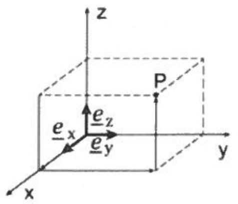
Grundlagen

Koordinatensysteme

Kartesische Koordinaten

$$v_x = u$$
$$v_y = v$$
$$v_z = w$$



$$h_1 = 1$$
$$h_2 = 1$$
$$h_3 = 1$$

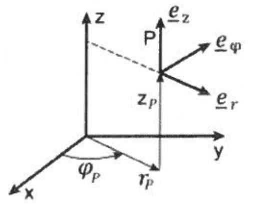
$$\nabla = \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$(\nabla \times \underline{v})_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$(\nabla \times \underline{v})_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$(\nabla \times \underline{v})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Zylinderkoordinaten

$x = r\cos(\varphi)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin(\varphi)$	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
$z = z$	$z = z$



$$h_1 = 1$$
$$h_2 = r$$
$$h_3 = 1$$

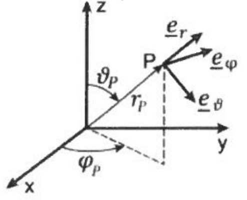
$$\nabla = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$(\nabla \times \underline{v})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$(\nabla \times \underline{v})_\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}$$
$$(\nabla \times \underline{v})_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ru) - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right]$$

Kugelkoordinaten

$x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$	$\vartheta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$
$z = r\cos(\vartheta)$	$\varphi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$



$$h_1 = 1$$
$$h_2 = r$$
$$h_3 = r\sin(\vartheta)$$

$$\nabla = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \underline{e}_\varphi \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 u\right) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(v\sin(\vartheta)) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial w}{\partial \varphi}$$

$$(\nabla \times \underline{v})_r = \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin(\vartheta)w) - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right]$$
$$(\nabla \times \underline{v})_\vartheta = \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)$$
$$(\nabla \times \underline{v})_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rv) - \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right]$$

Skalarprodukt

$$\underline{a} \cdot \underline{b}$$

Kreuzprodukt

$$\underline{a} \times \underline{b}$$

Dyadisches Produkt

$$\underline{a}\,\underline{b} = \underline{a} \otimes \underline{b} = \underline{a}\,\underline{b}^T$$

Nabla-Operator

$$\nabla = \sum_{i=1}^{3} \underline{e}_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Gradient Eines Skalars

$$\mathrm{grad}(f) = \nabla(f) = \underline{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \underline{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \underline{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial x_3}$$

Gradient Eines Vektors

$$\mathrm{grad}(v) = \nabla \otimes \underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergenz

$$\mathrm{div}(\underline{a}) = \nabla \cdot \underline{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 a_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 a_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 a_3)\right]$$

Rotation

$$\mathrm{rot}(\underline{a}) = \nabla \times \underline{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[h_1\left(\frac{\partial(h_3 a_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 a_2)}{\partial x_3}\right)\underline{e}_1 + h_2\left(\frac{\partial(h_1 a_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(h_3 a_3)}{\partial x_1}\right)\underline{e}_2 + h_3\left(\frac{\partial(h_2 a_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 a_1)}{\partial x_2}\right)\underline{e}_3\right]$$

Laplace-Operator

$$\nabla^2(f) = \Delta(f) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right]$$

Physikalische Eigenschaften

Knudsen-Zahl

$$Kn = \frac{\bar{\lambda}}{L}$$

$\bar{\lambda}$ = Mittlere Freie Weglänge
L = Charakteristische Länge
Kontinuumsströmung: Kn $< 10^{-2}$
Freie Molekülströmung: Kn > 10

Höhe	0km	80km	150km
$\bar{\lambda}$	3nm	100nm	2000nm
L	1, 6µm	3cm	200m

Dichte

Flüssigkeiten: $\rho = \text{konst.}$
Barotrope Fluide: $\rho = \rho(p)$
Gase: $\rho = \rho(p, T)$

Druck

$$p_{ges} = p_{stat} + p_{dyn}$$

$$p_{dyn} = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Ideale Gasgleichung

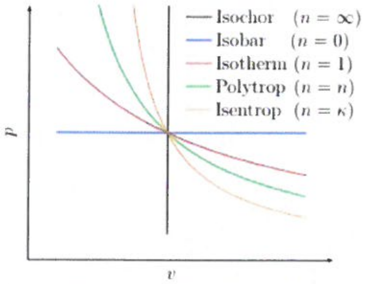
$$p = \rho RT \quad \Big| \quad pV = mRT$$

Spezifische Gaskonstante

$$R = \frac{\Re}{M} = c_p - c_v$$

$\Re = 8314.3\,\mathrm{J\,kmol^{-1}\,K^{-1}}$
M = Molare Masse
c_p = Spezifische Wärme bei konstantem Druck
c_v = Spezifische Wärme bei konstanter Temperatur

Polytrope Zustandsänderung



$$\frac{p}{\rho^n} = pv^n = \text{konst.}$$

$$\frac{\rho}{\rho_b} = \left(\frac{p}{p_b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

n = Polytropenexponent
κ = Isentropenexponent
$= \frac{c_p}{c_v}$

Schallgeschwdingikeit

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\kappa\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T}$$

$$= \underbrace{\sqrt{\kappa RT} = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}}}_{\text{Ideales Gas}}$$

$$\underbrace{\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{Ma^2}{2}}_{\text{Grenze Inkompressible Strömung}}$$

Temperatur

$$KE = \frac{3}{2}kT$$

KE = Kinetische Energie
k = Boltzmann-Konstante
$= 1,38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
T = Temperatur

Newtonsches Reibungsgesetz

$$\tau = \eta\frac{du}{dy} = \eta D$$

τ = Schubspannung
η = Dynamische Viskosität $[\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}]$
D = Schergeschwindigkeit

Kinematische Viskosität

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

ν = Kinematische Viskosität $[\mathrm{m^2\,s^{-1}}]$
η = Dynamische Viskosität $[\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}]$
ρ = Dichte

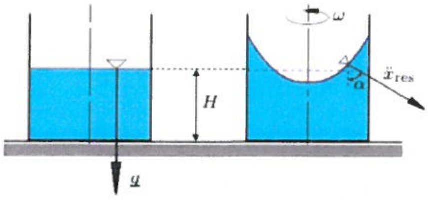
Fluidstatik & Hydrostatik

$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$

Grenzfläche (Rotierender Zylinder)

$$F_z = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r} \qquad z(r) = H + \frac{\omega^2}{2g}\left(r^2 - \frac{1}{2}R^2\right)$$

$$F_g = mg \qquad \tan(\alpha) = \frac{F_z}{F_g} = \frac{\omega^2 r}{g}$$



Hydrostatischer Auftrieb

Sinken/Schweben

$$F_a = (\rho_F - \rho_K)\,gV_v$$

Schwimmen

$$\rho_F g V_v = \rho_K g V_K$$

F_a = Auftriebskraft
ρ_F = Dichte (Flüssigkeit)
ρ_K = Dichte (Körper)
g = Erdbeschleunigung
V_v = Verdrängtes Volumen
V_K = Volumen (Körper)

Flüssigkeitssäule

$F_x = p_s \cdot A_{proj}$
$F_y = \rho \cdot g \cdot V$

$\updownarrow$ y $\qquad$ x $\leftrightarrow$

$$F_x = \frac{\rho g}{2}\left(y_2^2 - y_1^2\right)dz \qquad F_y = \rho g dz \int_{x_1}^{x_2} y_W(x)dx$$

$$dF_x = \Delta p dA_y = \Delta p \cdot l \cdot dy \qquad dF_y = -\Delta p dA_x$$

$$M_A = \rho g dz \left[\int_{x_1}^{x_2} x y_W(x)dx - \frac{1}{3}\left(y_2^3 - y_1^3\right)\right]$$

$$dM_A = y dF_x - x dF_y$$

Atmosphäre

Isotherm

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0}z\right)$$

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0}z\right)$$

$$T(z) = T_0$$

Isentrop

$$p(z) = p_0\left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa}\frac{\rho_0 g}{p_0}z\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

$$\rho(z) = \rho_0\left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa}\frac{\rho_0 g}{p_0}z\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

$$T(z) = T_0\left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa}\frac{\rho_0 g}{p_0}z\right)$$

Kontinuitätsgleichung

Integralform (Konservativ)

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho dV + \oiint\limits_S \rho \underline{v}\cdot \underline{dS} = 0$$

Stromröhre

$$\dot{m} = \rho v S = \text{konst.}$$

Stationär

$$\operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

Inkompressibel

$$\operatorname{div}(\underline{v}) = 0$$

Differentialform

Konservativ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$

Nicht-Konservativ

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{v}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0$$

Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w)\right] = 0$$

Kugelkoordinaten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 \rho u\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial(\rho v \sin(\vartheta))}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial(\rho w)}{\partial \varphi} = 0$$

Impulssatz

Differentialform

Konservativ

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho u \underline{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v \underline{v}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho w \underline{v}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z$$

Nicht-Konservativ

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho \underline{f}$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z$$

Integralform

$$\iiint\limits_V \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \oiint\limits_S \rho \underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{n})\, dS = \iiint\limits_V \rho \underline{f} dV + \oiint\limits_S \underline{\underline{\sigma}}\cdot \underline{dS}$$

Stationär

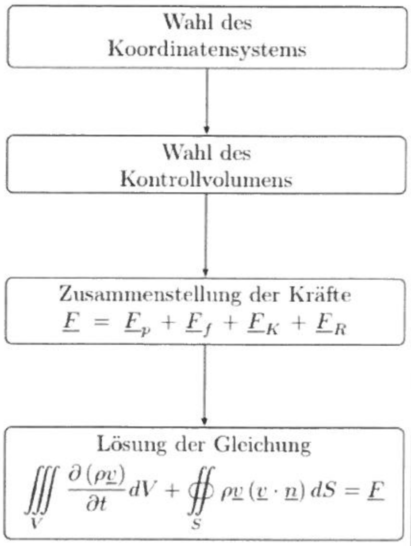
$$\frac{d\underline{I}}{dt} = \oiint\limits_S \rho \underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{n})\, dS$$

Reynoldsches Transporttheorem

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{D}{Dt}\iiint\limits_{V(t)} b(t) dV = \iiint\limits_{V_0} \frac{\partial b}{\partial t} dV + \iiint\limits_{V_0} \operatorname{div}(b\underline{v})\, dV$$

$$\frac{D\underline{B}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\iiint\limits_{V(t)} \underline{b}(t) dV = \iiint\limits_{V_0} \frac{\partial \underline{b}}{\partial t} dV + \oiint\limits_S \underline{b}(\underline{v}\cdot\underline{n})\, dS$$

Praktischer Einsatz



Wahl des Koordinatensystems

Wahl des Kontrollvolumens

Zusammenstellung der Kräfte
$$\underline{F} = \underline{F}_p + \underline{F}_f + \underline{F}_K + \underline{F}_R$$

Lösung der Gleichung
$$\iiint\limits_V \frac{\partial(\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \oiint\limits_S \rho \underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{n})\, dS = \underline{F}$$

Carnot-Diffusor

Druckdifferenz

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} u_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)^2$$

Druckverlustbeiwert

$$\zeta = \frac{2\Delta p_v}{\rho u_1^2} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

Druckkräfte $\underline{F}_p$

$$d\underline{F}_p = -p\cdot \underline{n} dS$$

$$\underline{F}_p = -\oiint\limits_S p\underline{n} dS$$

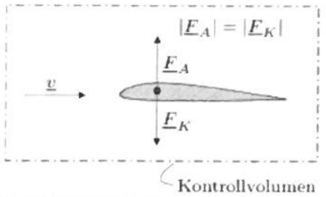
Volumenkräfte $\underline{F}_f$

$$\underline{F}_f = \iiint\limits_V \rho \underline{f} dV$$

Schwerefeld

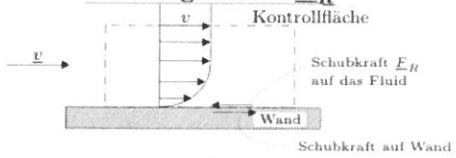
$$d\underline{F}_f = \rho \underline{g} dV \quad \Big| \quad \underline{F}_f = \iiint\limits_V \rho \underline{g} dV$$

Körperkräfte $\underline{F}_K$



Actio = Reactio
Fluid ⇔ Körper

Reibungskräfte $\underline{F}_R$



Actio = Reactio | Fluid ⇔ Wand

Impulssatz

Eulergleichungen

Konservativ

$$\frac{\partial\left(p\underline{v}\right)}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \cdot \underline{v} \otimes \underline{v}\right) = -\nabla(p) + \rho \underline{f}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho v u\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v^2\right)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho w u\right)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w v)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho w^2\right)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z$$

Nicht-Konservativ

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla\left(\underline{v}\right)\right] = -\nabla(p) + \rho \underline{f}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z$$

Bernoulligleichungen

Stationär/Inkompressibel/Reibungsfrei

Allgemein

$$\rho_0 \frac{v^2}{2} + p + \rho_0 U = \text{konst.}$$

Energieform

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{konst.}$$

Druckform

$$\boxed{\frac{\rho}{2} v^2 + p + \rho g z = \text{konst.}}$$

Höhenform

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{konst.}$$

Instationär/Inkompressibel/Reibungsfrei

Allgemein

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g\left(z_2 - z_1\right) = 0$$

Querdruckgleichung

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g\frac{\partial z}{\partial n} = 0$$

Instationär/Kompressibel/Reibungsfrei

Allgemein

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + U_2 - U_1 = 0$$

Anwendungen

Venturi-Rohr

Druckdifferenz

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right]$$

Massenstrom

$$\dot{m} = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2\rho \Delta p}{A_2^2 - A_1^2}}$$

Ausströmen Aus Gefäß

Konstanter Spiegel

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_1 - p_2\right) + 2gh}$$

Mit Spiegelabsenkung

$$\Delta T = \frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}\right)$$

Prandtl-Rohr

Inkompressibel

Druckdifferenz

$$\Delta p = p_0 - p_\infty = \rho_F g \Delta z$$

Anströmgeschwindigkeit

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{2\frac{\rho_F}{\rho} g \Delta z}$$

Kompressibel

Fehlerabschätzung

$$\frac{v_{\infty,kompr.}}{v_{\infty,inkompr.}} \approx \sqrt{1 - \frac{Ma_\infty^2}{4}}$$

Anströmgeschwindigkeit

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\left[\left(\frac{p_0}{p_\infty}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]}$$

Schwingende Säule

$$x = x_0 \cos(\omega t)$$

Bewegung Auf Konzentrischen Bahnen

$$p(r) = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)$$

	Symbol	Inkompressibel	Kompressibel ($Ma \leq 1$)	Kompressibel ($Ma > 1$)
Statischer Druck	p, p_s, p_{stat}	p	p	p
Dynamischer Druck	p_{dyn}	p	p	p
Totaldruck	p_0, p_t, p_{ges}	$p_0 = p + \frac{\varrho}{2} v^2$	$p_0 = p + \frac{\varrho}{2} v^2 + \Delta p_{kompr} = p\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$	
Pitotdruck	p_{pitot}	$p_{pitot} = p_0$	$p_{pitot} = p_0$	$p_{pitot} \leq p_0$
Staudruck		$p_0 - p = \frac{\varrho}{2} v^2$	$p_0 - p > \frac{\varrho}{2} v^2$	

Navier-Stokes-Gleichungen

Scherratentensor

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Drehgeschwindigkeitstensor

$$\underline{\underline{W}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Spannungstensor

$$\begin{pmatrix} -p + 2\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\left(\underline{v}\right)\right) & \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & -p + 2\eta\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\left(\underline{v}\right)\right) & \eta\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \eta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \eta\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & -p + 2\eta\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\left(\underline{v}\right)\right) \end{pmatrix}$$

Divergenz Des Spannungstensors

$$\mathrm{div}\left(\underline{\underline{\sigma}}\right) = -\nabla(p) + 2\mathrm{div}\left(\eta\underline{\underline{D}}\right) - \frac{2}{3}\nabla\left(\eta\mathrm{div}\left(\underline{v}\right)\right)$$

Inkompressible Strömung

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla\left(\underline{v}\right) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\Delta\left(\underline{v}\right) + \underline{f}$$

Kartesische Koordinaten (Newtonsche Fluide)

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\mathrm{div}\left(\underline{v}\right)}{3}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y + \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2\eta\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mathrm{div}\left(\underline{v}\right)}{3}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right)$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z + \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(2\eta\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mathrm{div}\left(\underline{v}\right)}{3}\right)\right)$$

Kartesische Koordinaten (Inkompressible Fluide)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + f_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + f_z$$

Couette-Strömung

$$u = U\frac{y}{h}$$

Viskosimeter

$$\tau_W = \frac{M_h}{2\pi r_0^2 b} \qquad \eta = \frac{\tau_W}{\dot{\gamma}}$$

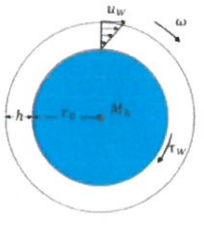
$$\dot{\gamma} = \frac{u_W}{h} \qquad \nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{\tau_W}{\rho\dot{\gamma}}$$

M_h = Haltemoment

$\dot{\gamma}$ = Schergeschwindigkeit

η = Dynamische Viskosität

ν = Kinematische Viskosität



Hagen-Poiseuille

Radialgeschwindigkeit

$$w = \frac{a}{4}\left(r^2 - R^2\right) = w_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Massenstrom

$$\dot{m} = \frac{1}{2}\rho\pi w_{max}R^2 = \rho\pi R^2\bar{w}$$

Reynoldszahl

$$Re_D = \frac{\rho\bar{w}D}{\eta} = \frac{\bar{w}D}{\nu}$$

Druckdifferenz

$$\Delta p = -\frac{4\eta w_{max}}{R^2}L = -\frac{8\eta\dot{m}L}{\rho\pi R^4} = -\underbrace{\frac{64}{Re_D}}_{\lambda}\frac{\rho L}{2D}\bar{w}^2$$

Allgemein

$$\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) = \frac{\partial p}{\partial z}$$

Wandschubspannung

$$\tau_W = -\frac{R}{2}\frac{\Delta p}{L}$$

Einlaufströmung: $p_1 = p_0 - \frac{\rho}{2}\bar{w}^2$

Länge des Übergangsbereichs

$$L_{12} \approx aD\left(\frac{\bar{w}D}{\nu}\right)^b = aDRe_D^b$$

Laminar	Turbulent
$a \approx 0,02 - 0,06$	$a \approx 0,6$
$b = 1$	$b = 0,25$

Durst

$$L_{12} = D\sqrt[\beta]{C_0^\beta + \left(C_1 Re_D\right)^\beta}$$

Rohrströmung	Kanalströmung
$\beta = 1,6$	$\beta = 1,6$
$C_0 = 0,619$	$C_0 = 0,631$
$C_1 = 0,0567$	$C_1 = 0,0442$

Kuhlmann

$$L_{12} \approx \frac{Re_D}{50}D$$

Durchmesser Rohr

$Re_L = \frac{v_L \rho_B d_L}{\eta_B}$

Ähnlichkeitstheorie

Reynoldszahl

$$Re_L = \frac{\rho v_\infty L}{\eta} = \frac{v_\infty L}{\nu}$$

Strouhal-Zahl

$$Str = \frac{Lf}{v_\infty}$$

Machzahl

$$Ma = \frac{v_\infty}{c_\infty}$$

Froude-Zahl

$$Fr = \frac{v_\infty}{\sqrt{gL}}$$

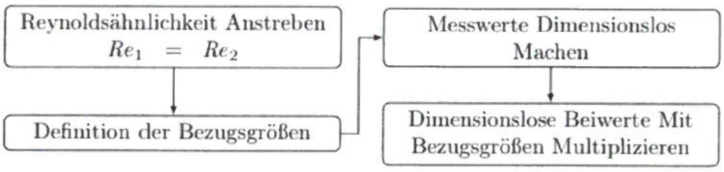
Stokessche Formel

$$F_W = \frac{\rho}{2} v_\infty^2 c_W S = 6\pi\eta R v_\infty$$

Dimensionslose Kennzahlen

$$p = p^* p_\infty \qquad p = p^* p_\infty$$
$$\rho = \rho^* \rho_\infty \qquad \rho = \rho^* \rho_\infty$$
$$\eta = \eta^* \eta_\infty \qquad \eta = \eta^* \eta_\infty$$
$$f_x = f_x^* g \qquad f_x = f_x^* g$$

