Omega^2 + \frac{1}{2} d i \Omega + \frac{1}{2} k}{-\frac{1}{2} d i \Omega - \frac{1}{2} k} \right)^{-1}$$

$$\frac{Q}{U} = \frac{d i \Omega + k}{-m \Omega^2 + d i \Omega + k} \quad (VZ \frac{1}{2})$$

BGL:	[2]
$\omega_d =$	[2]
$H(\Omega) =$	[2]

- b) Für ein anderes System mit veränderter Anregung ist die Vergrößerungsfunktion gegeben mit

$$V(\Omega) = \left| \frac{i z \Omega}{-\Omega^2 + i 2 D \omega \Omega + \omega^2} \right|$$

Bestimmen Sie den Dämpfungsgrad D , sodass die Vergrößerung $V(\Omega = \omega) < 1$ ist.

Gegeben: $\omega, z > 0$

$$V(\Omega = \omega) = \left| \frac{i z \omega}{-\omega^2 + i 2 D \omega^2 + \omega^2} \right|$$

$$= \left| \frac{i z}{\omega(-1 + i 2 D + 1)} \right|$$

$$= \left| \frac{z}{2 D \omega} \right| < 1$$

$$\frac{z}{2 \omega} < 2 D$$

$$D > \frac{z}{2 \omega}$$

[2]

- c) Die Bewegung der ungedämpften Masse ist nun $q(t) = \operatorname{Re}\{i z e^{i \omega t}\}$. Wie groß sind $q(0)$ und $\dot{q}(0)$? Zu welcher Zeit t^* ist die Geschwindigkeit der Masse erstmalig $\dot{q}(t^*) = 0$?
Gegeben: $\omega, z \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Re}\{i z e^{i \omega t}\} = z \cos(\omega t)$$

$$q(0) = \operatorname{Re}\{i z\} = 0$$

$$\dot{q}(t) = \operatorname{Re}\{-z \omega e^{i \omega t}\}$$

$$\dot{q}(0) = \operatorname{Re}\{-z \omega\} = -z \omega$$

$$\dot{q}(t^*) = 0 = \operatorname{Re}\{-z \omega e^{i \omega t^*}\}$$

$$0 \text{ für } \operatorname{Re}\{e^{i \omega t^*}\} = +1 \text{ oder } -1$$

$$\operatorname{Re}\{\cos(\omega t^*) + i \sin(\omega t^*)\} = 1 \Rightarrow \cos(\omega t^*) = 1$$

$$\cos(\omega t^*) = 1$$

$$t^* = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = -z \omega$$

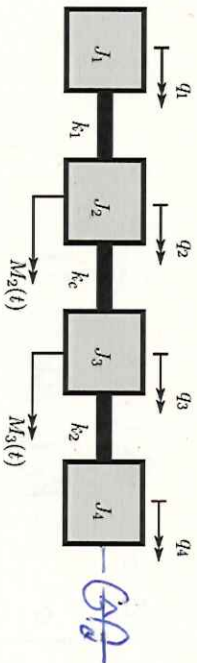
[3]

$$t^* = \frac{2\pi}{\omega}$$

[3]

Aufgabe 3 (18 Punkte)

Das skizzierte System ist ein Wellenstrang auf dem vier starre Drehmassen mit Trägheitsmoment J_i sitzen. Die Wellenabschnitte zwischen zwei Drehmassen werden mit masselosen Drehfedern der Steifigkeit k_1, k_e und k_2 modelliert. Die verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$ beschreiben die Drehbewegung der Drehmassen. Es wirken die Momente $M_2(t)$ und $M_3(t)$.

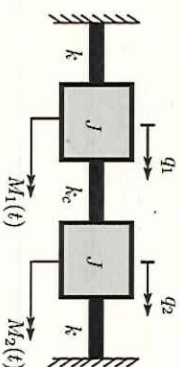


- a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems in Abhängigkeit der Koordinaten $\underline{q}$ in Matrixform auf.
Gegeben: $J_1, J_2, J_3, J_4, k_1, k_e, k_2, M_2(t), M_3(t)$

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 \end{bmatrix} \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_e & -k_e & 0 \\ 0 & -k_e & k_e+k_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \underline{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_2(t) \\ M_3(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{q} =$

- b) Die beiden äußeren Drehmassen werden nun fixiert.