Vorgehensweise bei Modellversuchen



Reynoldsähnlichkeit Anstreben $Re_1 = Re_2$

Definition der Bezugsgrößen

Messwerte Dimensionslos Machen

Dimensionslose Beiwerte Mit Bezugsgrößen Multiplizieren

Grenzschichten

Wandschubspannung

$$\tau_0 = \frac{\rho v_\infty^2}{6} \frac{d\delta}{dx}$$

Grenzschichtdicke

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{12\nu}{v_\infty x}} = \sqrt{\frac{12}{Re_x}}$$

Widerstandsbeiwert

Lokal

$$c_f = \frac{2}{\sqrt{12 Re_x}} = \frac{2\tau_0(x)}{\rho v_\infty^2}$$

Gesamt

$$c_W = 2\sqrt{\frac{\nu}{3 v_\infty x}} = \frac{2}{\sqrt{3 Re_x}}$$

Grenzschichtgleichungen

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

y-Impuls

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

x-Impuls

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Randbedingungen

$$\underbrace{u = v = 0}_{y=0} \qquad \underbrace{u = u_\delta(x)}_{y=\delta}$$

Blasius-Gleichung

Variable

$$\eta = y\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = \frac{y}{\delta}$$

Stromfunktion

$$\Psi(x,y) = \sqrt{v_\infty \nu x} \cdot f(\eta)$$

Blasius-Gleichung

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

Randbedingungen

$\underline{y = 0/\eta = 0}$

$$u = v = f(0) = f'(0) = 0$$

$\underline{y \to \infty/\eta \to \infty}$

$$u = v_\infty \;\Big|\; f'(\eta \gg 1) = 1$$

Lösungen

η	f	f'	f''
0	0	0	0,3321
0,5	0,0415	0,1659	0,3309
1,0	0,1656	0,3298	0,3230
1,5	0,3701	0,4868	0,3026
2,0	0,6500	0,6298	0,2668
2,5	0,9963	0,7513	0,2174
3,0	1,3968	0,8460	0,1614
3,5	1,8377	0,9130	0,1078
4,0	2,3057	0,9555	0,0642
4,5	2,7901	0,9795	0,0340
5,0	3,2833	0,9915	0,0159
5,5	3,7806	0,9969	0,0066
6,0	4,2796	0,9990	0,0024
6,5	4,7793	0,9997	0,0008
7,0	5,2792	0,9999	0,0002
7,5	5,7792	1,0000	0,0001
8,0	6,2792	1,0000	0,0000

Ebene Platte (Laminar)

Wandschubspannung

$$\tau_0 = \frac{0,3321 \rho v_\infty^2}{\sqrt{Re_x}}$$

Lokaler Widerstandsbeiwert

$$c_f = \frac{0,6642}{\sqrt{Re_x}} \qquad c_W = \frac{1,328}{\sqrt{Re_x}}$$

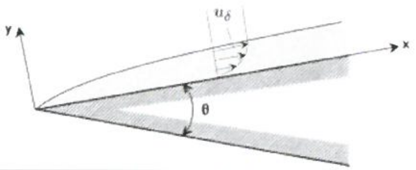
Grenzschichtdicke

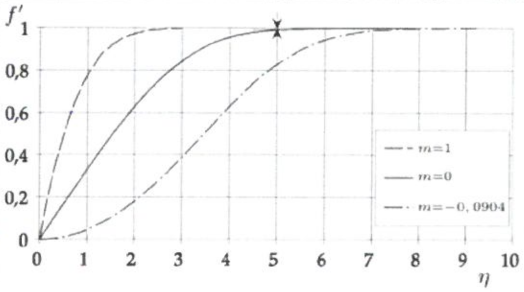
$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}} \sim x^{0,5}$$

Keil

$$m = \frac{\theta}{2\pi - \theta}$$

$$u_\delta \approx x^m$$





$m = 1$: Ebene Staupunktströmung

$m = 0$: Ebene Platte

$m = -0,0904$: Grenzfall

$m < -0,0904$: Strömungsablösung

Turbulenz

Reynoldszahl

$$Re(x) = \frac{v_\infty}{\nu} x$$

$Re_{x,krit}$

Ebene Platte: $3,5 \cdot 10^5$ - $3,2 \cdot 10^6$

Rohr: $2,3 \cdot 10^3$ - $4 \cdot 10^4$

Turbulenzgrad (Anströmung)

$$Tu = \frac{1}{\sqrt{3}U_\infty}\sqrt{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}$$

Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

e^N-Methode

$$e^N = e^{\left(\int\limits_{t_{ind}}^{t_{krit}} \beta_i dt\right)} = \frac{A(x_{krit})}{A(x_{ind})}$$

Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \eta\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right] - \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'^2}\right) - \rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'v'}\right)$$

$$\rho\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \rho\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \eta\left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}\right] - \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'v'}\right) - \rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{v'^2}\right)$$

Turbulenter Schubspannungstensor

$$\tau_{turb} = -\rho\begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

Reynoldsspannungen

$$\tau_{xx_{turb}} = -\rho\overline{u'^2}$$

$$\tau_{yx_{turb}} = -\rho\overline{u'v'}$$

Ansatz Von Boussinesq

$$\tau_{ges} = \tau_{yx} + \tau_{yx_{turb}} = (\eta + \eta')\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Scherrate

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{\rho\overline{u'v'}}{\eta'}$$

Universelles Wandgesetz

$$u = \frac{\tau_0 y}{\eta} = \frac{\tau_0 y}{\rho\nu} = \frac{u_\tau^2 y}{\nu}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{u}{u_\tau}}_{u^+} = \underbrace{\frac{u_\tau y}{\nu}}_{y^+}$$

u^+ = Geschwindigkeitsprofil

y^+ = Ausdehnung Von Gebiet a

Prandtlsche Mischungsweghypothese

$$\overline{u'v'} = -l^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$$

Prandtlsche Mischungsweglänge

$$u' = -l\frac{\partial u}{\partial y} = ky\frac{\partial u}{\partial y} \approx 0,41y\frac{\partial u}{\partial y}$$

Logarithmisches Wandgesetz

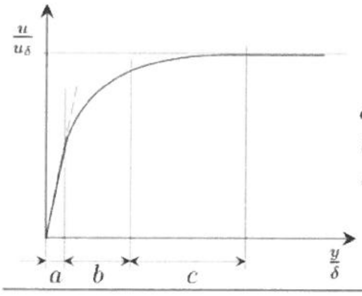
$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{\ln(10)}{k}\log\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right) + C_2$$

$$\approx 5,75\log\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right) + 5,2$$

Lokaler Widerstandsbeiwert

$$c_f = \frac{0,370}{\log(Re_x)^{2,58}} \quad \Big| \quad c_W = \frac{0,455}{\log(Re_L)^{2,58}}$$

Gebiete



a: Laminare Unterschicht (UWG)

b: Wandnahes Gebiet (LWG)

c: Außenbereich (PTG)

Wandschubspannung

Platte

$$\tau_0 = 0,0225\rho u_\infty^2\left(\frac{\nu}{u_\infty\delta}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Rohr

$$\tau_0 = 0,0225\rho u_{max^2}\left(\frac{\nu}{u_{max}R}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Potenzgesetz

Platte

$$\frac{u}{u_\infty} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$n \approx 7 \text{ - } 8$$

Grenzschichtdicke

$$\delta = \frac{0,37x}{\sqrt[5]{Re_x}} \sim x^{0,8}$$

Rohr

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Re	$4 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^6$
n	6	7	10

Lokaler Widerstandsbeiwert

$$c_f = \frac{0,0576}{\sqrt[5]{Re_x}} \quad \Big| \quad c_W = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re_L}}$$

Fluidkinematik

Fluidbewegung

Lagrange

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla(f)$$

Euler

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Rohrhydraulik

Bernoulli-Gleichung

Stationär

$$\frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2+H_{E_{1\to2}}$$

$$\frac{\rho}{2}u_1^2+p_1+\gamma z_1=\frac{\rho}{2}u_2^2+p_2+\gamma z_2+\Delta p_{V_{1\to2}}$$

$$\Delta p_{V_{1\to2}}=\gamma H_{E_{1\to2}}$$

Mittelwerte Stationär

$$\bar{u}=\frac{1}{T}\int\limits_{t=t_1}^{t_1+T}u dt$$

Tatsächlich Instationär

$$\frac{u_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\gamma}+z_1=\frac{u_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\gamma}+z_2+\frac{1}{g}\int\limits_{s_1}^{s_2}\frac{\partial u}{\partial t}ds+H_{E_{1\to2,instat}}$$

Reynoldszahl

$$Re_D=\frac{\bar{u}D}{\nu}$$

Universelles Rohreibungsgesetz

$$\Delta p_{V_{1\to2}}=\lambda\frac{L\rho}{2D}\bar{u}^2 \qquad h_{r_{1\to2}}=\lambda\frac{L\bar{u}^2}{2Dg}$$

Stromröhre

$$\frac{\rho}{2}\alpha\bar{u}_1^2+p_1+\gamma z_1=\frac{\rho}{2}\alpha\bar{u}_2^2+p_2+\gamma z_2+\Delta p_{V_{1\to2}}$$

$$\bar{u}=\frac{1}{A}\int\limits_A u\,dA=\frac{Q}{A}=\frac{\dot{V}}{A}$$

Laminare Strömung: $\alpha = 2$

Turbulente Strömung: $\alpha \approx 1$

Hydraulisch Glattes Rohr $\left(\frac{k_s u_\tau}{\nu}\leq 5\right)$

Laminar

Hagen-Poiseuille

$$\lambda=\frac{64}{Re_D}$$

$$Re_{krit}=2,3\cdot10^3 \text{ - } 3\cdot10^3$$

Turbulent

Prandtl

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\log\left(Re\sqrt{\lambda}\right)-0,8$$

$$Re > Re_{krit}$$

Logarithmisches Geschwindigkeitsgesetz

Blasius

$$\lambda=0,3164\,(Re)^{-\frac{1}{4}}$$

$$Re_{krit} < Re < 10^5$$

$\frac{1}{7}$–Potenzgesetz

Hydraulischer Durchmesser

$$D=d_h=4\frac{A}{U}$$

Querschnitt	d_h
Kreis	D
Quadrat	H
Dreieck	$\frac{S}{\sqrt{3}}$
Rechteck	$\frac{2HB}{B+H}$
Kreisring	$D-d$
Spalt	$2H$
Ellipse	$1,3H\,(\frac{B}{H}=2)$ $1,57H\,(\frac{B}{H}\to\infty)$

Hydraulisch Rauhes Rohr

Sandrauhigkeiten

Oberfläche	$k_s=[\text{mm}]$
Genieteter Stahl	0,9 - 9
Eisenbeton	0,3 - 3
Holz	0,2 - 0,9
Gußeisen	0,25
Verzinktes Eisen	0,15
Baustahl	0,05
Gezogene Rohre	0,0015

Übergangsbereich

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=1,14-2\log\left(\frac{k_s}{D}+\frac{9,35}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

Wandschubspannung

$$\tau_0=\frac{\lambda}{8}\rho\bar{u}^2$$

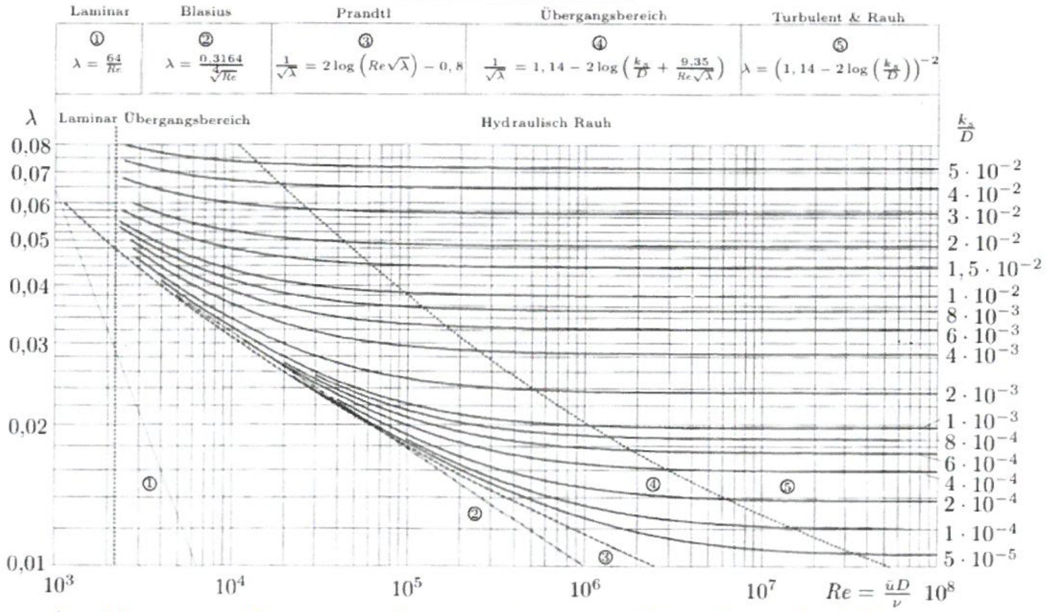
$\frac{k_s u_\tau}{\nu}\geq 70$

$$\lambda=\left(2\log\left(\frac{R}{k_s}\right)+1,74\right)^{-2}$$

$Re \to \infty$

$$\lambda=\left(1,14-2\log\left(\frac{k_s}{D}\right)\right)^{-2}$$

Moody-Diagramm



In klausur dazuschreiben, wenn man Moody nutzt!

Rohrhydraulik

Leistung von Turbine und Pumpe

Allgemein

$$P = \Delta p A \bar{u} = \Delta p Q = \gamma Q h$$

$$Q = \dot{V}$$

$$\gamma = \rho g$$

Mit Wirkungsgrad

Turbine

$$(\Delta p)_T = \frac{P_T}{\eta_T Q}$$

$$h_T = \frac{P_T}{\eta_T \gamma Q}$$

Pumpe

$$(\Delta p)_P = -\frac{\eta_P P_P}{Q}$$

$$h_P = -\frac{\eta_P P_P}{\gamma Q}$$

Rohrleitungsverluste

$$\Delta p_{V_\nu} = \zeta_\nu \frac{\rho}{2} \bar{u}_\nu^2$$

$$h_\nu = \zeta_\nu \frac{\bar{u}_\nu^2}{2g}$$

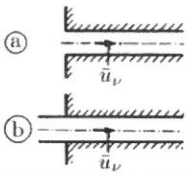
$$\bar{u}_\nu = \frac{Q}{A_\nu}$$

Verluste Durch Rohrgeometrie

Querschnitssänderung

Eintritt

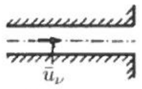
	Eintrittskante	ζ_e
a	Scharf	0,5
	Gebrochen	0,25
	Gut Abgerundet	0,06
b	Vorspringend	$< 3,0$



Austritt

Turbulent: $\zeta_a \approx 1,0$

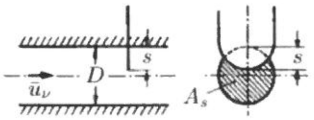
Laminar: $\zeta_a \approx 2,0$



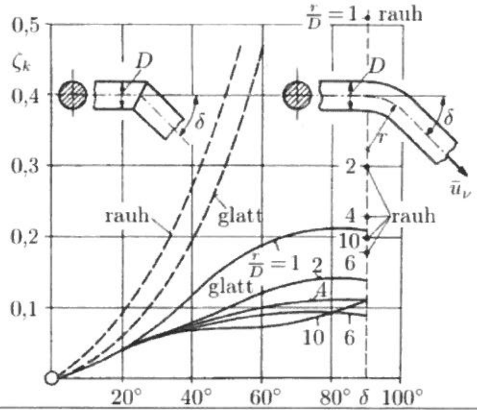
Schieber

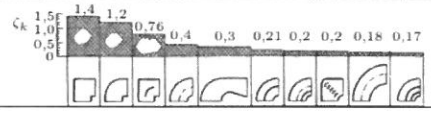
$\frac{s}{D}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{8}$
$\frac{A_s}{A}$	0,948	0,856	0,743	0,609	0,466	0,315	0,159	0
ζ_s	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8	

$$\bar{u}_\nu = \frac{Q}{A_\nu}$$



Krümmer





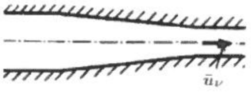
Verengung

Allmähliche Verengung (Düse)

$$\Delta p_{Düse} = \frac{\rho}{2} \bar{u}_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]$$

Druckverlustbeiwert

$$\zeta_f \approx 0$$

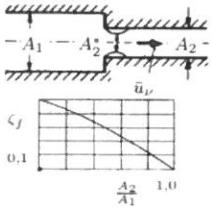


Plötzliche Verengung

$$\Delta p_{Eng} = \frac{\rho}{2} \bar{u}_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_2^*}{A_1} \right)^2 \right]$$

Druckverlustbeiwert

$$\zeta_f = \left(\frac{A_2}{A_2^*} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right)^2$$



Diffusor

Allmähliche Erweiterung

Ideal

$$\Delta p_{ideal} = \frac{\rho}{2} \bar{u}_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$$

Real

$$\Delta p_{real} = \eta \frac{\rho}{2} \bar{u}_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$$

Diffusorwirkungsgrad

$$\eta = \frac{\Delta p_{real}}{\Delta p_{ideal}}$$

Druckverlustbeiwert

$$\zeta = (0,12 - 0,2) \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$$

Plötzliche Erweiterung

Ideal

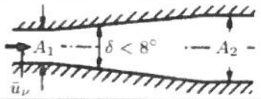
$$\Delta p_{ideal} = \frac{\rho}{2} \bar{u}_1^2 \left[1 - \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right]$$

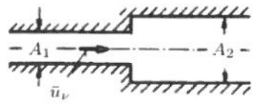
Real

$$\Delta p_{Carnot} = \frac{\rho}{2} \bar{u}_1^2 \left[2 \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right) \right]$$

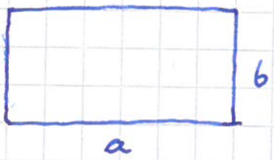
Druckverlustbeiwert

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$$





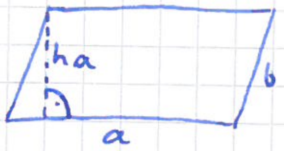
Rechteck



Umfang $U = 2a + 2b$

Fläche $A = a \cdot b$

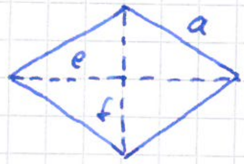
Parallelogramm



Umfang $U = 2a + 2b$

Fläche $A = a \cdot h_a$

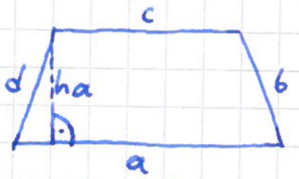
Raute



Umfang $U = 4a$

Fläche $A = (e \cdot f) : 2$

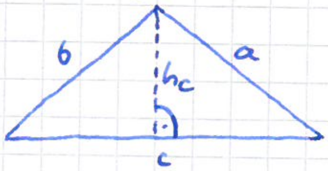
Trapez



Umfang $U = a + b + c + d$

Fläche $A = (a + c) : 2 \cdot h_a$

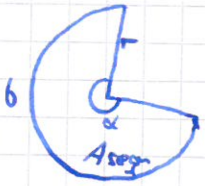
Dreieck



Umfang $U = a + b + c$

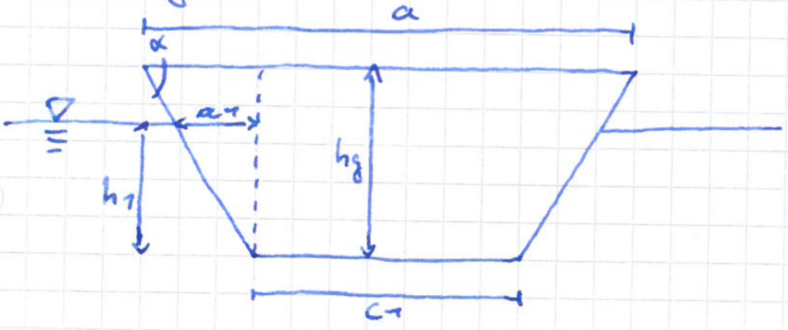
Fläche $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

Kreissegment



$$\frac{A_{segm.}}{\pi r^2} = \frac{b}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360}$$

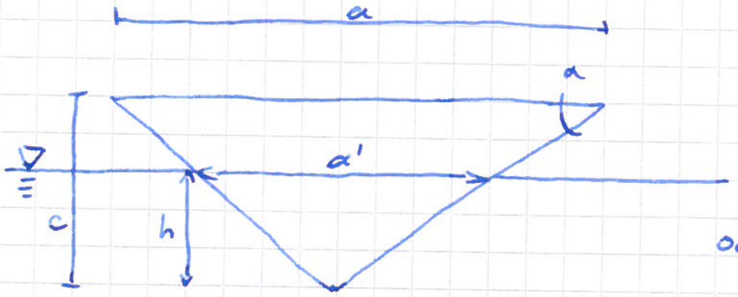
Bsp. Aufgabe:



$$\frac{h_g}{\frac{a-c_1}{2}} = \tan(\alpha) = \frac{h_1}{a_1}$$

$$a_1 = \frac{h_1}{h_g} \cdot \frac{a-c_1}{2}$$

Breite an Wasserlinie : $a_n = 2a_1 + c_1$



$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{h} \rightarrow a' = h \cdot \frac{a}{c}$$

oder $\tan(\alpha) = \frac{c}{a/2} = \frac{h}{a'/2} \rightarrow a' = h \cdot \frac{a}{c}$

Einheiten Umrechnungen

$1 \, hPa = 100 \, Pa$

$1 \, bar = 10^5$ ~~ba~~ Pa

$5 \, \frac{m^3}{min} = \frac{5 m^3}{60 s} = \frac{1}{12} \, \frac{m^3}{s}$

$10 \, l = 10 \cdot 0{,}001 \, m^3 = 0{,}01 \, m^3$

$mm^2 \xrightarrow{\cdot 10^{-6}} m^2$

$5 \, \frac{l}{min} = 5 \cdot \frac{0{,}001 \, m^3}{60 s}$

Centi : 10^{-2}

Milli : 10^{-3}

Physikalische Eigenschaften:

Ideale Gasgleichung: $P = \rho R T$ mit $\rho = \frac{m}{V}$ $\rightarrow PV = mRT$

$\frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P_2}{\rho_2}$ $\frac{P_1}{V_2} = \frac{P_2}{V_{\cancel{2}1}}$

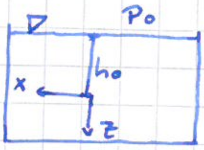
Zustandsänderungen: isobar $p_1 = p_2$; $T_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} T_1 = \frac{V_2}{V_1} T_1$

isochor : $\frac{P_1}{P_0} = \frac{T_1}{T_0}$; $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$

Spez. Gaskonstante : $R = \frac{R_m}{M} = c_p - c_v$ mit $R_m = 8{,}314 \, \frac{kJ}{kmol \, K}$

und M = Molare Masse

Druck in der Tiefe



$$P(z) = \rho g (h_0 + z) + P_0$$

Falls h_0 nach oben: $P(z) = P_0 - \rho g z$

Überdruck: "Wie viel Druck über" "Wie viel mehr": $P_{über} = P - P_0$

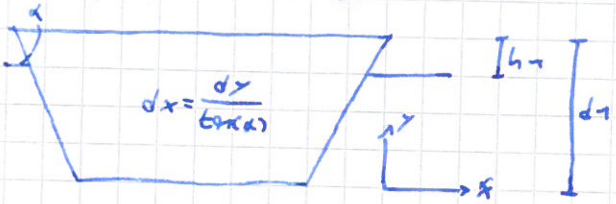
Kraft in x-Richtung:

Wandverlauf spielt keine Rolle

$$dF_x = P_a + \rho g (h_0 + y) \cdot \overset{\text{Tiefe}}{b} \cdot dy$$

$$F_x = \int_{y_1}^{y_2} (P_0 + \rho g (h_0 + y)) \cdot b \, dy = \int_0^L (P_0 + \rho g (h_0 + y)) \cdot b \cdot dy$$

Mit projezierter Fläche



$A_{proj} \cdot$ Druck in mittlerer Höhe:

$$F_x = \underbrace{-\left[P_0 + \rho g \left(\frac{d_1 - h_1}{2}\right)\right]}_{\text{Druck mittlere Tiefe}} \cdot \underbrace{(d_1 - h_1) \cdot b_1}_{A_{proj}}$$

Kraft in y-Richtung

Wandverlauf!

$$dF_y = P_a + \rho g (h_0 + y) b \, |dx|$$

Geradengleichung Wandverlauf $y = -x + L$

→ $dx = -dy$

$$dF_y = P_0 + \rho g (h_0 + y) b \, dy$$

$$F_y = \int_0^L (P_0 + \rho g (h_0 + y) b \, dy$$

Berechnung des Momentes um Punkt A

$$dM_A = -|dF_x| y + |dF_y| x$$ (siehe oben)

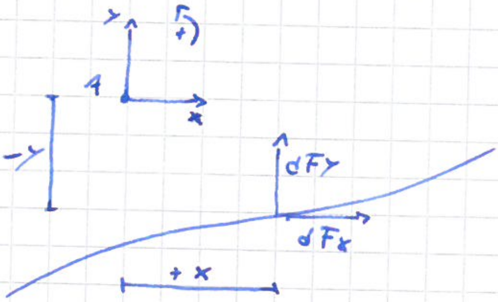
$$dM_A = -(P_0 + \rho g (h_0 + y) b \cdot dy) y + (P_0 + \rho g (h_0 + y) b \, dy) x$$

$$dM_A = -\rho g (h_0 + y) \cdot b \cdot dy \cdot y + \rho g (h_0 + y) \cdot b \cdot dy \cdot x$$

mit Gerade: $y = -x + L$ → $x = L - y$

$$dM_A = \rho g b (h_0 + y)(L - 2y) dy$$

$$M_A = \int_0^L \rho g b (h_0 + y)(L - 2y) dy$$



$$dM_A = -y \, dF_x + x \, dF_y$$

Bsp. Aufgabe : Erhitzen von Stickstoff damit Boje auf bestimmter Höhe bleibt

1. Masse ~~vom~~ im Körper vor Erwärmung : $M_{N_2} = \rho_{N_2,1} \cdot V_{N_2,1} = \frac{\pi}{4} d_S^2 \,(H_S - H_{S,CH_4,1})$

2. Verdrängtes Volumen nach Erwärmung: (neue Höhe) $V_V = \frac{\pi}{4} d_S^2 \,(H_S - H_0)$

3. $F_A = F_G \longrightarrow$ Menge des Gases nach Erwärmung : $\rho_{CH_4}\, g\, V_V = g\,(M_{ZP} + V_{CH_4}\rho_{CH_4} + M_{N_2})$

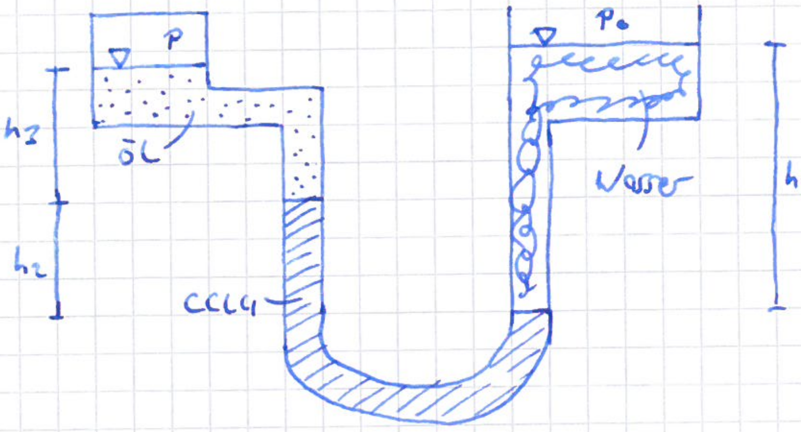
   $\longrightarrow V_{CH_4,2}$

4. Volumen Stickstoff nach Erwärmen : $V_{N_2,2} = V_S - V_{CH_4,2}$

5. Temperatur nach Erwärmen (über $p_1 = p_2$) :

   $$T_2 = \frac{\rho_{N_2,1}}{\rho_{N_2,2}} T_1 = \frac{V_{N_2,2}}{V_{N_2,1}} \cdot \frac{M_{N_2}}{M_{N_2}} T_1$$

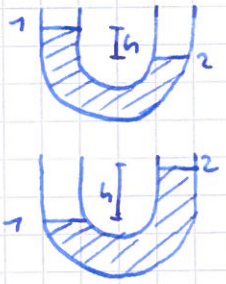
Wassersäule



Druck links auf Höhe + $\overset{!}{=}$

$\overset{!}{=}$ Druck rechts auf Höhe +

$$p + \rho_{öl}\, h_3\, g + \rho_{CCl_4}\, h_2\, g \overset{!}{=} p_0 + \rho_W\, g\, h_1$$



$$p_1 + \rho g h = p_2$$
$$p_2 - p_1 = \rho g h$$
$$p_2 + \rho g h = p_1$$
$$p_2 - p_0 = -\rho g h$$

$$p_2 - p_3 = \Delta p_{23}$$

Schwebebedingung

Auftrieb = Gewichtskraft

$\rho_F \cdot g \cdot V_V = m \cdot g$ $\quad m \mathrel{\hat{=}} (m_{leer} + m_{Befüllung})$ $\quad \rightarrow \rho = \frac{p}{RT}$

evtl. m durch ρV ersetzen : $F_G = g \cdot (V_1 \rho_1 + V_2 \rho_2)$ $\quad p = RT\rho$

Eintauchtiefe über V_V:

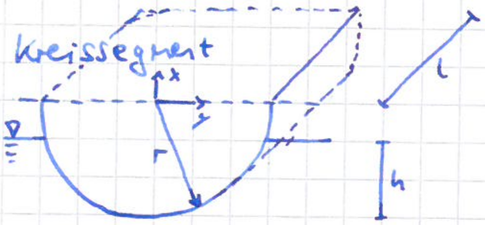
evtl erst F_G ausrechnen, falls da alles gegeben, → dann V_V → überlegen woraus sich V_V zusammensetzt → z.B. Eintauchtiefe bestimmen.

Max. Beschleunigung $a_{max} = \frac{F_{A,max} + F_{W,max}}{m}$ mit $F_{W,max} = \frac{\rho}{2} \overset{\text{Sinkgeschw.}}{v^2} \cdot A \cdot c_W$

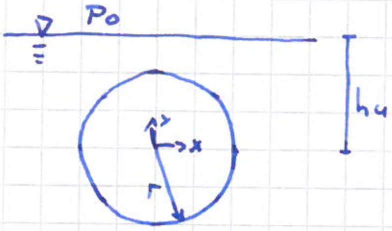
Wasserstand in Werft : $h_W = \frac{V_W + V_V}{L_x \cdot L_z}$

$V_W \mathrel{\hat{=}}$ Wasservolumen in Werft
$L_{x,z} \mathrel{\hat{=}}$ Grundfläche der Werft

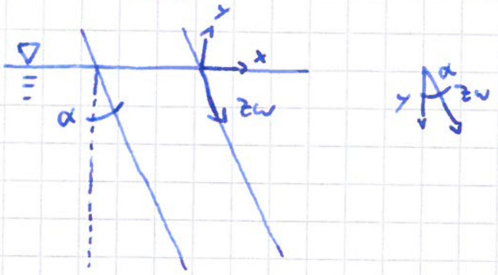
Wandverläufe



$$V_v = l \cdot 2 \cdot \underbrace{\int_{-r}^{-r+h} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx}_{=A}$$



$$\left.\begin{aligned} p(y=0) &= p_0 + \rho \cdot g \cdot h_u \\ y(\varphi) &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}\right\} p(\varphi) = p_0 + \rho \cdot g (h_u - r\sin(\varphi$$



$$\cos(\alpha) = -\frac{y}{z_w} \rightarrow z_w(y) = -\frac{1}{\cos(\alpha)} y$$

$$\rightarrow p(z_w) = p_0 - \rho \cdot g \cdot y(z_w) = p_0 + \rho \cdot g - \cos(\alpha) \cdot z_w$$

Viskositäten

Gase : $\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{T_0 + T_S}{T + T_S} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}$ Luft : $T_S = 112\,K$ $\eta_0 = 17,1 \cdot 10^{-6}\,Pas$ bei $T_0 = 273,16K$

Flüssigkeiten : $\frac{\eta}{\eta_0} = \exp\left(\frac{T_A}{T + T_B} - \frac{T_A}{T_0 + T_B}\right)$ $T \hat{=}$ gegebene Temp in °K

$\hookrightarrow \eta_{0°C}$

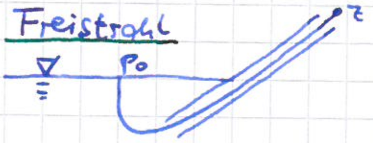
Wasser : $T_A = 506K$, $T_B = -150\,K$ $T_0 = 273,16K$

$\eta_0 = 1,79 \cdot 10^{-3}\,Pas$ (oder η_0, wenn gegeben)

0°K $\hat{=}$ -273,15°C

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$; $\eta = \mu \hat{=}$ dyn. Viskosität ; $\nu \hat{=}$ kin. Viskosität

Freistrahl



Freistrahlbedingung: $p_0 = p_2$; Freistrahl unter Wasser beachten

Volumenstrom

$\dot{V} = Q = v \cdot A$ $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

$\dot{V} = H \cdot \int_{x_1}^{x_2} v(x)\, dx$

$v = \frac{\dot{Q}}{A}$

Impulsstrom

$F = \rho \cdot v^2 \cdot H = \rho \cdot H \cdot \int_{x_1}^{x_2} v(x)^2\, dx$

aus $F = \dot{I} = m\dot{a} = Q \cdot \rho \cdot v(x)$

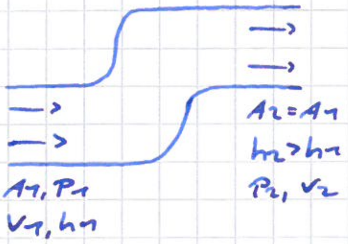
$F = \rho \cdot v^2 \cdot A$

Konti-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho \, dV + \oiint_S \rho \underline{v} \, dS = 0$$

Stromröhre: $\dot{m} = -V_1 \cdot A_1 \cdot \rho_1 + V_2 \cdot A_2 \cdot \rho_2$

Einströmen ⊖ ; Ausströmen ⊕ [auf $\vec{n}$ achten]



$A_1 V_1 = V_2 A_2$; $P_{dyn1} = P_{dyn2}$; $P_{ges} = P_{stat} + P_{dyn} + \rho g h$

Impulssatz

$$\iiint \frac{\partial (\rho \underline{v})}{\partial t} dV + \oiint_S \rho \underline{v} (\underline{v} \underline{n}) \, dS = F_p + F_f + F_k + F_R$$

Kraft auf Körper … = $-F_k$

Kraft auf Fluid … = $+F_k$

Vorgehen :

1) Wahl des KOS → Impulssatz aufstellen mit … $+ F_{nx}$

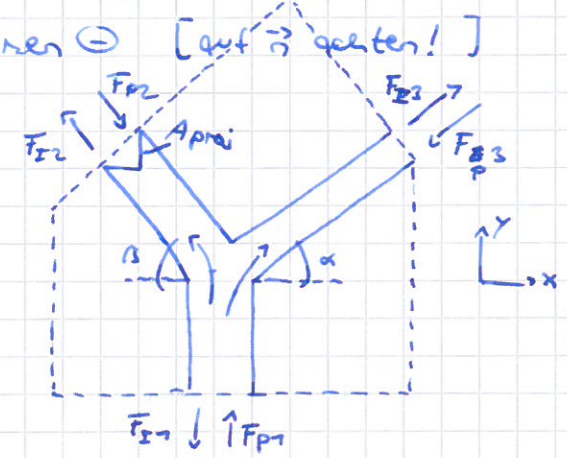
2) Wahl der KV – am Rand müssen alle Zustände → $F_x = -F_{nx}$ … so weiter rechnen

bekannt sein: $\underline{F_p}$: Druckkräfte; wirken von außen auf KV
→ F_p = Druck · Fläche
↗ $= \rho \cdot g \cdot V$
$\underline{F_f}$: Volumenkräfte; innerhalb der KV; z.B. G (bei flüssigen Medien)
→ keine Rolle falls horizontal (G in z-Richtung, kein G in y, x Richt,
$\underline{F_k}$: Körper auf den Strömung Kraft ausübt
$\underline{F_R}$: Reibungskräfte auf Rand der KV

3) Kräfte in Skizze einzeichnen

4) Formel in x- und y-Richtung lösen.

Rausströmen ⊕ ; reinströmen ⊖ [auf $\vec{n}$ achten!]



Kräfte einzeichnen :

$\oiint_S \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dS$

$= F_p + F_f + F_k + F_R$

$= -F_k + (P - P_0) \cdot A_{proj}$

Impulsströme immer raus!
Druckkräfte immer rein!