Die Systemmatrizen bezüglich der verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q} = [q_1 \ q_2]^T$ sind gegeben mit

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k+k_e & -k_e \\ -k_e & k+k_e \end{bmatrix}$$

Es wirkt das Moment $\underline{M}(t) = \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix} = \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\Omega t} \right\}$. Gesucht ist das Rückstellmoment in der Drehfeder mit Steifigkeit k_e . Bestimmen Sie den Betrag der Amplitude $|M_e(\Omega)|$ dieses Moments in Abhängigkeit von Ω .
Gegeben: J, k, k_e, M_0, Ω

$$\begin{aligned} |M_e(\Omega)| &= |k_e(\Omega_1 - \Omega_2)| \\ \underline{\underline{S}}(\Omega) &= -\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k+k_e & -k_e \\ -k_e & k+k_e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k+k_e-\Omega^2 & -k_e \\ -k_e & k+k_e-\Omega^2 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{S}}^{-1}(\Omega) &= \frac{1}{(k+k_e-\Omega^2)^2 - (k_e)^2} \begin{bmatrix} k+k_e-\Omega^2 & k_e \\ k_e & k+k_e-\Omega^2 \end{bmatrix} \\ \underline{\underline{Q}} &= \frac{1}{\det \underline{\underline{S}}} \begin{bmatrix} k+k_e-\Omega^2 & k_e \\ k_e & k+k_e-\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$|M_e(\Omega)| = |k_e \left(\frac{1}{\det} (M_1(k+k_e-\Omega^2) + k_e M_2 - k_e M_1 - M_2(k+k_e-\Omega^2)) \right)|$$

$$|M_c(\Omega)| = \frac{k_c}{\det} (m_1(k_1 - \Omega^2) + m_2(k_2 - \Omega^2))$$

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} m_1(k_1 - \Omega^2) & k_c \\ k_c & m_2(k_2 - \Omega^2) \end{pmatrix} \\ & = (m_1(k_1 - \Omega^2)(m_2(k_2 - \Omega^2)) - k_c^2) \\ & = m_1 m_2 (k_1 - \Omega^2)(k_2 - \Omega^2) - k_c^2 \\ & = m_1 m_2 (k_1 k_2 - k_1 \Omega^2 - k_2 \Omega^2 + \Omega^4) - k_c^2 \\ & = m_1 m_2 \Omega^4 - m_1 m_2 (k_1 + k_2) \Omega^2 + m_1 m_2 k_1 k_2 - k_c^2 \end{aligned}$$

$$|M_c(\Omega)| = \frac{k_c m_0}{(k_1 + k_2 - \Omega^2)^2 - k_c^2} (k_1 - \Omega^2) \quad [5]$$



c) Ein verändertes System hat die Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 2J \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix} q = 0$$

Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_1, ω_2 und Eigenvektoren φ_1, φ_2 . Eine Normierung der Vektoren ist nicht notwendig.

$$\det(k - \omega^2 M) \stackrel{!}{=} 0 \quad ; \det \begin{bmatrix} k - \omega^2 J & -k \\ -k & 3k - \omega^2 2J \end{bmatrix} = 0$$

$$(k - \omega^2 J)(3k - 2\omega^2 J) - k^2 = 0$$

$$\frac{2}{9} k^2 - 2k\omega^2 J - 3k\omega^2 J + 2\omega^4 J^2 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{5kJ \pm \sqrt{(5kJ)^2 - 4 \cdot 2J^2 \cdot 2k^2}}{2 \cdot 2J^2}$$

$$= \frac{5kJ \pm \sqrt{25k^2 J^2 - 8k^2 J^2}}{4J^2}$$

$$= \frac{5}{4} \frac{k}{J} \pm \frac{3}{4} \frac{k}{J}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5}{4} \frac{k}{J}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{k}{J}}$$

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\alpha \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\omega_1 =$	$\omega_2 =$	[3]
$\varphi_1 =$	$\varphi_2 =$	[2]

d) Im Folgenden wird ein gedämpftes System betrachtet. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} * & -\frac{3}{2} \\ * & * \end{bmatrix} \dot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} * & -2 \\ -2 & * \end{bmatrix} \underline{q} = \underline{0}.$$