P_0 wirkt überall von außen auf KV

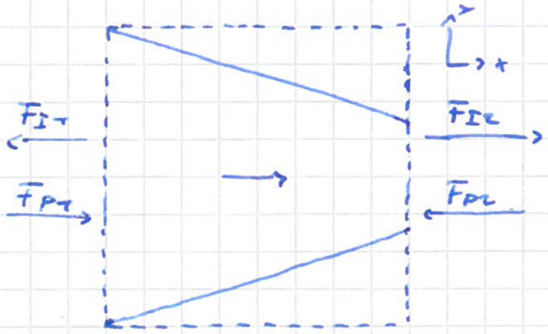
A_{proj} über ______

Falls alles Freistrahl dann keine Druckkräfte

$\left(\sum F_p = \sum F_I - F_k \right)$

F_I
$-\rho v_1^2 \cdot A_1 + \rho v_2^2 A_2 =$
F_p
$= (P_1 - P_\infty) A_1 -$

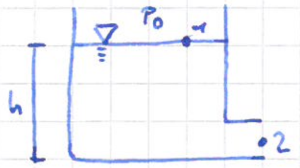
$- (P_2 - P_\infty) A_2 \quad + F_{Nx}$



Bernoulli

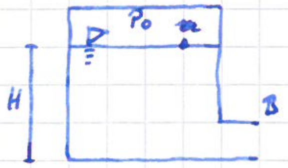
Druckform : $p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho \cdot g \cdot \cancel{\xi} z = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho \cdot g \cdot z$

Toricelli : $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ falls $p_1 = p_2 = p_0$ und $v_1 \approx 0$



$\rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ $\qquad \dot V_2 = v_2 \cdot A_2$

Zeit bis vollständig entleert!



$$A_{Kessel} \cdot v_{sink} = A_{Rohr} \cdot v_B$$

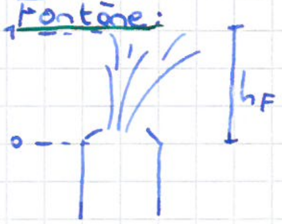
$$\hookrightarrow -\frac{dh}{dt} \qquad \hookrightarrow \sqrt{2gh}$$

$$\rightarrow -\frac{dh}{dt} \cdot \frac{\pi}{4} d_K^2 = \sqrt{2gh} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d_B^2$$

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} = \left(\frac{d_B}{d_K}\right)^2 \sqrt{2g}\, dt$$

$\longrightarrow$ Integration $\int_H^h = \int_0^t \quad \dots \quad t(h=0)$

Fontäne:



Bernoulli von 0 nach 1: $v_{Düse} = \sqrt{2gh_F}$

Bernoulli instationär und Reibungsfrei

$$p_1 + \rho g H_1 + \overset{1=0}{\cancel{\frac{\rho}{2} v_1^2}} = \overset{p_2+}{} \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho \underbrace{\int_1^2 \frac{\partial v_z}{\partial t} ds}_{\approx \frac{dv_z}{dt} \cdot L}$$

$\downarrow$

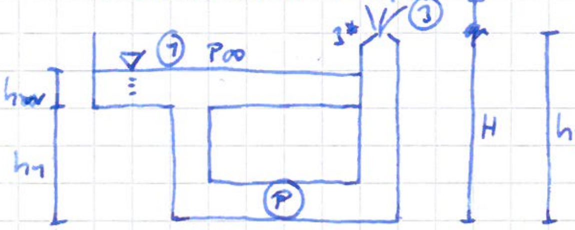
$$p_1 + \rho g H_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \overset{\to v_z}{v_2^2} + \rho \frac{dv_z}{dt} L$$

Bsp: 99% Endgeschw: $0{,}99 \cdot v_{stat}$
v_{stat} vorher ausgerechnet

nach $\frac{dv}{dt}$ umstellen

$$dt = \dots dv \longrightarrow \Delta T = \int_0^{\Delta T} dt = \int_0^{\dots v_{stat}} \dots v_z \, dv_z = \dots$$

Bernoulli mit Pumpen



Bernoulli von 1-3 : $v_1 = 0$, $v_3 = 0$

$$\rho g (h_w + h_1) + \Delta p_p + \cancel{p_{\infty}} = \rho \cdot g \cdot H + \cancel{p_{\infty}}$$

Druckerhöhung durch Pumpe: $\Delta p_p = \dots$

Pumpleistung : $P_p = \frac{\Delta p_p \dot V}{\eta}$

Druck in der Düse: $1 \rightarrow 3^*$ $\quad \rho g (h_w + h_1) + \Delta p_p + p_{\infty} = \frac{\rho}{2} v^2 + \rho \cdot g \cdot h_2 + p_3^*$

$p_3^* = \dots$

Verlustbehafteter Bernoulli

1. Prüfen ob laminar ($Re < 2300$) oder turbulent

$Re = \frac{v \cdot D}{\nu}$ oder $Re = \frac{v \cdot D_{hy} \cdot \rho}{\eta}$ oder $Re = \frac{v \cdot D_{hy} \cdot \rho}{\mu}$

2. Rohrreibungszahl λ bestimmen

$Re = \frac{v \rho d}{\eta}$ ← durchmesser Rohr

Moody : $\frac{ks}{D}$ berechnen liefert Kurve

→ Schnitt mit Reynolds-Zahl liefert λ-Wert

Berechnen: Im Moody schauen welche Formel gilt → λ berechnen

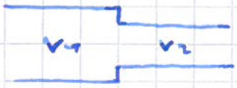
3. Bernoulli aufstellen : $\frac{\rho}{2} \alpha v_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot h = \frac{\rho}{2} \alpha v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 + \Delta p_{v_{1 \to 2}}$

$$\to \frac{\rho}{2} \alpha v_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{\rho}{2} \alpha v_2^2 + p_2 + \rho g h_2 + \underbrace{\boxed{\frac{\rho}{2} v_2^2 \left(\lambda \frac{L}{D_{hy}} + \zeta_{\dots} + \zeta_{\dots} \right)}}_{\text{Druckverlust infolge Reibung}}$$

Mit $\alpha = 1$ turbulent
$\alpha = 2$ laminar } nicht im Verlustterm!

Für turbulent: ($\alpha = 1$) : $\frac{\rho}{2} v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta + \zeta_{\dots} \right) + p_2 + \rho g h_2$

falls unterschiedliche Rohrdurchmesser : Reibungsterm immer mit der lokalen Geschwindigkeit :

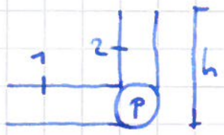


$\dots + \frac{\rho}{2} v_1^2 \lambda \frac{L}{D} + \frac{\rho}{2} v_2^2 \lambda \frac{L}{D}$

Pumpen und Turbinen

Pumpe : Energiezufuhr : Druckerhöhung ⟷ Turbine : Energieentnahme : Drucksenkung

Pumpleistung:



$\Delta p_P = p_2 - p_1 = p_2 - (p_0 + \rho g h)$

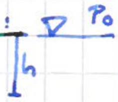
$P_P = \Delta p_P \cdot \underbrace{A \cdot v_1}$ $(Q = \dot{V})$ $[W]$

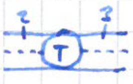
Mit Wirkungsgrad : $P_P = \frac{\Delta p_P \cdot A \cdot v_1}{\eta}$

Sieden: $p \overset{!}{=} 0$ → Sieden vor der Pumpe am Punkt des niedrigsten Druckes

$1 \to P$: $p_0 = \underbrace{p_{Sieden}}_{=0} + \frac{\rho}{2} v^2 (1 + \zeta_e)$ → $v = \dots$ $Q_{max} = V \cdot A = \dots$

Turbinenleistung :





$\Delta p_T = p_2 - (p_0 + \rho g h) \to P_T = \Delta p_T \cdot A V_2$

oder falls mit Wirkungsgrad: $P_T = \Delta p_T \cdot A V_2 \cdot \eta_T$ $[W]$ ← Wirkungsgrad

Ähnlichkeitstheorie : 0 : Original ; M : Modell

$Re_{,0} = Re_{,M}$

Wiederstandsbeiwerte: $c_{w,0} = c_{w,M}$

$F_W = \frac{\rho}{2} v_{sink}^2 A c_W$

↳ Projezierte Fläche, die für Wiederstand relevant ist!

max. Beschleunigung :

$a = \frac{F [N]}{m [kg]}$ $\left[\frac{m}{s^2} \right]$

Strömung KF

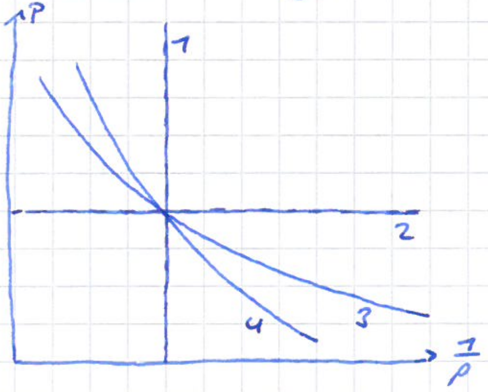
Welche Größen sind notwendig, um ein Strömungsfeld vollständig zu beschreiben?
Beschreibung durch 6 Größen: Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (u, v, w)$
Dichte ρ
Temperatur T
Druck P

Welche physikalischen Prinzipien macht man sich zur Bestimmung dieser Größen zu Nutze?
Konti-Gleichung, Energieerhaltung, Impulssatz ~~für~~ in x, y, z Richtung, Zustandsgleichung

Zusätzliche Stoffwerte:

dynamische Zähigkeit: $\eta \left[\frac{N \cdot s}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{m \cdot s}\right]$ Beachte $\rho = \frac{m}{V}$
Wärmeleitfähigkeit : $\lambda \left[J/smK \right]$
Spezifische Wärme bei konstanten Druck c_p bzw
konstanten Volumen c_v $\left[\frac{J}{kgK}\right]$

Zustandsänderungen:



1: isochor : $n = \infty$, $p = konst$ $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$

2: isobar : $n = 0$, $P = konst$ $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

3: isotherm : $n = 1$, $T = konst$ $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$

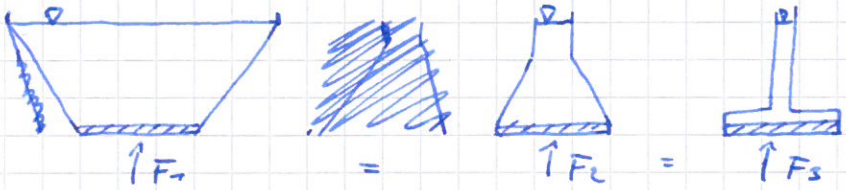
4: isentrop : $n = k = \frac{c_p}{c_v}$ $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/k}$

Die ZÄ inkompressibler Fluide verläuft isochor $k \to \infty$

Statischer Druck P_{stat}
dynamischer Druck $P_{dyn} = \frac{1}{2} \rho v^2$ "kin. Energie der Strömung"
Gesamtdruck $P_{ges} = P_{stat} + P_{dyn}$ "Staudruck"

Drucksonde
Prandtl-Rohr: ~~t~~
Pitot-Rohr
$\downarrow$
$P_{dyn} = P_{ges} - P_{stat}$

Pascalsches Paradoxon:



$P(z) = \rho \cdot g \cdot h$

$F_{Boden} = P(h) \cdot A_{Boden}$

Hydrostatischer Auftrieb:

~~Gleiche~~ Eine Menge Blei und Aluminium haben auf der Erde das Gleiche Gewicht, aber weil das Aluminium in der Atmosphäre durch den Auftrieb der Luft scheinbar leichter wirkt, sind die beiden Mengen im Vakuum nicht mehr gleich schwer sondern das Aluminium ist schwerer.

U-Rohr-Manometer:

$P_2 - P_1 = \rho \cdot g \cdot \Delta h$
Möglichkeiten, um größere differenzdrücke messen zu können:
- Δh erhöhen -> längeres U-Rohr
- ρ ändern -> z.B. Quecksilber
- Reihenschaltung -> $\Delta h = \Sigma_{i=1}^{N} \Delta h_i$

Wasserbehälter auf Drehtisch:

Auf die Wasserteilchen außerhalb der Drehachse wirken:

- Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}$
- Zentrifugalbeschleunigung $\vec{a}_z = \vec{\omega}^2 \cdot \vec{r}$
- Beschleunigung in Umfangsrichtung durch Reibung
- Coriolisbeschleunigung $\vec{a}_c = -2(\vec{\omega} \cdot \vec{v})$

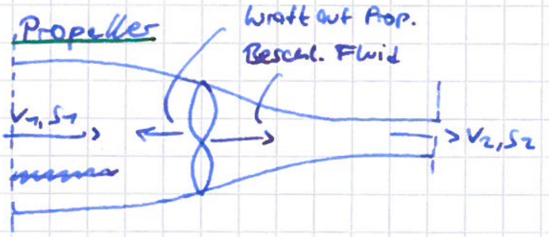
Stromlinie : Momentaufnahme, tangential zum Geschw.vektor (Wollfäden)

Bahnlinie : Weg eines einzelnen Teilchens wird verfolgt (Blatt auf Fluss)

Streichlinie : Momentaufnahme, Verbindung aller Teilchen, die irgendwann an einem bestimmten Punkt vorbeigekommen sind (Rauchfahne)

Zeitlinie : Momentaufnahme, Teilchen werden zum gleichen Zeitpunkt in verschiedenen Orten losgelassen und nach einiger Zeit gedanklich miteinander verbunden (Wasserstoffbläschen)

Propeller

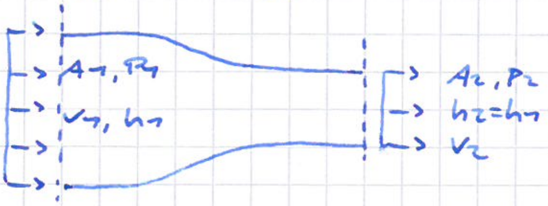


$P_1 = P_2 = P_\infty$

$P_{dyn,1} < P_{dyn,2}$

$V_1 < V_2$

$S_1 > S_2$



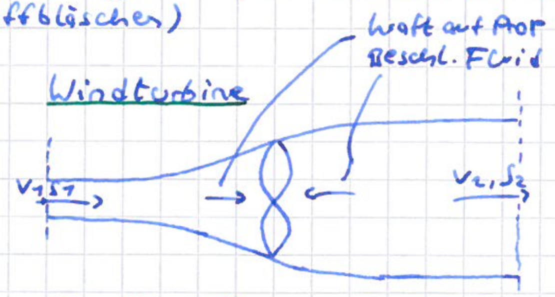
$V_1 < V_2$

$P_{dyn,1} < P_{dyn,2}$

$P_{stat,1} > P_{stat,2}$

$P_{ges,1} = P_{ges,2}$

Windturbine

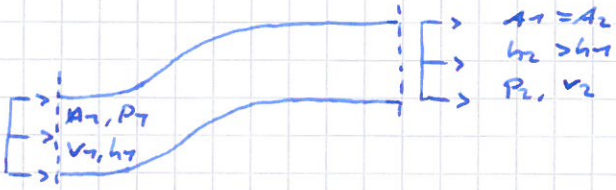


$P_1 = P_2 = P_\infty$

$P_{dyn,1} > P_{dyn,2}$

$V_1 > V_2$

$S_1 < S_2$



$V_1 = V_2$

$P_{dyn,1} = P_{dyn,2}$

$P_{stat,1} > P_{stat,2}$

$\rightarrow = F_{I,x}$

Impulsstrom ($\rho v^2 A$) einer Wasserspritze erhöhen $\nearrow = \rho \cdot V \cdot A$

Bei konst. Q : v erhöhen, A verkleinern, damit Q konst

Bei konst. v : A vergrößern

Bei konst. A : v erhöhen

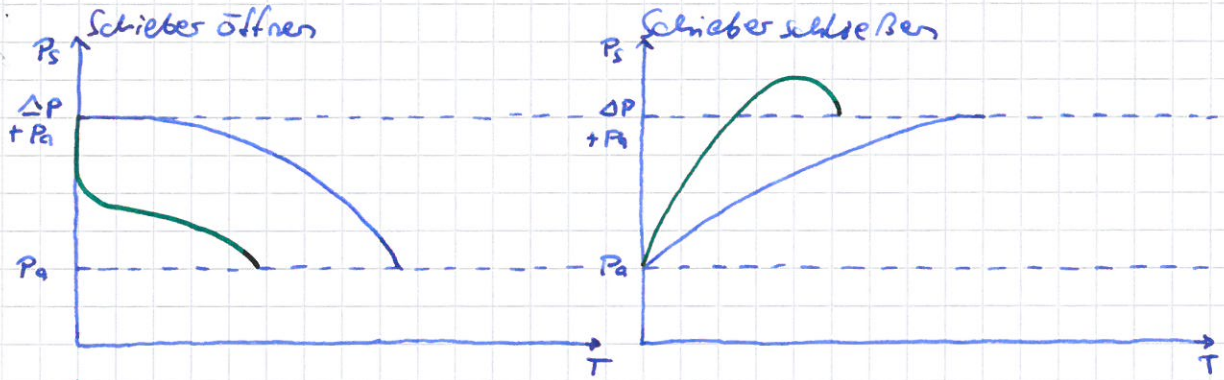
Bernoulli-Gleichung

Energieform : $\underbrace{\frac{v^2}{2}}_{\text{kin. Energie}} + \underbrace{\frac{p}{\rho}}_{\text{Druckenergie}} + \underbrace{g z}_{\text{Lageenergie}} = \text{const.}$ (Massebezogen)

Druckform : $\underbrace{\frac{\rho}{2} v^2}_{\text{dyn. Druck}} + \underbrace{p}_{\text{stat. Druck}} + \underbrace{\rho g z}_{\text{Lageenergie}} = \text{const.}$ (volumenbezogen)

Höhenform : $\frac{1}{2g} v^2 + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const.}$

Strömung kF



Zeitlicher Verlauf von P_s, wenn Schieber sehr langsam, oder sehr schnell geöffnet/geschlossen wird.
Unterschiedliche Verläufe durch Trägheit der Wassersäule.

Ahnlichkeitskennzahlen

↱ Maßgeblich für Wiederstandsbeiwert

Reynoldszahl Re, Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften
$Re \rightarrow \infty$: Reibungsfrei
Machzahl Ma, Einfluss der Kompressibilität
$Ma < 0,3$: kompressible Effekte vernachlässigbar
~~[illegible]~~ **Strouhalzahl Str**, Verhältnis der Flügeltiefe L zu Weg des Flügels pro Schwingung, "Eigenschwingung der Strömung"
Frequenz der Strömung = Eigenfrequenz des Körpers ⟶ Resonanz
Froudezahl Fr, Verhältnis sqrt(Trägheitskraft / Gewichtskraft)
Wasser: $L = h$ → Fr = Anströmgeschwindigkeit zur Ausbreitungsgeschwindigkeit der Oberflächenwelle im flachen Wasser

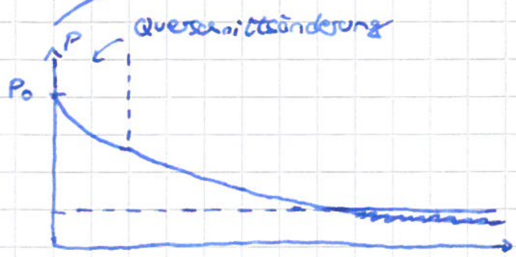
Hagen-Poiseuille-Strömung

Strömung im Zylinderrohr, für die gilt:

- Voll ausgebildete Strömung, weit weg vom Einlauf
- Stationär, inkompressibel, laminar
- Vernachlässigung von Volumenkräften

Laminare Strömung im gesamten Rohr bei $Re_D \leq 2300$
Unabhängig von der Lauflänge, kann bei konstantem Rohrquerschnitt nicht turbulent werden.

Entwicklung des Geschwindigkeitsprofils über den Querschnitt vom Rohrverlauf



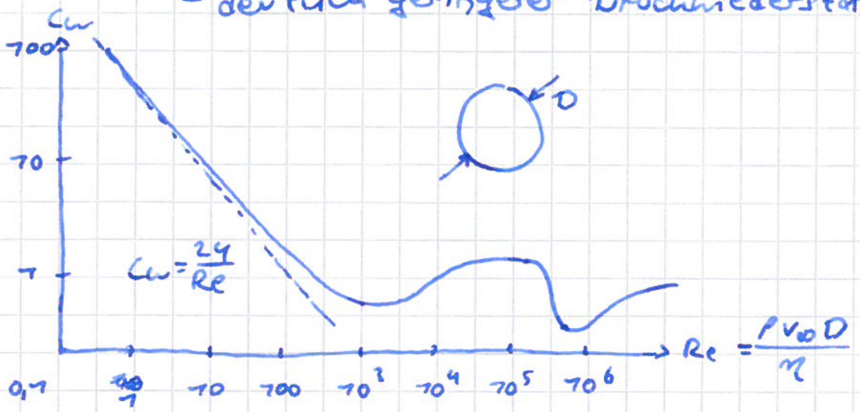
Statisches Druckverlust, bei laminarer Strömung bleibt Druck erhalten.

Wiederstandsbeiwert c_w

Einbruch des Wiederstandsbeiwert bei $Re_{krit} \approx 3 \cdot 10^5$
Maßgeblich abhängig von Reynoldszahl $Re = \frac{\rho \cdot v_{ref} \cdot L_{ref}}{\eta}$

→ Ursachen für den Einbruch bei kleinen Re-Zahlen:
- Laminare Grenzschicht
- Stark abgelößte ~~Grenzschicht~~ Strömung
- Hoher Druckwiederstand

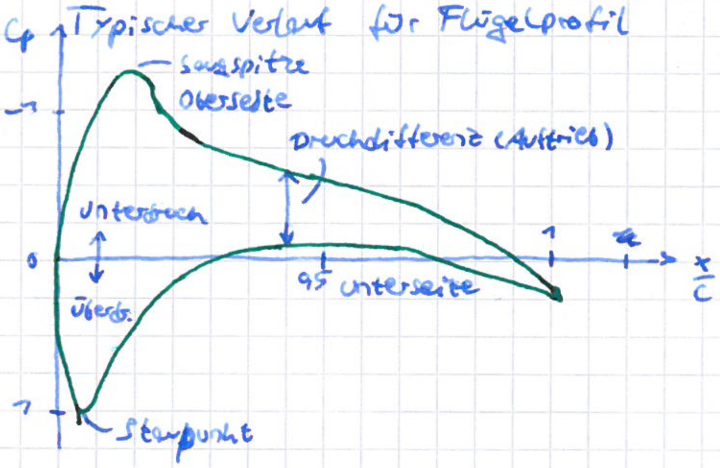
→ Ursache für den Einbruch bei $Re > Re_{krit}$
- Umschlag zu turbulenter Grenzschicht noch vor Ablösung
- Längeres anliegen der Strömung
- deutlich geringerer Druckwiederstand



Druckbeiwert $c_p = \frac{p - p_\infty}{(\frac{1}{2}\rho v^2)_\infty}$

Der Druckbeiwert skaliert den Druck auf eine von der Anströmgeschwindigkeit unabhängigen Größe, dadurch werden z.B. Messergebnisse aus verschiedenen Experimenten besser vergleichbar.

Typischer Verlauf für Flügelprofil



Aufgabe 1: Hydrostatik

(38P.) Für eine Heimfahrt bei Nacht und Nebel durch die Außenbezirke Stuttgarts haben Sie sich den alten Bus ihrer Großeltern geborgt (vergleiche Abb. 1-1). Aufgrund schlechter Sicht und unvorsichtigen Fahrens kommen Sie von der Straße ab und finden sich plötzlich mitsamt des Fahrzeugs inmitten des Max-Eyth-Sees wieder.

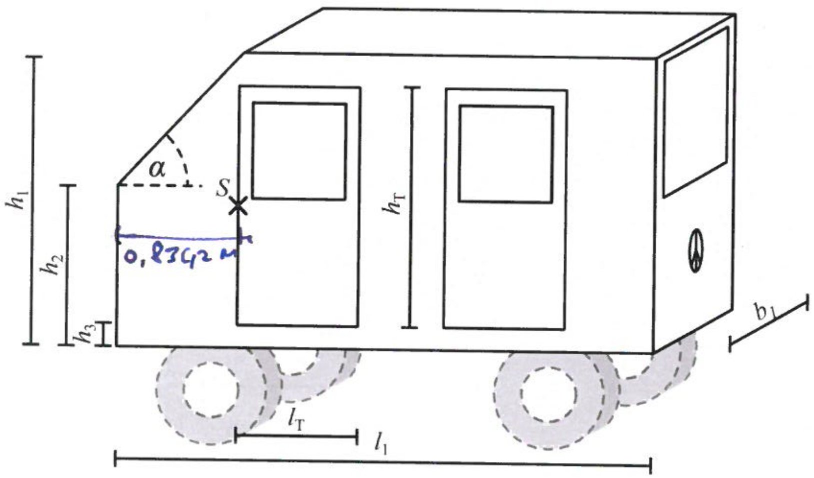


Abb. 1-1: Relevante geometrische Größen des Fahrzeugs

Gegeben

m_F	2580 kg	Masse des Fahrzeugs
ρ_L	1.024 kg/m^3	Dichte der Umgebungsluft
ρ_{H2O}	1000 kg/m^3	Dichte des Wassers
p_0	1,013 bar	Umgebungsdruck
g	9,81 m/s^2	Schwerebeschleunigung
α	40 °	Winkel Fahrzeugfront
b_1	1,9 m	Breite der Karosserie
h_1	2 m	Höhe des Fahrzeugs
h_2	1,3 m	Höhe der Front
h_3	0,2 m	Höhe Beginn Fahrertür
h_T	1,4 m	Höhe der Fahrertür
l_1	4,8 m	Gesamtlänge des Fahrzeugs
l_T	0,9 m	Länge der Fahrertür

Hinweise

- Für die Geometrie des Fahrzeugs ist vereinfachend Abb. 1-1 zu verwenden.
- Die Bereifung ist vollständig zu vernachlässigen.

- Die Wanddicke der Karosserie ist zu vernachlässigen.
- Der Innenraum des Fahrzeugs ist als vollständig leer anzunehmen.
- Die Aufgabenteile a) - b), c) - e) sowie f) & g) können unabhängig voneinander gelöst werden.

1a) Das Fahrzeug schwimmt zunächst im See. Aktuell dringt kein Wasser ins Innere ein. Stellen Sie die Bedingung für den beschriebenen Zustand auf und berechnen sie die Eintauchtiefe h_E des Fahrzeugs. (5)

1b) Am Boden des Fahrzeugs befindet sich ein Loch, durch welches nun Wasser in den Innenraum eindringen kann. Wie hoch steigt dieses, solange aus dem Innenraum keine Luft entweicht? Verwenden sie den Zusammenhang für ein ideales, isothermes Gas.Der Umgebungsdruck sowie der Anfangsdruck im Fahrzeug betragen p_0. **Notwert:** $h_E = 0{,}3\,\text{m}$ (6)

Luft entweicht und die Fahrerkabine und Hohlräume in der Karosserie beginnen sich nun ebenfalls mit Wasser zu füllen. Dass Fahrzeug sinkt auf Grund und bleibt unter einem Winkel $\beta = 60°$ dort stehen (siehe Abb. 1-2). Die Fahrertür befindet sich deutlich über der Wasserlinie im Innern der Kabine. Im mit Luft gefüllten Teil herrscht nun wieder p_0.

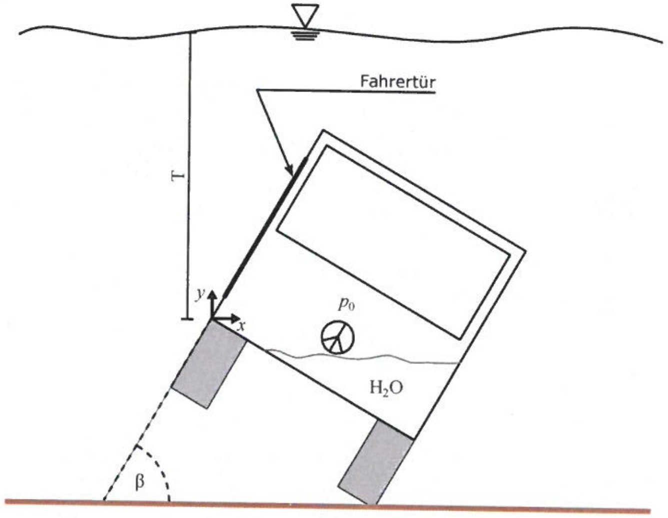


Abb. 1-2: Versunkenes Fahrzeug, Ansicht von hinten, Fahrertür links

1c) Stellen Sie den Druckverlauf $p(y)$ für den dargestellten Fall auf. Beachten Sie die Lage des Koordinatensystems. (1)

1d) Berechnen Sie die Horizontalkraft F_x und die Vertikalkraft F_y, die **von außen** auf die Fahrertür wirken. Stellen sie hierzu zunächst die Formeln für die entsprechenden Kräfte auf infinitesimale Flächenstücke auf. T sei 2,3 m. (10)

1e) Welche Gesamtkraft übt das Wasser auf die Türe aus? Können Sie die Tür von innen aus öffnen? Beachten Se hierzu den Fahrzeuginnendruck p_0. (5)
(*Notwerte:* $F_x = 125\,\text{kN}$, $F_y = -73\,\text{kN}$)

1f) Im Punkt S, mittig am linken Rand der Fahrertür, befindet sich ein Scharnier (siehe Abb. 1-1). Stellen sie zunächst den differentiellen Momentenvektor $\mathrm{d}M$ mit den allgemeinen Koordinaten für $S = (x_S, y_S, z_S)$ auf. Berechnen Sie die Momentenkomponente M_z. Berücksichtigen Sie dabei den Fahrzeuginnendruck p_0. Momente gegen den Uhrzeigersinn sind dabei als positiv zu behandeln. (8)

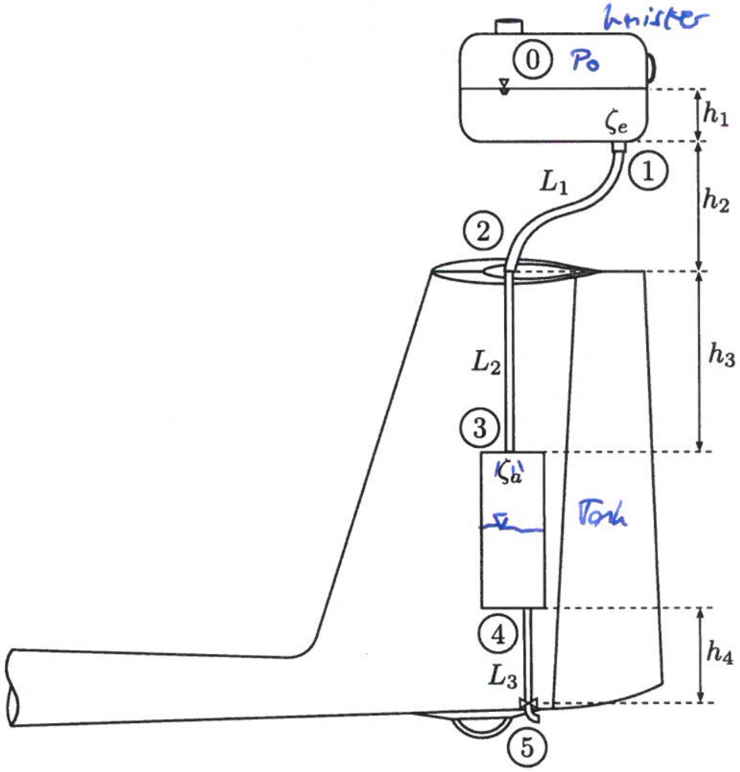
1g) Wie können Sie sich dennoch (ohne Hilfsmittel) aus dem Fahrzeug befreien? Erklären Sie wie Ihr Ansatz funktioniert. (2)

Aufgabe 2: Heckwassertank Segelflugzeug

(39 P.) Neben den Wasserballasttanks im Flügel besitzen Segelflugzeuge einen zusätzlichen kleineren Wassertank im Seitenleitwerk, mit dem die gewünschte Schwerpunktlage eingestellt wird. Dieser Heckwassertank wird in der Regel mit einem über dem Leitwerk gehaltenen Kanister betankt. Zu dem mittig im Seitenleitwerk montierten Tank gibt es Zu- und Ableitungen. Das Ablassventil befindet sich auf der Rumpfunterseite hinter dem Spornrad.

Hinweise

- Beachten Sie die Abbildung, dort sind wichtige Maße definiert.
- Der an Position 5 skizzierte Auslasskrümmer ist nur für Teilaufgaben e)-f) relevant
- Die Teilaufgabengruppen a)-c), d), e)-f) und g) können unabhängig voneinander gelöst werden.



Gegeben

Dichte Wasser	ρ	$1000\,\mathrm{kg/m^3}$
Kinematische Viskosität Wasser	ν	$1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$
Höhe des Wassertanks	h_T	0,6 m
Breite des Wassertanks	b_T	0,15 m
Länge des Wassertanks	l_T	0,07 m
Durchmesser der Betankungsleitung L_1	d_{L1}	8 mm
Durchmesser der Zuleitung L_2	d_{L2}	6 mm
Durchmesser der Ableitung L_3	d_{L3}	6 mm
Länge der Leitung L_1	l_{L1}	0,5 m
Länge der Leitung L_2	l_{L2}	0,4 m
Länge der Leitung L_3	l_{L3}	0,15 m
Höhe des Wasserstands im Kanister	h_1	0,1 m
Höhe der Zuleitung	h_3	0,4 m
Höhe der Ableitung	h_4	0,15 m
Sandrauhigkeit der Zu- und Ableitung	k_s	0,012 mm
Verlustbeiwert am Einlass	ζ_e	0,25
Verlustbeiwert am Auslass	ζ_a	1,0
Umgebungsdruck	p_∞	1,0 bar
Erdbeschleunigung	g	$9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

Zu Beginn wird der Betankungsvorgang des Wassertanks betrachtet. Das Auslassventil ist geschlossen, das Volumen der Ableitung L_3 wird vernachlässigt. Der Kanister ist belüftet, so dass darin immer Umgebungsdruck herrscht.

2a) Berechnen Sie den notwendigen Volumenstrom, um den Hecktank in 1 min komplett zu füllen (2)

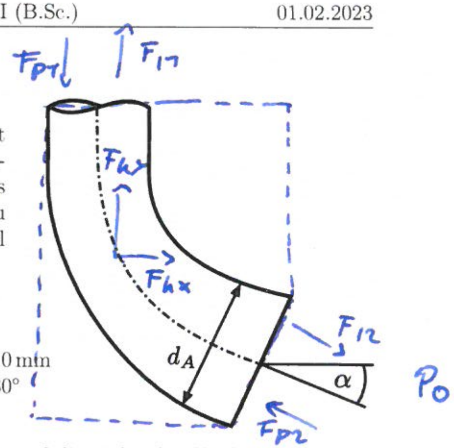
2b) Wie groß ist die Höhe h_2, in der der Kanister über dem Leitwerk gehalten werden muss, um den oben berechneten Volumenstrom zu erreichen? Vernachlässigen Sie jegliche Reibungseinflüsse für diese Berechnung. Welcher Strömungszustand liegt in der Zuleitung L_2 vor? (6)

2c) Auf wieviel Prozent des ursprünglichen Wertes sinkt dieser Volumenstrom, wenn die Reibung in den beiden Leitungen zwischen Kanister und Wassertank genauso wie die Verluste am Ein- und Auslass berücksichtigt werden? Verwenden Sie für die Berechnung den mittels reibungsfreier Rechnung bestimmten Strömungszustand und die daraus resultierenden Verlustbeiwerte λ der Leitungen! (12)

Nun seien der Wassertank und die Ableitung L_3 komplett gefüllt und das Ablassventil geschlossen. Der Pilot des Segelfliegers geht in einen Sinkflug über, ist dabei aber unachtsam und wird zu schnell. Um ein Überschreiten der Höchstgeschwindigkeit zu verhindern, muss er einen Abfangbogen fliegen. Dabei tritt ein Lastvielfaches von dem 6-fachen der Erdbeschleunigung auf. 6g

2d) Berechnen Sie den auftretenden Druck am Ablassventil während dieses Abfangbogens. Gehen Sie von einem komplett gefüllten Wassertank aus, in der Zuleitung L_2 befindet sich jedoch kein Wasser. (2)

Vor der Landung wird der gesamte Wasserballast abgelassen, damit ein möglichst niedriges Landegewicht erreicht wird. Um ein Verschmutzen des Segelflugzeuges durch das abgelassene Wasser zu verhindern, befindet sich nach dem Ablassventil ein Ablasskrümmer.



Gegeben

Enddurchmesser des Auslasskrümmers	d_A	10 mm
Winkel des Auslasskrümmers	α	30°

2e) Zeichnen Sie ein geeignetes Kontrollvolumen und die wirkenden Kräfte ein. (3)

2f) Stellen Sie den Impulssatz auf und berechnen Sie die auf den Abklasskrümmer wirkenden Kräfte. Gehen Sie dabei von einer reibungsfreien Strömung direkt nach dem Öffnen des Ablassventils mit konstantem, maximalem Wasserpegel im Tank aus. Vernachlässigen Sie ferner den Höheneffekt am Auslasskrümmer selbst. (10)

Für die Berechnung der Ablasszeit des Heckwassertanks kann der sich verändernde Wasserpegel nicht mehr vernachlässigt werden.

2g) Berechnen Sie die Zeit, bis der vollständig gefüllte Heckballasttank komplett entleert ist. Vernachlässigen Sie dabei sämtliche Reibungseinflüsse und den Auslasskrümmer. Der Auslassvorgang gilt als beendet, sobald der Tank leer ist, das übrige Wasser in der Ableitung L_3 wird vernachlässigt. Gehen Sie von einem quasi-stationären Leerungsvorgang aus. (4)

Strömung Klausur F23

①a) Einsinken bis Kräftegleichgewicht $F_A \overset{!}{=} F_G$

Gewichtskraft Fahrzeug $F_G = m_F \cdot g = 25{,}37\ kN$

Annahme: $h_E < h_2$: Auftrieb = Gewichtskraft

$\rho_w \cdot g \cdot b_1 \cdot l_1 \cdot h_E = m_F \cdot g \longrightarrow h_E = 0{,}28\,m$

b) Ideale Gasgleichung $pV = \underbrace{mRT}_{=const.}$

Volumen Fahrzeug ohne Wasser: $l_1 \cdot b_1 \cdot h_1 - \frac{1}{2\tan(\alpha)} b_1 \cdot (h_1 - h_2)^2 = V_0$

$V_0 = 17{,}64\ m^3$

Druck auf Höhe des eingedrungenen Wassers: $p_1 = p_0 + \rho \cdot g \cdot (h_E - h_w)$

Neues Innenvolumen (solange nicht $h_2 < h_w$) $V_1 = V_0 - l_1 \cdot b_1 \cdot h_w$

Gleichsetzen: $p_0 V_0 = p_1 V_1$

$h_w = 0{,}049\,m$

c) $p(y) = p_0 + \rho_w \cdot g \cdot (T - y)$

d) $F_x = \int_{A_x} p(y)\, dA_x = l_T \int_{y_1}^{y_2} (p_0 + \rho_w \cdot g \cdot (T - y))\, dy$

Mit $y_1 = \sin(\beta) h_3$ und $y_2 = \sin(\beta)(h_3 + h_T)$

$F_x = 126{,}8\ kN$ (Oder über $p_s \cdot A_{proj} = F_x$)

$F_y = -\int_{A_x} p(y)\, dA_x = -l_T \int_{x_1}^{x_2} (p_0 + \rho_w g (T - y))\, dx$

$dy = \tan(\beta) \cdot dx$

$F_y = -73{,}2\ kN$

e) $F_{ges} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 146\ kN$

Bedingung für Tür öffnen: $F_{Arm} + p_0 \cdot l_T \cdot \overset{h_T}{\cancel{b_T}} > F_{ges}$ $F_{Arm} \overset{!}{>} 18\ kN$

nicht möglich zu öffnen für Menschen.

f) Momentenaufgabe ... ↯

g) Fenster herunter lassen / abwarten bis Auto vollgelaufen ist, dann ist Türe einfach zu öffnen.