Die Einträge * sind unbekannt, aber verschieden. Die erste ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ist $\omega_1 = 1$ und der zugehörige modale Dämpfungsgrad ist $D_1 = \frac{1}{8}$. Bestimmen Sie die Konstanten α und β der Rayleigh-Dämpfungsmatrix:

$$\underline{D} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K} = \begin{bmatrix} \alpha & -\frac{3}{2}\beta \\ -\frac{3}{2}\beta & \beta \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \frac{5}{8} = \frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{2} \quad \alpha = \frac{5}{8} - \frac{\beta}{2}$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \alpha & -\frac{3}{2}\beta \\ -\frac{3}{2}\beta & \beta \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{5}{8} - \frac{\beta}{2}$$

$$\beta = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Strukturdynamik Prüfung F2018

Teil 2: Rechenaufgaben

 Nachname, Vorname: Keller For

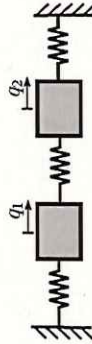
 Matrikelnummer: 150000

 Studiengang: BA

- Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den gegebenen oder bereits berechneten Größen auszudrücken!
- Benutzen Sie den zur Verfügung stehenden Platz und ggf. die Rückseite für Ihre Rechnungen.
- Bitte tragen Sie das Endergebnis in die Kästchen ein oder markieren Sie es eindeutig.

Aufgabe 1 (13,5 Punkte)

Untersucht wird ein Zweimassenschwinger, dessen Bewegung mit den verallgemeinerten Koordinaten $\underline{q} = [q_1 \ q_2]^T$ beschrieben wird.



- a) Die Massen und Steifigkeiten des Systems werden nun so gewählt, dass sich die Eigenkreisfrequenzen ω_1 und ω_2 ergeben sowie die zugehörigen, massennormierten Schwingungsformen $\underline{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\underline{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Das System wird aus der Ruhe mit $\underline{q}(0) = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{20} \end{bmatrix}$ losgelassen. Bestimmen Sie $\underline{q}(t)$.

Gegeben: $\omega_1, \omega_2, \underline{\varphi}_1, \underline{\varphi}_2, q_{10}, q_{20}$

$$\dot{\underline{q}}(0) = \underline{0}$$

$$\underline{q}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t))$$

$$\underline{q}(0) = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{20} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (\alpha_1) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2) = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{20} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2q_{10} - \alpha_2$$

$$q_{10} - \frac{1}{2} \alpha_2 - \frac{1}{2} \alpha_2 = q_{20} \rightarrow \alpha_2 = q_{10} - q_{20}$$

$$\alpha_1 = q_{10} + q_{20}$$

$$\underline{q}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (q_{10} + q_{20}) \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (q_{10} - q_{20}) \cos(\omega_2 t)$$

$$\underline{q}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (q_{10} + q_{20}) \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (q_{10} - q_{20}) \cos(\omega_2 t)$$

$$\underline{q}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (q_{10} + q_{20}) \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (q_{10} - q_{20}) \cos(\omega_2 t)$$

$$\underline{q}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (q_{10} + q_{20}) \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (q_{10} - q_{20}) \cos(\omega_2 t)$$

$$\dot{q}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

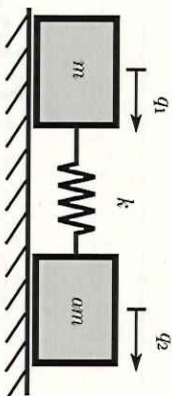
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (\beta_1 \omega_1) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (\beta_2 \omega_2)$$

$$-\beta_1 \omega_1 = \beta_2 \omega_2 \quad \beta_1 = -\frac{\beta_2 \omega_2}{\omega_1}$$

$$\beta_1 \omega_1 = \beta_2 \omega_2 = -\beta_2 \omega_2 \rightarrow \beta_1 = 0$$

$$q(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (q_0 + q_0) \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (q_0 - q_0) \cos(\omega_2 t)$$

- b) Ein anderer Zweimassenschwinger mit den Massen m und am ist mit der Steifigkeit k gekoppelt.



Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen $\omega_1(a)$ und die Schwingungsform q_1 des Systems, wobei $\omega_1 < \omega_2$. Eine Normierung von q_1 ist nicht erforderlich.

Skizzieren Sie die Eigenfrequenzquadrate $\omega_1^2(a)$ und $\omega_2^2(a)$ und bestimmen Sie dazu insbesondere die Werte für $a \rightarrow 0$ und $a \rightarrow \infty$ in Abhängigkeit von m und k .

Gegeben: m, k, a

$$\text{Eigenfrequenzen mit } \det(k - \omega^2 M) = 0$$

$$K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & am \end{bmatrix}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 am \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$(k - \omega^2 m)(k - \omega^2 am) - (-k)^2 = 0$$

$$k^2 - k\omega^2 am - k\omega^2 m + \omega^4 am^2 - k^2 = 0$$

$$k = \omega^2 (-km - kqm)$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(km + kqm) \pm \sqrt{(km - kqm)^2 - 4 \cdot qm^2 \cdot 0}}{2 qm^2}$$

$$= \frac{km(1+q) \pm \sqrt{km^2(1+q)^2}}{2 qm^2}$$

$$\omega_1^2 = 0 \quad \omega_2^2 = \frac{2km(1+q)}{2qm^2} = \frac{k(1+q)}{qm}$$

$$\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(1+q)}{qm}}$$

$$x_1: \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2: \begin{bmatrix} k - \frac{k(1+q)}{qm} & -k \\ -k & k - \frac{k(1+q)}{qm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

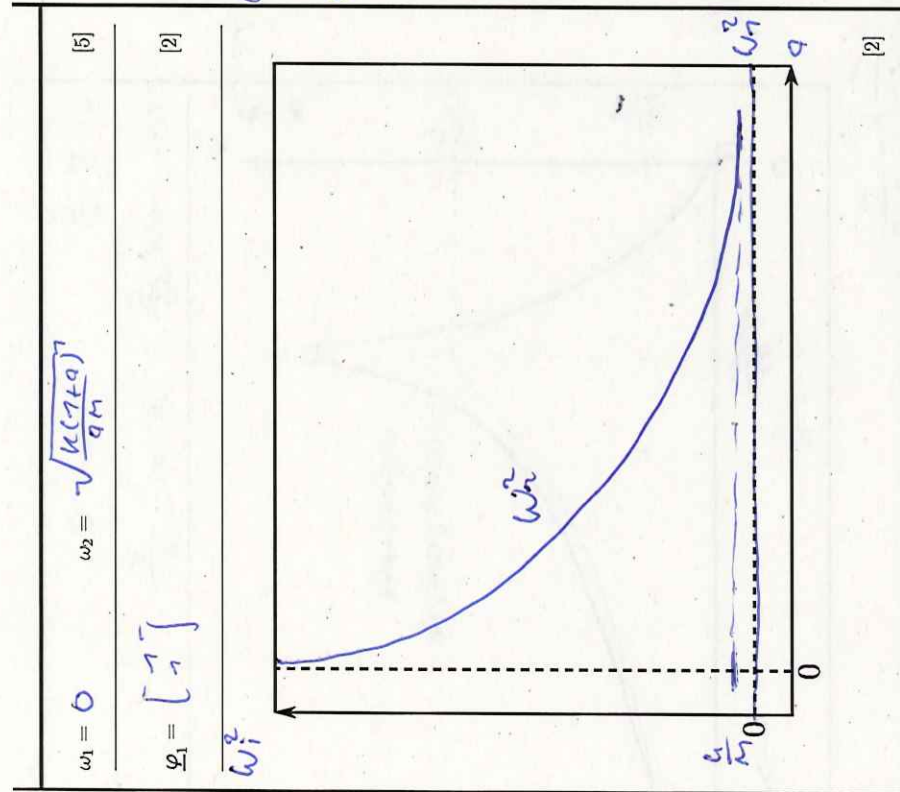
$$\begin{bmatrix} k - \frac{k}{m}(1+q) & -k \\ -k & k - \frac{k}{m}(1+q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1+q}{m} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{1+q}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1+q}{m} & -1 \\ -1 & 1 - \frac{1+q}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = qx_2$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nicht in Aufgabenstellung!