② a) $\dot{V} = \frac{l_T \cdot b_T \cdot h_T}{t} = 1,05 \cdot 10^{-4} \ \frac{m^3}{s}$

b) Freistrahl in den Tank : $\dot{V} = v \cdot A$

$V_3 = 3,714 \ \frac{m}{s}$

Bernoulli von 0 nach 3

$\rho \cdot g \cdot (h_1 + h_2 + h_3) + P_0 = \frac{\rho}{2} V_3^2 + \overset{\to = P_0}{P_2}$

$h_2 = 0,2029 m$

Strömungszustand : $Re = \frac{d_{L2} \cdot v_3}{\nu} = 22282 > 2300$

→ Turbulent

c) Bernoulli 0 → 3 mit Verlusten

$\rho g H + P_0 = \frac{\rho}{2} V_3'^2 + P_3 + \Delta P_{L1} + \Delta P_{L2}$

$\frac{k_s}{d_{L2}} = 0,002$ $\qquad \frac{k_s}{d_{L1}} = 0,0015$

$V_{L2} = 2,089 \ \frac{m}{s}$ $\qquad V_3' =$ gesucht

$\lambda_{L2} = 0,0293$ (Moody) $\qquad \lambda_{L1} = 0,0298$ (Moody)

$Re_{L1} = 16711$ → Turbulent $\qquad Re_{L2} = \frac{v_3' d_{L2}}{\nu}$

$\Delta P_{L1} = \frac{\rho}{2} V_2^2 \left(\lambda_{L1} \frac{l_{L1}}{d_{L1}} + \zeta_E\right)$ $\qquad \Delta P_{L2} = \frac{\rho}{2} V_3'^2 \left(\lambda_{L2} \frac{l_{L2}}{d_{L2}} + \zeta_A\right)$

konti : $V_3' A_3 = V_2 A_2$

$\rho g H + P_0 = \frac{\rho}{2} V_3'^2 + P_0 + \frac{\rho}{2}\left(V_3' \left(\frac{d_{L2}}{d_{L1}}\right)^2\right)^2 \left(\lambda_{L1} \frac{l_{L1}}{d_{L1}} + \zeta_E\right) + \frac{\rho}{2} V_3'^2 \left(\lambda_{L2} \frac{l_{L2}}{d_{L2}} + \zeta_A\right)$

$V_3' = 1,7274 \ \frac{m}{s}$

$\dot{V}' = V_3' \cdot A_3 = 4,884 \cdot 10^{-5} \ \frac{m^3}{s}$ $\qquad$ 46,5% von $\dot{V}$

d) Tiefendruck mit $g' = 6 \cdot g$

$P_5 = \rho \cdot g' \cdot (h_T + h_4) + P_0 = 1,44$ bar

e) Siehe Skizze auf Blatt

f) Bernoulli Wasseroberfläche bis Auslass :

$\rho \cdot g \cdot (h_T + h_4) + P_0 = \frac{\rho}{2} V_6^2 + P_0 \quad \to V_6 = 3,836 \ \frac{m}{s}$

Geschwindigkeit v_5 mit konti : $V_6 A_6 = V_5 A_5 \quad \to V_5 = 10,66 \ \frac{m}{s}$

Bernoulli 5 → 6 ohne Höhenterm: $P_5 + \frac{\rho}{2} V_5^2 = P_0 + \frac{\rho}{2} V_6^2$

$P_5 = 5,054 \cdot 10^4$ Pa $= 0,5054$ bar

Strömung Klausur F23

Impulssatz x-Richtung:

$-F_{P,6}\cos\alpha = F_{I,6}\cos\alpha - F_{Ax}$

$-(p_0-p_0)A_6\cos\alpha = \rho v_6^2 A_6\cos\alpha - F_{Ax}$

$F_x = -F_{Ax} = -1\,N$

Impulssatz y-Richtung

$-F_{P,5} + F_{P,6}\sin\alpha = F_{I,5} - F_{I,6}\sin\alpha - F_{Ay}$

$F_y = -F_{Ay} = -1{,}24\,N$

8) Ausströmung aus Gefäß mit Wasserspiegelabsenkung

$\Delta T = \frac{A_1}{A_2}\cdot\sqrt{\frac{2}{g}}\cdot(\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2})$

$A_1 = l_T\cdot b_T = 0{,}0105\,m^2$

$A_2 = \pi\cdot\left(\frac{d_{LS}}{2}\right)^2 = 2{,}827\cdot 10^{-5}\,m^2$

$z_1 = h_a + h_T = 0{,}75\,m$

$z_2 = h_a = 0{,}15\,m$

$\Delta T = 80{,}27\,s$

Aufgabe 1: Titansonde

(33 P.) Zur Erforschung der Methanseen auf dem Saturnmond Titan ist eine Mission geplant, bei der ein Tauchroboter zum Einsatz kommen soll. Die Sonde besteht dabei aus zwei Komponenten: dem Tauchroboter an sich sowie einer Boje, welche als Basis für den Tauchroboter dienen soll. Die Boje ist Abb 1-1 dargestellt, der Tauchroboter befindet sich in Teil A noch innerhalb der Boje.

Hinweise

- Die Teilaufgaben in Teil A und Teil B sind voneinander unabhängig lösbar.
- Die Atmosphäre des Titan soll als reiner Stickstoff angenommen werden, für den die ideale Gasgleichung $p = \rho RT$ gilt. Die Seen bestehen aus reinem Methan.
- Gewicht und Volumen der Außenwände des Schwimmkörpers sind zu vernachlässigen.

Teil A: Boje

Zunächst befindet sich die Boje mitsamt dem Tauchroboter in der Endphase der Landung, bei der sie am Fallschirm hängend durch die Stickstoffatmosphäre des Mondes zu einem Methansee gleitet. Die Boje an sich besteht aus drei Komponenten: dem Schwimmkörper in der Mitte, einem Ballastgewicht zur Stabilisierung bei der Landung sowie der Experimentenplattform an deren Spitze, in der sich zunächst auch der Tauchroboter befindet. Die Expermentenplattform wird nur mit ihrem Gewicht berücksichtigt, ihre Form und ihr Volumen spielen keine Rolle. Alle anderen Komponenten sollen dabei als *zylindrisch* im Querschnitt angenommen werden.

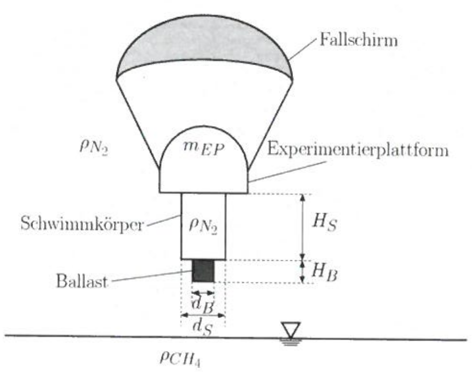


Abb. 1-1: Boje am Fallschirm vor der Landung

Gegeben

$H_S = 3\,\mathrm{m}$	Höhe Schwimmkörper
$H_B = 0{,}1\,\mathrm{m}$	Höhe Ballast
$d_S = 1\,\mathrm{m}$	Durchmesser Schwimmkörper
$d_B = 0{,}25\,\mathrm{m}$	Durchmesser Ballast
$m_{\mathrm{EP}} = 500\,\mathrm{kg}$	Masse Experimentalplattform
$\rho_{\mathrm{B}} = 7800\,\mathrm{kg/m^3}$	Dichte Ballast
$g = 1{,}35\,\mathrm{m/s^2}$	Gravitationsbeschleunigung Titan
$\rho_{CH4} = 450\,\mathrm{kg/m^3}$	Dichte flüssiges Methan
$p_{Titan} = 1.5\,\mathrm{bar}$	Oberflächendruck Titan
$T_{Titan} = 90\,\mathrm{K}$	Oberflächentemperatur Titan
$R_{N2} = 298\,\mathrm{J/kgK}$	Spezifische Gaskonstante Stickstoff

1a) Die Boje landet in dem Methansee und stabilisiert ihre Lage. Dabei sei der Schwimmkörper zunächst mit Umgebungsatmosphäre gefüllt. Welchen Tiefgang hat die Boje? (9)

1b) Nachdem sich die Boje stabilisiert hat, wird der Ballast abgeworfen und der Schwimmkörper mit Methan aus dem See befüllt, so dass der Schwimmkörper gerade noch $H_O = 0.25\,\mathrm{m}$ über der Wasseroberfläche herausschaut (siehe Abb. 1-2). Wie hoch muss der Schwimmkörper hierfür mit Methan gefüllt werden? (4)

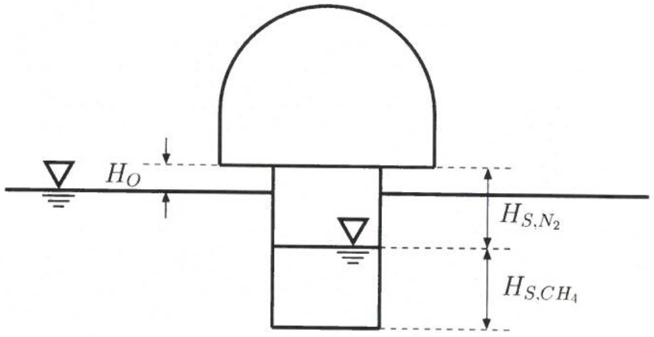


Abb. 1-2: Boje im See (ohne Ballastkörper)

1c) Für weitere Experimente soll die Boje etwas aus dem Wasser gehoben werden. Dafür wird der Stickstoff im Schwimmkörper soweit aufgeheizt, dass genügend Methan aus Ventilen im Schwimmkörper verdrängt wird, so dass die gewünschte Höhe von $H_{O,2} = 0.75\,\mathrm{m}$ erreicht wird. Auf welche Temperatur muss der Stickstoff aufgeheizt werden, damit $H_{O,2}$ erreicht wird? Etwaige Verdampfung von Methan wird hier vernachlässigt. Die Erwärmung findet isobar statt. Dabei bleibt die Masse an Stickstoff im Schwimmkörper konstant. (7)

Teil B: Tauchroboter

Nach einiger Zeit wird von der Boje der Tauchroboter in Form eines U-Bootes losgelassen, welcher den See erkunden soll. Zur Lageregelung im See ist ein Ventil angebracht, welches in den Rumpf integriert ist.

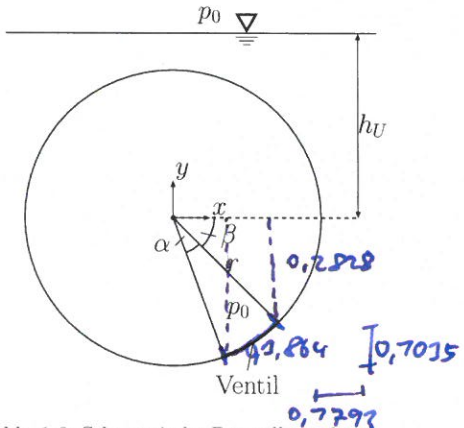


Abb. 1-3: Schematische Darstellung des Tauchroboters mit Druckventil

Das Ventil kann als Kreisbogen angenommen werden, welcher über einen Winkel von $\alpha = 20°$ über den Rumpf geht. Es beginnt am "oberen" Ende des Kreisbogens bei einem Winkel von $\beta = 45°$ unterhalb der Horizontalen (siehe Abb. 1-3). Der Rumpf hat dabei einen Radius von $r = 0{,}4\,\text{m}$. Die Breite des Ventils (in z-Richtung) beträgt $b = 0{,}2\,\text{m}$. Der Tauchroboter befindet sich zunächst auf einer Tiefe von $h_U = 10\,\text{m}$. Die Atmosphäre über dem See genauso wie im Inneren des U-Bootes hat weiterhin den Wert $p_0 = 1{,}5\,\text{bar}$.

Gegeben

$h_U = 10\,\text{m}$	Tauchtiefe Roboter
$\alpha = 20\,°$	Umfangswinkel Ventil
$\beta = 45\,°$	Winkelposition Ventilbeginn
$r = 0{,}4\,\text{m}$	Radius Tauchroboter
$b = 0{,}2\,\text{m}$	Breite Ventil (in z-Richtung)
$p_0 = 1.5\,\text{bar}$	Oberflächendruck Titan
$g = 1{,}35\,\text{m}/\text{s}^2$	Gravitationsbeschleunigung Titan
$\rho_{CH4} = 450\,\text{kg}/\text{m}^3$	Dichte flüssiges Methan

1d) Bestimmen Sie den Druckverlauf $p(\varphi)$ entlang der Tauchroboter-Hülle in Abhängigkeit vom Umlaufwinkel φ. (2)

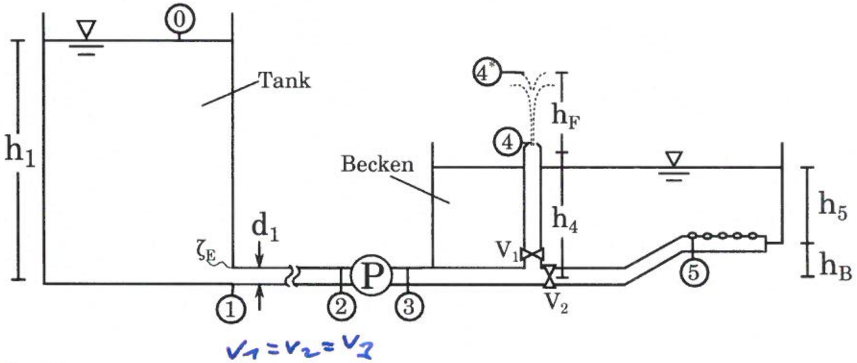
1e) Welche Kräfte in x und y-Richtung (F_x, F_y) mit welchem Gesamtbetrag (F_{ges}) wirken auf das Druckventil? (11)

Aufgabe 2: Schwimmbad

($40\frac{1}{2}$ P.) Aufgrund der steigenden Energiepreise wird ein Schwimmbad in der Nähe seit neustem mit Regenwasser betrieben, das in einem großen Tank aufgefangen und gereinigt wird. Damit wird ein Becken, das einen tiefen und einen flachen Bereich hat, betrieben. Im tiefen Bereich findet sich ein Fontänenrohr und im flachen ist der Boden mit Massagedüsen ausgestattet. Die verzweigte Wasserleitung kann mit zwei Ventilen geregelt werden, sodass entweder die Fontäne oder die Massagedüsen betrieben werden können.

Hinweise

- Beachten Sie die Abbildung, dort sind wichtige Maße definiert.
- Ab Teilaufgabe d) können sämtliche Verluste vernachlässigt werden.
- Die Teilaufgabengruppen a)-c), d), e)-f) und g) können unabhängig voneinander gelöst werden.



Gegeben

Dichte Wasser	ρ	$1000\,\text{kg}/\text{m}^3$
Kinematische Viskosität Wasser	ν	$1 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$
Höhe des Wassertanks	h_1	$5\,\text{m}$
Durchmesser der Leitung	d_1	$0{,}5\,\text{m}$
Durchmesser der einzelnen Massagedüsen	d_{MD}	$0{,}1\,\text{m}$
Höhe der Fontänenrohrs	h_4	$2\,\text{m}$
Höhe der Fontäne	h_F	$2\,\text{m}$
Höhe der Duesen bis zur Oberflaeche	h_5	$0{,}8\,\text{m}$
Höhe des Nichtschwimmerbeckens	h_B	$0{,}5\,\text{m}$
Sandrauhigkeit im Rohr	k_s	$0{,}6\,\text{mm}$
Länge der Rohrleitung bis zur Pumpe	$L_{1,2}$	$30\,\text{m}$
Länge der Rohrleitung bis zur Fontäne	$L_{3,4}$	$15\,\text{m}$
Verlustbeiwert am Einlass	ζ_E	$0{,}3$
Wirkungsgrad der Pumpe	η_P	$0{,}73$
Umgebungsdruck	p_∞	$1{,}0\,\text{bar}$
Druck vor der Pumpe	p_2	$1{,}1\,\text{bar}$
Erdbeschleunigung	g	$9{,}81\,\text{m}/\text{s}^2$

Zu Beginn ist das Ventil V_1 zum Fontänenrohr vollständig geöffnet und das Ventil V_2 zu den Massagedüsen geschlossen.

2a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit im Rohr bis zur Pumpe. Beachten Sie die Reibungsverluste dort. Treffen Sie dafür geeignete Annahmen und überprüfen Sie diese anschließend. (7)

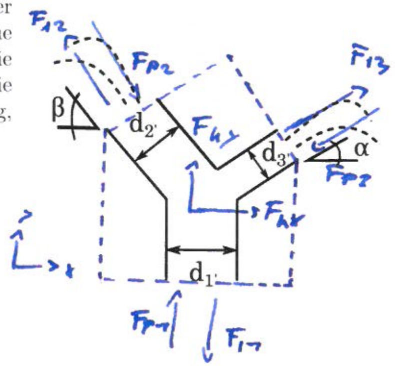
2b) Mit welcher Geschwindigkeit verlässt das Wasser das Fontänenrohr? Bestimmen Sie den Volumenstrom im Rohr und außerdem den Durchmesser des Auslasses. Welcher Druck stellt sich unmittelbar hinter der Pumpe ein? (7)

2c) Berechen Sie nun die benötigte Pumpleistung. (2)

Nun soll der Anfahrvorgang betrachtet werden, wenn das Ventil V_1 schnell geöffnet wird. Das Ventil V_2 bleibt dabei geschlossen, die Pumpe ist für die Betrachtung auf Durchlauf gestellt. Außerdem können hier die Reibungsverluste im Rohr vernachlässigt werden.

2d) Stellen Sie den instationären Bernoulli von ⓪ nach ④ auf und berechnen Sie, wann 99% der Endgeschwindigkeit erreicht werden. (8)

Nun wird eine andere Düsengeometrie auf dem Fontänenrohr montiert. Die Pumpe ist wieder in Betrieb und es ist bekannt, dass die neue Austrittsgeschwindigkeit $u_{2'} = 7\,\mathrm{m/s}$ beträgt. Die Düse arbeitet näherungsweise verlustfrei und die Höhenunterschiede in der Düse sind so gering, dass sie vernachlässigt werden können.



Gegeben

Durchmesser 1'	$d_{1'} = d_1$	0,5 m
Durchmesser 2'	$d_{2'}$	0,4 m
Durchmesser 3'	$d_{3'}$	0,2 m
Winkel	α	30°
Winkel	β	45°

2e) Zeichnen Sie ein geeignetes Kontrollvolumen und die wirkenden Kräfte ein. (2½)

2f) Stellen Sie den Impulssatz in beide Raumrichtungen auf und berechnen Sie die auf den neuen Düsenkopf wirkenden Kräfte. (10)

Nun wird das Ventil V_1 geschlossen und V_2 geöffnet, so dass Wasser am Boden den flachen Beckens aus den 20 Massagedüsen austritt. Die Geschwindigkeit in der Zuleitung beträgt wieder $u = 5\,\mathrm{m/s}$.

2g) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Wassers, mit der es eine Düse verlässt, sowie den Druck am Austritt. (4)

Strömung Klausur H22

①

a) $F_A \overset{!}{=} F_G$

$$\left(\pi \cdot \left(\frac{d_B}{2}\right)^2 \cdot H_B + \pi \cdot \left(\frac{d_S}{2}\right)^2 \cdot \overset{\substack{\text{Gesucht}\\ \downarrow}}{H_S}\right) \cdot \rho_{CH4} = \pi \cdot \left(\frac{d_B}{2}\right)^2 \cdot H_B \cdot \rho_B + \pi \cdot \left(\frac{d_S}{2}\right)^2 \cdot \overset{\substack{3m\\ \downarrow}}{H_S} \cdot \rho_T + M_{EP}$$

$\rho_T = \frac{p_T}{R\,T_T} = 5{,}593 \ \frac{kg}{m^3}$

$H_S = 1{,}554\,m$

mit Balast : Tiefgang $= 1{,}654\,m$

b) $F_A \overset{!}{=} F_G$

$$(H_{S,CH4} + H_{S,N2} - H_0) \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_S}{2}\right)^2 \cdot \rho_{CH4} = \pi \cdot \left(\frac{d_S}{2}\right)^2 \left\{H_{S,CH4} \cdot \rho_{CH4} + (H_{S,N2}\,\cancel{H_0}) \cdot \rho_{N2}\right\} + M_{EP}\}$$

$H_{S,CH4} + H_{S,N2} = H_S$

$H_{S,CH4} = 1{,}374\,m$; $H_{S,N2} = 1{,}686\,m$

c) Gleiche Rechnung wie in b) mit $H_0 = 0{,}75\,m$

$H_{S,CH4} = 0{,}8080\,m$; $H_{S,N2} = 2{,}192\,m$

$V_{S,CH4} = 0{,}6346\,m^3$; $V_{S,N2,2} = 1{,}722\,m^3$

$V_{S,N2,1} = 1{,}324\,m^3$

Isobar : $T_2 = \frac{V_{N2,2}}{V_{N2,1}} \cdot \frac{M_{N2}}{M_{N2}}\,T_1 = 111{,}1\,K$

d) Druckverlauf in Abhängigkeit der Tiefe

$p(y) = p_0 + \rho \cdot g \cdot y$; $y = h_U + r \cdot \sin(\varphi)$

$p(\varphi) = p_0 + \rho_{CH4} \cdot g\,(h_U + r\,\sin(\varphi))$ (Ursprung bei Mittelpunkt)

e) ~~F_x [illegible] $\int_{75°}^{105°}$ [illegible]~~

~~[illegible]~~

$F_x = -93{,}69\,N$

$F_y = 133{,}73\,N$

$F_{ges} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 163{,}28\,N$

② ②

a) Bernoulli 0 -> 2: $P_0 + \rho \cdot g \cdot h_1 = P_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \overset{\text{Reibung}}{\overbrace{\Delta P_v}}$

$\Delta P_v = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(\lambda \frac{L}{D} + C_E \right)$

$Re = \frac{v_2 \cdot D}{\nu}$ Annahme: Turbulent

Moody: $\frac{ks}{D} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ -> $\lambda = 0{,}0205$