$\omega_2^2 = \frac{k}{m} + \frac{k}{m}$ const

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die verallgemeinerte Koordinate q beschreibt die Bewegung des abgebildeten Einmassenschwingers.



a) Das System wird mit q_0 ausgelenkt und aus der Ruhe losgelassen. Wie groß ist die Amplitude der Schwingung nach fünf Perioden, q_5 , wenn der Dämpfungsgrad D bekannt ist?

Gegeben: q_0, D

$q(t) = \underbrace{1}_{\text{Hüllkurve}} e^{-\frac{D}{2} \omega_D t} \cos(\omega_D t + \psi)$

$\hat{q}_0 = q_0$

$\hat{q}_5 = q_0 e^{-\frac{D}{2} \omega_D t_5}$

$t_5 = \frac{2\pi}{\omega_D} \cdot 5 = 10\pi \frac{2\pi}{\omega_D}$

$\hat{q}_5 = q_0 e^{-\frac{D}{2} \omega_D \cdot 10\pi \frac{2\pi}{\omega_D}}$

$\hat{q}_5 = q_0 e^{-10\pi D}$

$q_5 = q_0 e^{-10\pi D}$

[2]

b) Ein ähnliches System erfährt nun die Anregung über eine Exzentrizität. Damit ergibt sich die Vergrößerungsfunktion

$$V(\Omega) = \left| \frac{\Omega^2}{-2a^2\Omega^2 + 12b\Omega + 50c^2} \right| \quad \text{Frequenzbeziehs}$$

Bestimmen Sie die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω sowie die Werte der Vergrößerungsfunktion für $\Omega = 0$, $\Omega = \omega$ und $\Omega \rightarrow \infty$ in Abhängigkeit von a, b, c .

Skizzieren und bezeichnen Sie die Vergrößerungsfunktion für das leicht gedämpfte und für das ungedämpfte System. Kennzeichnen Sie die zuvor berechneten Werte.

Gegeben: $a, b, c > 0$

Eigenfrequenz = $\sqrt{\frac{\text{Steifigkeit}}{Masse}}$

~~Vergrößerungsfunktion~~ bei Eigenkreisfrequenz wird Vergrößerungsfunktion unendlich

$$-2a^2\Omega^2 + 12b\Omega + 50c^2 = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{50c^2}{-2a^2}} = 5 \frac{c}{a}$$

$$V(\Omega=0) = \left| \frac{0}{50c^2} \right| = 0$$

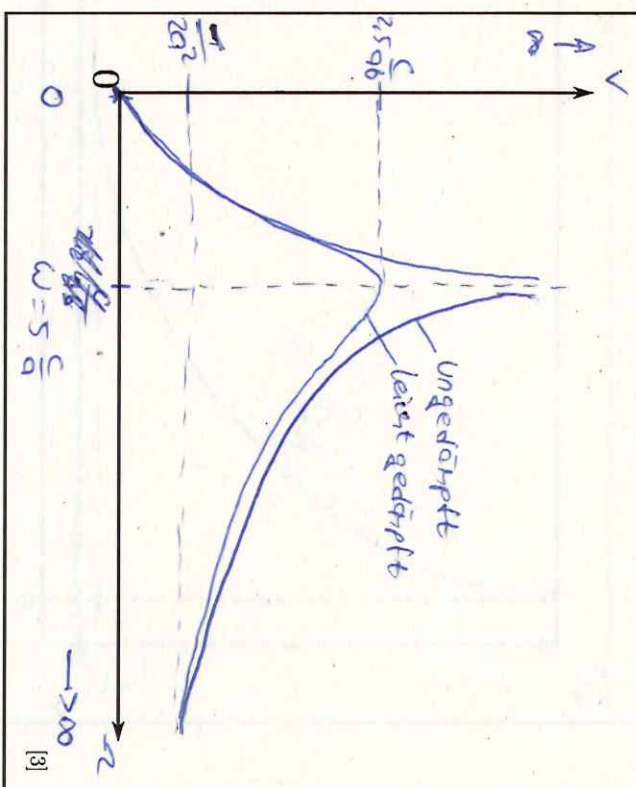
$$V(\Omega=\omega) = \left| \frac{0}{-2a^2\omega^2 + 12b\omega + 50c^2} \right| \quad \text{Steifigkeit}$$