$v_2 = 5{,}556 \frac{m}{s}$

$Re = 1{,}778 \cdot 10^6$ -> Turbulent -> Annahme stimmt
↳ Rau ⟶

b) Toricelli: $v_4 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_4^t} = 6{,}264 \frac{m}{s}$

$v_1 = v_2 = v_3$

$\dot{V} = A_1 v_1 = \pi \cdot \left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2 \cdot 5{,}556 = 1{,}091 \frac{m^3}{s}$

konti $v_1 A_1 = v_4 A_4$, volumenstrom im Rohr gleich

$A_4 =$ ~~[illegible]~~ $0{,}1742\, m^2$ -> $d_F = 0{,}4709\, m$

Bernoulli von 3 -> 4 : $P_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2 = P_4^* + \rho \cdot g \cdot \overset{h_4+h_F}{(\cancel{\text{[illegible]}})} + \frac{\rho}{2} \overset{=0}{\cancel{v_4^2}} + \frac{\rho}{2} \overset{=0}{\cancel{v_4^2}} \left(\lambda \frac{L}{D} \right) + \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(\lambda \frac{L}{D} \right)$

$P_3 = 1{,}333$ bar

c) $\Delta P_P = 0{,}233$ bar

$P_P = \Delta P_P \cdot A_2 \cdot v_2 : \eta = 3{,}482 \cdot 10^4\, W$

d) $P_0 + \rho g h_1 = P_4 + \frac{\rho}{2} v_4^2 + \rho \frac{d v_2}{dt} L$

$dt = \frac{2 L \rho}{2 g h_1 \rho - \rho v_2^2 + 2(P_0 - P_4)} dv_2 = \mathrm{I}$ $h_1 = h_4 - h_1$

$\Delta T = \int_0^{\Delta T} dt = \int_0^{v_{stat} \cdot 0{,}99} \mathrm{I} = 13{,}765$

e) $v_2' = 7 \frac{m}{s}$; Zeichnung siehe Blatt

f) $F_{p1} \underbrace{- F_{p2} \sin\beta}_{=0} \underbrace{- F_{p3} \sin \cancel{\beta}\alpha}_{=0} = -F_{I1} + F_{I2} \sin\beta + F_{I3} \sin\alpha - F_{Ay}$

$(P_1 - P_0) A_1 = -\rho v_1^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 \sin\beta + \rho v_3^2 A_3 \sin\alpha - F_{Ay}$

$F_y = -F_{Ay} = 2{,}762 \cdot 10^3\, N$

$F_{p2} \cos\beta - F_{p3} \cos\alpha = -F_{I2} \cos\beta + F_{I3} \cos\alpha - F_{Ax}$

$F_x = -F_{Ax} = 3{,}027 \cdot 10^3\, N$

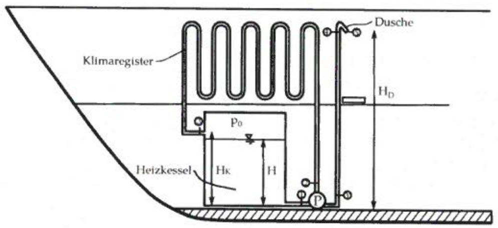
$$\left(\begin{array}{lll} v_2' = v_3' = 7 \frac{m}{s} & ; \; v_1 A_1 = v_2 A_2 + v_3 A_3 & \rightarrow v_1 = 5{,}6 \frac{m}{s} \\ P_1' + \frac{\rho}{2} v_1^2 = P_2' + \frac{\rho}{2} v_2^2 & & \rightarrow P_1 = 1{,}088 \text{ bar} \end{array} \right)$$

g) Konti : $V_L A_L = 20 \cdot A_D V_D$

$V_D = 6{,}25 \frac{m}{s}$

$p_D = \rho \cdot g \cdot h_5 \overset{+}{\cancel{-}} p_0 = 7{,}078\cancel{5}$ bar

Aufgabe 1: Forschungsschiff



(34 P.) Ein Forschungsschiff befindet sich im Nordpolarmeer. Dort herrschen sehr tiefe Temperaturen. Im Folgenden soll das Heizsystem des Schiffes betrachtet werden, das sowohl für eine angenehme Raumtemperatur als auch für warmes Wasser in der Dusche sorgen soll.

Hinweise

- Beachten Sie die Abbildung, dort sind die Maße eingezeichnet.
- Die Teilaufgaben d-f und g, h sind unabhängig von den vorherigen lösbar.
- Sollten Sie nicht weiterkommen, nehmen Sie sinnvolle Werte an und kennzeichnen Sie diese.

Gegeben

$H = 2\,\mathrm{m}$	Wasserhöhe im Kessel
$H_D = 11\,\mathrm{m}$	Höhe der Dusche
$H_K = 2{,}5\,\mathrm{m}$	Höhe der Einströmöffnung in den Kessel
$D = 0{,}05\,\mathrm{m}$	Durchmesser der Rohrleitung
$D_{Kessel} = 2\,\mathrm{m}$	Durchmesser des Kessels
$L = 60\,\mathrm{m}$	Länge der Heizleitung zwischen ② und ③
$\eta_0 = 1{,}79 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$	dynamische Viskosität von Wasser bei 0° C
$\rho_W = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$	Dichte von Wasser
$p_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$	Umgebungsdruck und Druck im Kessel
$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$	Erdbeschleunigung
$k_s = 0{,}15\,\mathrm{mm}$	Rauigkeit der Leitungen
$\dot{V} = 0{,}01\,\mathrm{m^3/s}$	Volumenstrom
$\zeta_{\text{Krümmer}} = 0{,}3$	Verlustziffer eines 180°-Krümmers
$\alpha = 65°$	Winkel Duschkopf

1a) Im Rumpf des Schiffes befindet sich der Heizkessel. Zunächst ist die Dusche zugedreht. Bestimmen Sie den statischen Druck vor der Pumpe im Heizbetrieb. Die Wassertemperatur beträgt dabei 40° C. Welcher Strömungszustand liegt hier vor? (7)

1b) Berechnen Sie nun den Druckverlust über die Klimaregisteranordung. Mit welchem Druck p_2 strömt Wasser in die Registeranordnung? (7)

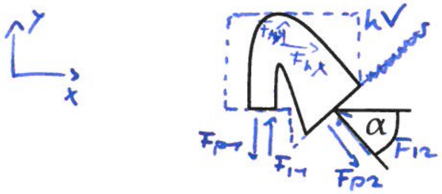
1c) Welche Pumpleistung ist erforderlich, um den nötigen Druck zu erreichen? (2)

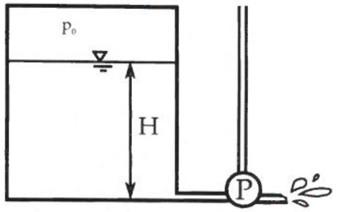
Nun wird das Ventil zum Heizsystem geschlossen, weil die Crew duscht.

1d) Auf welchen Durchmesser muss der Duschkopf verbreitert werden, um nur noch 20% der Wassergeschwindigkeit des Rohrs am Austritt zu erreichen? (2)

1e) Wie stark muss die Pumpleistung reduziert werden, wenn der Volumenstrom gleich bleibt wie im Heizbetrieb? Stellen Sie dazu den reibungsfreien Bernoulli vom Punkt hinter der Pumpe bis zum Duschkopf auf. (3)

1f) Stellen Sie den Impulssatz über den Duschkopf mit einem geeigneten Kontrollvolumen auf und berechnen Sie die Kräfte darauf. Tragen Sie dazu die auftretenden Kräfte und das Kontrollvolumen in der Skizze ein. Darüber hinaus beträgt nun die Geschwindigkeit $v_5 = 1{,}6\,\mathrm{m/s}$. Der Vorgang kann als reibungsfrei angenommen werden, vernachlässigen Sie außerdem Volumenkräfte. (7)





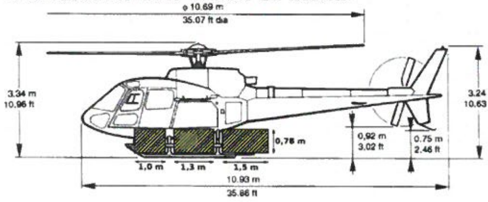
Aufgrund eines Frostschadens ist die Leitung zur Dusche kurz hinter der Pumpe zerborsten und das Wasser läuft ins Freie. Die Pumpe ist auf Durchlauf geschalten und hat keinen Einfluss mehr und auch das Ventil zum Heizregister ist weiterhin geschlossen.

1g) Mit welcher Geschwindigkeit tritt das Wasser aus der Bruchstelle aus? (2)

1h) Wie viel Zeit vergeht, bis der Kessel vollständig ausgelaufen ist? (4)

Aufgabe 2: Notwasserung

(36 P.+5 ZP.) Ein Hubschrauberpilot muss wegen Triebwerksausfall notwassern und aktiviert deshalb das EFS (Emergency Flotation System). Dieses besteht aus jeweils drei an den Kufen befindlichen zylinderförmigen Schwimmkörpern, die im Notfall mittels zweier heliumgefüllter Hochdruckkartuschen sehr schnell aufgeblasen werden können, um den Hubschrauber über Wasser zu halten.



Hinweise

- Beachten Sie die Abbildung, dort sind die Maße eingezeichnet.
- Die Schwimmkörper sind als zylindrisch anzunehmen.
- Der Helikopter taucht waagerecht ins Wasser ein.
- Der Rumpf darf für alle Effekte vernachlässigt werden.
- Alle Teilaufgaben sind bis auf f+g unabhängig voneinander lösbar.
- Integrationshilfe: $\int \sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \frac{y}{2}\sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{y}{r}$

Gegeben

$m_{\text{Heli}} = 2150\,\text{kg}$	Masse Heli
$g = 10\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}$	Erdbeschleunigung
$\rho_W = 1000\,{}^{\text{kg}}/_{\text{m}^3}$	Dichte von Wasser
$p_0 = 1{,}0\,\text{bar}$	Umgebungsdruck
$v_{\text{sink}} = 4\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$	Sinkgeschwindigkeit beim Aufsetzen auf die Wasseroberfläche
$c_W = 0{,}65$	Widerstandsbeiwert der zylindrischen Floats beim Eintauchen
$V_{\text{Kartusche}} = 10\,\ell$	Volumen einer Gaskartusche
$p_{\text{Kartusche}} = 276\,\text{bar}$	Fülldruck einer Gaskartusche
$\rho_{\text{Helium}} = 0{,}18\,{}^{\text{kg}}/_{\text{m}^3}$	Heliumdichte bei 1 bar
$\rho_{\text{Luft}} = 1{,}25\,{}^{\text{kg}}/_{\text{m}^3}$	Dichte von Luft

2a) Der Hubschrauber trifft mit einer Vertikalgeschwindigkeit von $v_{\text{sink}} = 4\,{}^{\text{m}}/_{\text{s}}$ auf die Wasseroberfläche auf. Die maximale Eintauchtiefe beträgt etwa 1,2 m, so dass die Schwimmkörper schließlich vollständig im Wasser eintauchen. Schätzen Sie ab, welcher Beschleunigung die Insassen beim Eintauchen ausgesetzt waren. Summieren Sie dafür konservativ den Auftrieb, den die Floats maximal erzeugen, und den Wasserwiderstand, den sie dem Eintauchen maximal entgegensetzen. (6)

2b) Zeichnen Sie für den Vorgang des Eintauchens qualitativ die Komponenten Auftriebskraft und Wasserwiderstand in ein Diagramm in Abhängigkeit von der Eintauchtiefe. Die Floats sind dabei zunächst teilweise und am Ende vollständig untergetaucht. Die Sinkgeschwindigkeit nimmt kontinuierlich ab. Beschriften Sie die einzelnen Phasen und begründen Sie kurz den Verlauf. Der Auftauchvorgang muss nicht gezeichnet werden. (4+2)

2c) Wie tief sinken die Schwimmkörper ein, wenn der Hubschrauber schließlich stationär auf der Wasseroberfläche treibt? Gehen Sie dabei davon aus, dass die Floats mehr als die Hälfte eingetaucht sind. Wäre die Eintauchtiefe in Salzwasser größer oder geringer? (Begründen Sie Ihre letztere Antwort ohne Rechnung.) (7)

2d) Welchem Überdruck müssen die Floats standhalten, wenn sie mit den beiden Kartuschen befüllt werden? (4)

2e) Bestimmen Sie den Auftrieb der aufgeblasenen Floats in Luft. Wird der Sinkflug dadurch spürbar verlangsamt? (5)

Betrachten Sie nun den Fall, dass die Gaskartusche für die rechtsseitigen Floats versagt. Über eine Crossover-Verbindung zwischen den Seiten werden diese zumindest teilweise mit aufgeblasen, eine einzelne Kartusche reicht aber nicht für eine vollständige Füllung aller Floats.

2f) Welches Gasvolumen bleibt nach Füllung der linken Floats noch für die rechten übrig? Ist der Auftrieb der nur teilweise gefüllten rechtsseitigen Floats noch ausreichend? (4)

2g) Erklären Sie, was deshalb nach der Notwasserung mit nur einer funktionierenden Kartusche passiert (ohne Rechnung). (6)

2h) Zusatzpunkte: Warum hat die Wahl des Gases (Helium oder Pressluft) einen Einfluss auf die Aufblasgeschwindigkeit? (+3)

Strömung Klausur F22 ①

①

a) $\dot{V} = v_i A = v_1 \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \rightarrow v_1 = 5{,}093 \frac{m}{s}$

$p_0 + \rho \cdot g \cdot H = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2$

$p_1 = 1{,}067$ bar

$Re = \frac{v D \rho}{\eta}$

$\cancel{\frac{\eta_{40}}{\eta_0}}$ $\frac{\eta_{40}}{\eta_0} = \exp\left(\frac{T_A}{T_{40}+T_B} - \frac{T_A}{T_0+T_B}\right)$ $\qquad T_B = -150\,K$

$T_A = 506\,K$

$\eta_{40} = 0{,}6537 \cdot 10^{-3}$ Pas $\qquad T_0 = 273{,}15\,K$

$Re = 3{,}896 \cdot 10^5 \rightarrow$ Turbulent

b) $\frac{k_s}{D} = 3 \cdot 10^{-3}$

λ ablesen : $\lambda = 0{,}026$

Druckverlust $\Delta p_{2,3} = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(\lambda \frac{L}{D} + 9 \cdot \zeta_{Krümmer}\right) = 4{,}397$ bar

Bernoulli :

$\frac{\rho}{2} v_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot 0 = \frac{\rho}{2} v_3^2 + p_3 + \rho \cdot g \cdot H_k + \Delta p_{2,3}$

$v_2 = v_3$

Freistrahl: $p_3 = p_0$

$p_2 = 5{,}642$ bar $\quad$ ↯ in Lösung 5,152 bar, H ist dort neg. -> Fehler?

c) $\Delta p_p = p_2 - p_{\cancel{2}1} = 4{,}085$ bar

$P_p = \Delta p_p \cdot A \cdot v_1 = 4{,}085 \cdot 10^3$ W

d) $v_4 = v_3 = 5{,}093 \frac{m}{s} \quad v_5 \overset{!}{=} 0{,}2 \cdot v_4 = 1{,}019 \frac{m}{s}$

$\dot{V}$ bleibt gleich -> $\dot{V} = A_5 \cdot v_5$

$A_5 = 9{,}874 \cdot 10^{-3}\,m^2$

$\pi \cdot \left(\frac{D_5}{2}\right)^2 = A_5 \quad \rightarrow D_5 = 0{,}1118\,m$

e) $p_2 + \rho \cdot g \cdot 0 + \frac{\rho}{2} v_3^2 = p_5 + \frac{\rho}{2} v_5^2 + \rho \cdot g \cdot H_D$

$p_5 = p_0 \;;\; v_5 = 0{,}2\, v_3$

$p_2 = 1{,}9\overset{7}{\cancel{5}}5$ bar

$\Delta p_p = p_2 - p_1 = 0{,}\overset{908}{\cancel{888}}$ bar

$P_p' = \Delta p_p \cdot A \cdot v_1 = 9{,}08 \cdot 10^2$ W

$\frac{P_p'}{P_p} = 0{,}2223 \rightarrow$ Drosselung um 77,77%

f) $v_5 = 1{,}6\ \frac{m}{s}$ $\quad 0{,}2\, v_4 = \cancel{?}\, v_5$ $\quad$ konti $\quad v_4 = 8\ \frac{m}{s}$

$P_4 + \frac{\rho}{2} v_4^2 = P_5 + \frac{\rho}{2} v_5^2$ $\quad P_4 = 0{,}6928$ bar

Impulssatz in x-Richtung

$F_{p2} \cdot \cos(\alpha) - F_{I2} \cdot \cos(\alpha) + F_{hx} = 0$

$\underbrace{(P_5 - P_0)}_{=0} \cdot A_5 \cdot \cos(\alpha) - \rho v_5^2 \cdot A_5 \cdot \cos(\alpha) + F_{hx} = 0$

$F_{hx} = \rho v_5^2 A_5 \cdot \cos(\alpha) = 10{,}62\ N$ ↯

Impulssatz in y-Richtung:

$- F_{p1} + F_{I1} - \overset{=0}{\cancel{F_{p2}}} \cdot \sin(\alpha) + F_{I2} \cdot \sin(\alpha) + F_{hy} = 0$

$-(P_4 - P_0) A_4 \overset{-}{+} \rho v_4^2 A_4 \overset{-}{+} \rho v_5^2 A_5 \cdot \sin(\alpha) + F_{hy} = 0$

$F_{hy} = -264{,}1\ N$ ↯ Auch mit Formel aus Musterlösung gerechnet...

g) $v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ (Toricelli)

$= 6{,}325\ \frac{m}{s}$

h) $A_h \cdot v_{sink} = A_L \cdot v_B$

↳ $-\frac{dh}{dt}$

h verändert sich mit der Zeit

$-\frac{dh}{dt} \cdot \pi \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{0{,}05}{2}\right)^2 \cdot v_B$

$-\frac{dh}{dt} = 2{,}795 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{h}$

$-\frac{1}{\sqrt{h}} dh = 2{,}795 \cdot 10^{-3}\, dt$

$-\int_H^h \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \int_0^t 2{,}759 \cdot 10^{-3}\, dt$

$2\sqrt{h} - 2\sqrt{H} = 2{,}759 \cdot 10^{-3}\, t$

$t(h=0) = 1025\ s$

Strömung Klausur F22 ③

②
a) Auftrieb Floats:

$$\rho_w \cdot g \cdot ((1,0+1,3+1,5)\cdot(0,78:2)^2 \cdot \pi)\cdot 2 = 36,32\ kN = F_A$$

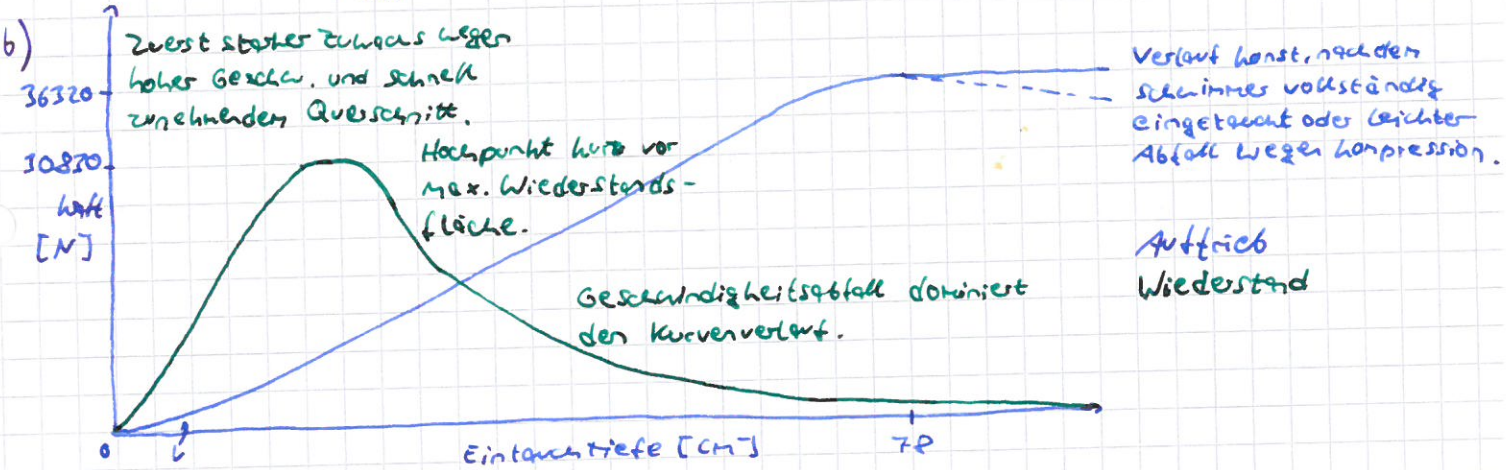
Wiederstand

$$F_w = \frac{\rho_w}{2} v_{sink}^2 A c_w = 30,82\ kN$$

Max. Beschleunigung

$$a_{max} = \frac{F_A + F_w}{m_{Heli}} = 37,23\ \frac{m}{s^2} = 3,723 g$$

b)



zunächst langsamer Anstieg wegen runden Querschnitt der Schwimmer (Am Ende auch).