$$= \left| \frac{25 \frac{c^2}{a^2}}{-50a^2\frac{c^2}{a^2} + 12b5\frac{c}{a} + 50c^2} \right|$$

$$= \left| \frac{25 \frac{c^2}{a^2}}{-50c^2 + 120b\frac{c}{a} + 50c^2} \right|$$

$$= \left| \frac{25 \frac{c^2}{a^2}}{20b\frac{c}{a}} \right| = 2,5 \frac{a}{b}$$

$$V(\Omega \rightarrow \infty) = \left| \frac{1}{-2a^2} \right| = \frac{1}{2a^2}$$



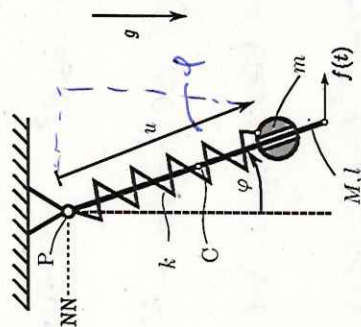
$$\omega = 5 \frac{c}{a} \quad V(0) = 0 \quad [3]$$

$$V(\Omega = \omega) = 2,5 \frac{c}{a} \quad V(\Omega \rightarrow \infty) = \frac{1}{2a^2} \quad [2]$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Das skizzierte System besteht aus einem starren Stab (homogen, Länge l , Masse M , Trägheitsmoment $J(C) = \frac{1}{12} M l^2$ bezüglich des Schwerpunktes C), auf dem eine Punktmasse m reibungsfrei entlang gleiten kann. Die Punktmasse ist außerdem über eine Feder k mit der Aufhängung im Punkt P verbunden. Für $u = \frac{1}{2}$ ist die Feder entspannt. Die Anregungskraft $f(t)$ wirkt stets in horizontaler Richtung und es wirkt das Schwerfeld g . Verwenden Sie als verallgemeinerte Koordinaten $\underline{q} = \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix}$.

Gegeben: M, m, k, l, g



a) Stellen Sie die potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten auf.

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{1}{2} k u^2 + M g \frac{l}{2} \cos(\varphi) - M g \frac{l}{2} \cos(\varphi) \\
 &= \frac{1}{2} k u^2 + M g \frac{l}{2} \cos(\varphi) - M g \frac{l}{2} \cos(\varphi) \\
 &= \frac{1}{2} k u^2 + M g \frac{l}{2} \cos(\varphi) - M g \frac{l}{2} \cos(\varphi) \\
 &= \frac{1}{2} k u^2 + M g \frac{l}{2} \cos(\varphi) - M g \frac{l}{2} \cos(\varphi)
 \end{aligned}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k u^2 - M g u \cos(\varphi) - M g \frac{l}{2} \cos(\varphi) \quad [3]$$

b) Stellen Sie die kinetische Energie des Gesamtsystems in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten auf.

$$E_k = \frac{1}{2} J(C) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2)$$

$$J(C) = J(C) + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M l^2 + M \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} M l^2$$

$$x_p = u \sin(\varphi)$$

$$\dot{x}_p = \dot{u} \sin(\varphi) + u \cos(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$y_p = u \cos(\varphi)$$

$$\dot{y}_p = \dot{u} \cos(\varphi) - u \sin(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{1}{6} M l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{u} \sin(\varphi) + u \cos(\varphi) \dot{\varphi})^2 + (\dot{u} \cos(\varphi) - u \sin(\varphi) \dot{\varphi})^2 \\
 &= (\dot{u} \sin(\varphi))^2 + 2 \dot{u} \sin(\varphi) u \cos(\varphi) \dot{\varphi} + (u \cos(\varphi) \dot{\varphi})^2 + (\dot{u} \cos(\varphi))^2 \\
 &\quad - 2 \dot{u} \cos(\varphi) u \sin(\varphi) \dot{\varphi} + (u \sin(\varphi) \dot{\varphi})^2 \\
 &= \dot{u}^2 (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) + u^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \\
 &\quad + 2 \dot{u} u \cos(\varphi) \sin(\varphi) \dot{\varphi}
 \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{u}^2 + u^2 \dot{\varphi}^2) \quad [5]$$



- c) Bestimmen Sie die nichtkonservativen Kräfte bzgl. der verallgemeinerten Koordinaten.

$f(t)$	$\frac{\partial \dot{x}_t}{\partial \dot{q}} = \dot{q}_e^{nh}$	$\dot{x}_t = 0$
$f(t)$	$\frac{\partial \dot{x}_t}{\partial \dot{q}} = \dot{q}_e^{nh}$	$\dot{x}_t = L \sin(e)$
$Q_t^{nh} = f(t) \cdot L \cos(e)$		$\dot{x}_t = L \cos(e) \dot{e}$
$Q_v^{nh} = f(t) \frac{\partial \dot{x}_t}{\partial \dot{v}} = 0$		
$Q_u^{nh} = 0$	$Q_\varphi^{nh} = f(t) \cos(e)$	[3]



- d) Gegeben sind die kinetische und potentielle Energie eines leicht abgedämpften Systems

$$E_k = \frac{1}{16} M^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{2}{3} m (2\dot{u}^2 + 3\dot{u}^2 \dot{\varphi}^2), \quad E_p = - \left(M \frac{l}{4} + m u \right) g \sin \varphi + \frac{1}{4} k \left(u - \frac{l}{3} \right)^2,$$

sowie $Q_u^{nh} = 0$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die verallgemeinerte Koordinate $(q_1 = u)$ mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art auf.

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{u}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{3} m \cdot 4 \dot{u} \right) = \frac{2}{3} m \cdot 4 \ddot{u} = \frac{8}{3} m \ddot{u}$
$\frac{\partial E_k}{\partial u} = \frac{2}{3} m \cdot 6 u \dot{\varphi}^2 = 4 m u \dot{\varphi}^2$
$\frac{\partial E_p}{\partial u} = m g \sin(e) + \frac{7}{2} k u - \frac{7}{6} k l$
Lagrange'sche Gleichungen 2. Art:
$\frac{8}{3} m \ddot{u} - 4 m u \dot{\varphi}^2 + m g \sin(e) + \frac{7}{2} k \left(u - \frac{l}{3} \right) = 0$
$-4 m u \dot{\varphi}^2 + \frac{8}{3} m \ddot{u} + m g \sin(e) + \frac{7}{2} k \left(u - \frac{l}{3} \right) = 0$
[4,5]

Aufgabe 4 (8,5 Punkte)

Ein harmonisch angeregtes, ungedämpftes mechanisches System mit den Eigenkreisfrequenzen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \sqrt{2}$ ist in modalen Koordinaten gegeben:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cos(\Omega t)$$

Gegeben: Ω

a) Wurde die modale Transformation mit massennormierten Eigenvektoren durchgeführt?

☒ Ja ☐ Nein [1]

b) Bestimmen Sie die modalen Amplituden $\hat{\eta}_1$ und $\hat{\eta}_2$ der partikulären Lösung $\eta_1(t) = \Re\{\hat{\eta}_1 e^{i\Omega t}\}$ in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz Ω .

$$\underline{\zeta}(\Omega) = -\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\Omega^2 & 0 \\ 0 & 2-\Omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\zeta}(\Omega) = \begin{bmatrix} 1-\Omega^2 & 0 \\ 0 & 2-\Omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}(\Omega) = \begin{bmatrix} -\Omega^2 & 0 \\ 0 & -\Omega^2+1 \end{bmatrix} \frac{1}{(-\Omega^2+1)(-\Omega^2+2)}$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \hat{\eta}_1 \\ \hat{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{-\Omega^2+1} \\ \frac{3}{-\Omega^2+2} \end{bmatrix}$$

$\hat{\eta}_1 = \frac{1}{1-\Omega^2}$	$\hat{\eta}_2 = \frac{3}{2-\Omega^2}$	[2]
---------------------------------------	---------------------------------------	-----

e) Für die folgende Betrachtung sei die Punktmasse m an der Stelle $u = \frac{l}{2}$ fest auf der Stange fixiert. Durch die Aufhängung wirkt zusätzlich ein nichtlineares Rückstellmoment $M_{R,nl} = k_\varphi(\varphi^3 + \varphi) + (\varphi^2 + d_\varphi)\dot{\varphi}$, sodass die Bewegungsgleichung nun lautet:

$$\left(\frac{1}{5} M l^2 + \frac{m l^2}{4} \right) \ddot{\varphi} + \frac{l g}{2} \sin \varphi (m + M) + k_\varphi (\varphi^3 + \varphi) + (\varphi^2 + d_\varphi) \dot{\varphi} = 0.$$

Bestimmen Sie die um die Ruhelage $\varphi = \varphi_0 \ll 1$ linearisierte Bewegungsgleichung.

Flotationsentwicklung um stabile Ruhelage mit $\Delta \varphi = \varphi - \varphi_0$

$$M(\varphi_0) \Delta \ddot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{\varphi}} \bigg|_{\varphi_0, \dot{\varphi}_0} \Delta \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi_0, \dot{\varphi}_0} \Delta \varphi = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \dot{\varphi}} \bigg|_{\varphi_0, \dot{\varphi}_0} = \varphi_0^2 + d_\varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \varphi} \bigg|_{\varphi_0, \dot{\varphi}_0} = \frac{l g}{2} \cos(\varphi_0) (m + M) + 3 k_\varphi \varphi_0^2 + k_\varphi + 2 \varphi_0 \dot{\varphi}_0$$

$$\left(\frac{1}{5} M l^2 + \frac{m l^2}{4} \right) (\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_0) + (\varphi_0^2 + d_\varphi) (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0) + \left(\frac{l g}{2} \cos(\varphi_0) (m + M) + 3 k_\varphi \varphi_0^2 + k_\varphi + 2 \varphi_0 \dot{\varphi}_0 \right) (\varphi - \varphi_0) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{5} M l^2 + \frac{m l^2}{4} \right) \ddot{\Delta \varphi} + d_\varphi \dot{\Delta \varphi} + \left(\frac{l g}{2} (m + M) \cos \varphi_0 \right) \Delta \varphi = 0$$

[4,5]



c) Die Eigenkreisfrequenzen des Systems werden nun leicht bestimmt. Die physikalischen Amplituden X_1 und X_2 der partikulären Lösung $x(t) = \Re\{X e^{i\Omega t}\}$ sind dadurch $X_1 = \frac{\Omega^2 - 4\Omega^2 + 3}{5\Omega^2 - 15}$ und $X_2 = \frac{\Omega^2 - 4\Omega^2 + 3}{(\Omega^2 - 1)(3\Omega^2 - 6)}$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu? Antworten Sie rein basierend auf den Pol- und Nullstellen von X_i . Mehrfachlösungen sind möglich.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2}$$

$$= 2 \pm 1 \quad \omega_1 = \sqrt{3}$$

$$\omega_2 = 1$$

$$X_1(\omega = \omega_{1,2}) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow 5\omega_{1,2}^2 - 75 = 0 \quad \omega_{1,2}^{(1)} = -\sqrt{3}$$

$$X_2(\omega = \omega_{1,2}) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow (\omega_{1,2}^2 - 1)(3\omega_{1,2}^2 - 6) = 0$$

$$\omega_{1,2}^{(2)} = 1$$

$$\omega_{1,2}^{(2)} = -1$$

☐ Tilgung bei x_1
☒ Scheinresonanz bei x_1 möglich

☒ Tilgung bei x_2
☒ Scheinresonanz bei x_2 möglich

☐ $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} X_1 \neq 0, \lim_{\Omega \rightarrow \infty} X_2 = 0$
☐ $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} X_1 \neq 0, \lim_{\Omega \rightarrow \infty} X_2 \neq 0$
☒ $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} X_1 = 0, \lim_{\Omega \rightarrow \infty} X_2 \neq 0$

[5,5]

$\omega_{1,2}$, hat nichts mit Strukturdynamik zu tun...

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-e_1 - e_2 = 0 \quad e_1 = -e_2 \rightarrow e_2 = 0$$

$$3e_1 + 3e_2 = 0$$

$$-3e_1 + 3e_2 = 0 \rightarrow 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$2e_1 + e_3 - e_4 = 0 \quad e_3 = -e_4$$

$$-e_1 = 0 \rightarrow e_1 = 0$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$