c) ~~Bernoulli~~

$$\cancel{p_0 + \frac{\rho}{2} \overset{4m/s}{v_1^2} + \rho \cdot g \overset{ges}{h_1} = p_2 + \frac{\rho}{2} \overset{0}{v_2^2} + \rho g \overset{0}{h_2}}$$

Auftrieb = Gewichtskraft

~~$2\left(\frac{0,78}{2}\right)^2$ [illegible] $\rho_w \cdot g =$~~

Volumen Kreissegment: h gesucht

$$V_u = 2 \cdot \int_{-r}^{-r+h} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \qquad \cancel{\text{Integral}} = \left[\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_{-r}^{-r+h}$$

$$V_u \cdot 2 \cdot (1+1,3+1,5) \cdot \rho_w \cdot g = m_{Heli} \cdot g$$

$$h = 1,084 \cdot 10^{-1}\ m$$

Salzwasser hat eine höhere Dichte -> Es wird höheres Auftrieb und Wiederstand erzeugt -> der Helikopter sinkt nicht so tief.

d) $V_h = 20\,l$ bei $P_h = 276$ bar $\qquad 20\,l = 0{,}02\,m^3$

zu $V_v = (7+7{,}3+7{,}5) \cdot \pi \cdot (\frac{D}{2})^2 \cdot 2 = 3{,}632\,m^3$

$V_h \cdot P_h \overset{!}{=} V_v \cdot P_v$

$P_v = 7{,}52$ bar

$P_{\text{Überdruck}} = P_v - P_0 = 0{,}52$ bar

e) $V_v \cdot \rho_L \cdot g = 45{,}40\,N = F_A$

Eigengewicht des Heliums: $V_v \cdot \rho_{He} \cdot g = 6{,}538\,N$

Nettoauftrieb von 38,86 N in Relation zur Gesamtmasse vernachlässigbar.

f) Linke Floats mit $P_0 = 7$ bar gefüllt

~~[illegible] bar in [illegible] rechte Floats~~

~~$V_{l,l} \cdot P_{l}$ [illegible] $= V_{l,r} \cdot P_{rest}$~~

$V_h/2 \cdot P_h = V_0 \cdot P_0 \qquad V_0 = \overbrace{\frac{V_v}{2}}^{V_L} + V_r$

$V_0 = $ ~~[illegible]~~ $2{,}76\,m^3$

$V_{rechts} = -V_v/2 + V_0 = 0{,}944\,m^3 \qquad V_{links} = 1{,}876\,m^3$

$\text{Auftrieb} = V_0 \cdot \rho_w = 2760\,kg$

Der Auftrieb reicht noch aus um den Helikopter zu halten.

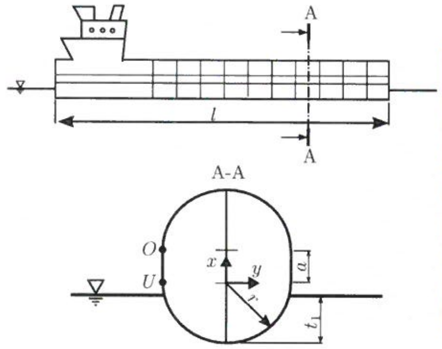
Auftrieb rechts ist aber kleiner als halbes Gewicht, der Helikopter würde also kippen

g) Die rechte Floats werden vollständig unter Wasser gedrückt und ein Teil der Luft fließt durch den Druckunterschied in die linken Floats, der Helikopter kippt um, aber sinkt nicht vollständig.

h) Wegen der geringeren Dichte von Helium ist bei gleichem Druck/Aufblasvermögen die Geschwindigkeit und der resultierende Volumenstrom größer. Das gilt sowol inkompressibel als auch im (hier eigentlich erforderlichen) kompressiblen Fall.

Aufgabe 1: Hydrostatik

(39 P.) Die **F**loating **I**nstrument **P**lattform (FLIP) ist ein Forschungsschiff der US-Navy. Um Messungen in mehreren Metern Tiefe unter Wasser zu machen, kann das $l = 110\,\text{m}$ lange Schiff Ballasttanks im Heck mit Wasser füllen, um sich so in eine senkrecht im Wasser treibende, äußerst stabile Messplattform umzuwandeln. Das Schiff besteht aus einer Röhre mit Ballasttanks im Heck und einer Bugsektion mit Kabinen für die Wissenschaftler:innen.



Gegeben

$l = 110\,\text{m}$	Länge des Schiffes
$r = 3{,}2\,\text{m}$	Radius der Halbkreise des Rumpfes
$a = 1{,}5\,\text{m}$	Länge der Rumpf Seitenwand
$t_1 = 3{,}1\,\text{m}$	Tiefgang horizontal, unbeladen
$\rho_W = 1000\,\text{kg}/\text{m}^3$	Dichte des Wassers
$g = 9{,}81\,\text{m}/\text{s}^2$	Erdbeschleunigung
$p_0 = 1013\,\text{mbar}$	Umgebungsdruck

Hinweise

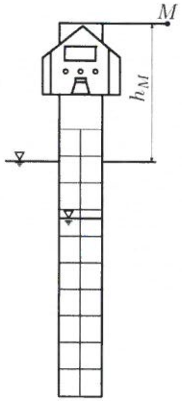
- Der Rumpf besitzt einen konstanten Querschnitt über die gesamte Länge des Schiffes.
- Wanddicken sind zu vernachlässigen
- $\int \sqrt{c^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{c^2 - x^2} + \frac{c^2}{2}\arcsin(\frac{x}{c})$
- Das Gewicht der Luft ist zu vernachlässigen.
- Luft kann als ideales Gas betrachtet werden.
- Die Aufgabenbereiche I., II. und III. können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

I. Horizontalbetrieb: Im mobilen Zustand befindet sich das Schiff in der Horizontalen. Dabei liegt ausschließlich der Rumpfkörper mit dem in der Skizze angegebenen Querschnitt im Wasser.

1a) Das zunächste unbeladene Schiff befindet sich in der horizontalen Ausgangsposition. Der Wasserpegel befindet sich dabei unterhalb des Punktes U. Der Tiefgang des Schiffes beträgt $t_1 = 3{,}1\,\text{m}$. Bestimmen Sie die Leermasse $m_{S,L}$ des Schiffes. (6)

1b) Das Schiff befindet sich weiterhin im horizontalen Zustand und wird vor dem Auslaufen mit Messinstrumenten und Proviant beladen. Die Masse beträgt damit nun $m_{S,B} = 1.802.000\,\text{kg}$. Der Wasserspiegel liegt dadurch zwischen den Punkten U und O. Berechnen Sie den neuen Tiefgang t_2 des Schiffes. (4)

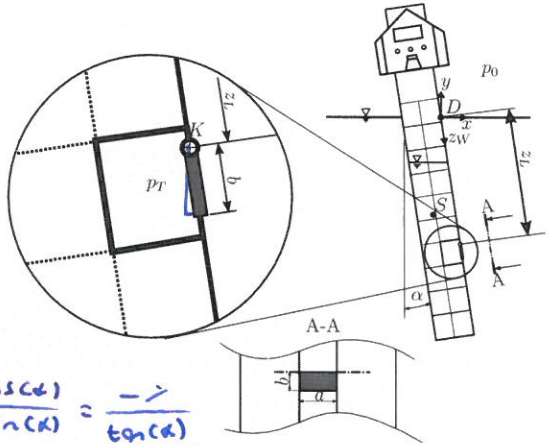
II. Vertikalbetrieb: Um Versuche durchzuführen, lässt das Schiff ein Teil seiner Ballasttanks im Heck volllaufen und begibt sich in den vertikalen Messbetrieb.



1c) Das Schiff steht stabil in einer vertikalen Position wie abgebildet. Nun wird zusätzliches Wasser in die Tanks gepumpt. Nach Abschluss dieses Vorgangs erreicht das Schiff erneut einen Gleichgewichtszustand. Erläutern Sie kurz in Worten, wie sich das Gesamtgewicht des Schiffes, das Verdrängungsvolumen und die Bughöhe h_M durch den zusätzlichen Pumpvorgang verändert haben. (2)

1d) An der Bugspitze, im Punkt M, ist eine Messsonde installiert. Für die geplanten Versuche soll die Sonde einen Abstand von $h_M = 15\,\text{m}$ zur Wasseroberfläche haben. Welches Volumen an Wasser hat FLIP bei diesem Abstand in seinen Tanks? (6)
Hinweis: Das Schiff hat ohne Wasser in den Ballasttanks weiterhin die Masse $m_{S,B}$.

III. Schlagseite: Bei einer weiteren Messkampagne des Jahrzehnte alten Schiffes geht das Forschungsschiff erneut vom Horizontal- in den Vertikalbetrieb. Aufgrund eines Problems mit dem Pumpsystem wird ein Ballasttank nicht gefüllt. FLIP steht nun im Wasser mit einer Schlagseite von $\alpha = 5°$.



$$-y\,\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{-y}{\tan(\alpha)}$$
$$\approx -79{,}08y$$

1e) Geben Sie die Wandfunktion $z_W(y)$ und den Druckverlauf $p(z_W)$ entlang der äußeren rechten Wand an. (2)

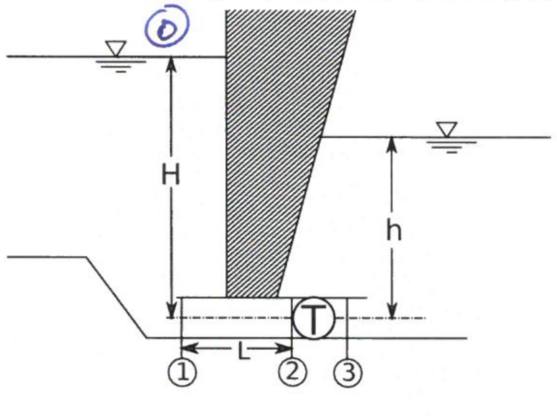
(1f) Aufgrund der immer wieder auftretenden Probleme mit dem Tank ist an dessen Außenseite eine Luke eingebaut, die es der Crew erlaubt, Reparaturarbeiten durchzuführen. Der Druck im Tank beträgt $p_T = p_0$. Berechnen Sie die Kräfte in x- und y-Richtung, die im schrägen Zustand auf die Luke ausgeübt werden. Die Oberkante der Luke befindet sich um die Länge $z_L = 80\,\text{m}$ entlang des Rumpfes unter der Wasserlinie. Die Luke hat die Maße $a = 1{,}5\,\text{m} \times b = 0{,}5\,\text{m}$. Die Dicke der Luke ist zu vernachlässigen. (5)

1g) Die Luft im ungefüllten Ballasttank hat kurz nach dem Absinken des Schiffhecks die Außentemperatur $T_0 = 15\,°\text{C}$ und den Umgebungsdruck p_0. Durch das kalte Wasser in der Tiefe kühlt die Luft im Tank auf $T_1 = 8\,°\text{C}$ ab. Welcher Druck p_1 stellt sich im Tank ein? Wie wirkt sich der neue Druck auf die Lukenkräfte F_x und F_y aus? Wie wirkt sich die Druckänderung des Ballasttanks auf FLIPs statischen Auftrieb aus? (5)

(1h)) Im Tank herrscht der Druck $p_T = p_1$ Berechnen Sie das Moment im Lukenscharnier am Punkt K. Momente gegen den Uhrzeigersinn sind positiv. *Notwert:* $p_1 = 98\,\text{kPa}$ (8)

Aufgabe 2: Dammanlage

(39 P.) Eine Dammanlage soll näher untersucht werden. Sie besteht aus mehreren Abschnitten. Aufgrund der aktuellen klimatischen Veränderungen sollen die Hochwasserschutzmaßnahmen einer solchen Anlage näher betrachtet werden. Außerdem beinhaltet die Dammanlage ein Wasserkraftwerk. Die Abschnitte der Anlage werden nacheinander betrachtet. Zu Beginn steht das Kraftwerk im Fokus der Betrachtung bei normalem Pegelstand. Es ist in der Abbildung dargestellt und die Turbine mit T gekennzeichnet.



Gegeben

$H = 20{,}6\,\text{m}$	Höhe der oberen Staustufe
$h = 11\,\text{m}$	Höhe der unteren Staustufe
$D_T = 5{,}8\,\text{m}$	Durchmesser der Turbine
$L = 8\,\text{m}$	Länge vom Einlauf des Kraftwerks bis zur Turbine
$k_s = 3\,\text{cm}$	Wandrauigkeit im Rohr
$p_1 = 2{,}5\,\text{bar}$	statischer Druck an der Stelle ①
$\eta_W = 1 \cdot 10^{-3}\,\text{Pa/s}$	dynamische Viskosität von Wasser
$\rho_W = 1000\,\text{kg/m}^3$	Dichte von Wasser
$p_0 = 1{,}0\,\text{bar}$	Umgebungsdruck
$g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$	Erdbeschleunigung

Hinweis

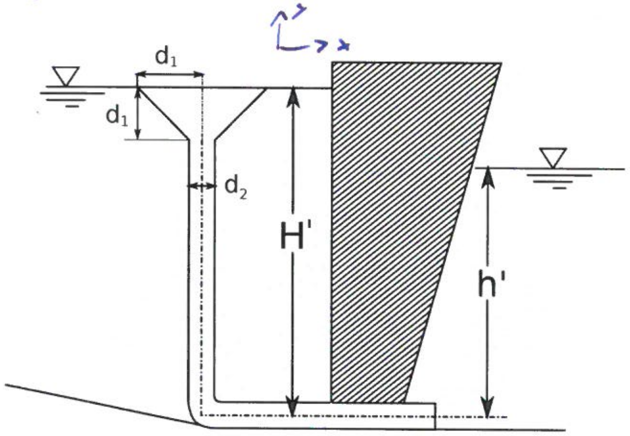
- Die Aufgabenteile 2d und 2e beziehungsweise 2f und 2g können unabhängig von den anderen Aufgabenteilen gelöst werden.

2a) In der oberen Staustufe befindet sich der Einlauf in das Kraftwerk ①. Der Abschnitt bis zur Turbine kann als Rohr angesehen werden. Berechnen Sie die Strömungsgeschwindigkeit und den Volumenstrom durch die Turbine. Nutzen Sie dazu die reibungsfreie Bernoulligleichung von der Wasseroberfläche zum Einlauf des Kraftwerks. (4)

2b) Wie groß ist der Druck direkt vor der Turbine bei ②? Das Rohr ist als reibungsbehaftet zu betrachten. (6)

2c) Berechnen Sie nun die Leistung der Turbine bei einem Wirkungsgrad von $\eta_T = 0{,}72$. (3)

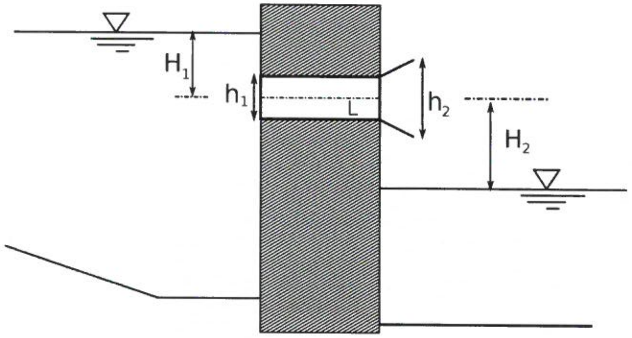
Nun werden zwei Hochwasserschutzmechanismen der Anlage näher betrachtet. Zum einen ist ein Hochwassertrichter eingebaut, der über den normalen Wasserpegel hinaus ragt. Bei starken Regenfällen und steigendem Wasserstand dient er dann als zusätzlicher Abfluss. Er ist nebenstehend dargestellt. Dabei beträgt die gestiegene Wasserhöhe der Oberstufe $H' = 22\,\mathrm{m}$ und die der Unterstufe über dem Austritt der Leitung $h' = 8\,\mathrm{m}$. Der Trichter ist $d_1 = 3\,\mathrm{m}$ breit und tief und die anschließende Leitung hat einen Durchmesser von $d_2 = 1\,\mathrm{m}$.



2d) Es wird davon ausgegangen, dass der Wasserstand bis zum Rand des Hochwassertrichters angestiegen ist und der Trichter bis zum Rand vollgelaufen ist. Nun soll überprüft werden, ob die konstruktiven Bedingungen eingehalten werden. Welchen Volumenstrom kann der Überlauf maximal ableiten, wenn die Reynoldszahl von $Re_{max} = 1{,}1 \cdot 10^7$ weder im Rohr noch im Trichter überschritten werden darf? (3)

2e) Die vorige Einschränkung an die Reynoldszahl ergibt sich wegen der Reibungszahl der Leitung. Wie groß ist diese? Stellen Sie dazu den reibungsbehafteten Bernoulli auf. Zusätzlich zum rohrförmigen Teil der Leitung mit einer Gesamtlänge von $L = 37\,\mathrm{m}$ sind noch $\zeta_{\text{Trichter}} = 0{,}1$ und $\zeta_{\text{Krümmer}} = 0{,}3$ bekannt. *Notwert:* $v_2 = 10\,\mathrm{m/s}$ (6)

Die zweite Möglichkeit, auf einen steigenden Pegel zu reagieren, ist das Öffnen des Wehres an einem anderen Abschnitt der Staumauer, so wie hier abgebildet. Der Damm ist an dieser Stelle $L = 10\,\mathrm{m}$ breit. Das Wasser steht jetzt $H_1 = 3\,\mathrm{m}$ über der Wehröffnung, die $h_1 = 1\,\mathrm{m}$ hoch und quadratisch ist. Leider klemmen die Wehrtore oben und unten und können nicht vollständig abgeklappt werden, so dass sie als eine Art freischwebender Diffusor angesehen werden können. Dahinter fließt das Wasser aus einer jetzt $h_2 = 2\,\mathrm{m}$ hohen Öffnung in die untere Staustufe, die $H_2 = 1\,\mathrm{m}$ darunter liegt.



2f) Berechen Sie die Horizontalkraft, die auf den Diffusor (die Wehrtore) wirkt. Stellen Sie dazu den Impulssatz mit einem geeigneten Kontrollvolumen auf, in das Sie die auftretenden Kräfte einzeichnen. Der Vorgang kann als reibungsfrei betrachtet werden. (9)

2g) Beim nächsten Einsatz ist die Störung der Wehrtore behoben worden, so dass der Diffusor verschwindet. Wie viel Zeit vergeht nach dem Öffnen, bis 90% der Endgeschwindigkeit erreicht sind? Stellen Sie dazu den reibungsfreien instationären Bernoulli auf. (8)

Hinweis: Es gilt

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}$$

Regelung Klausur 427

①

a) Leermasse des Schiffs $\overset{!}{=}$ Masse des verdrängten Wassers

Verdrängtes Wasser : $V_v = L \cdot 2 \cdot \int_{-r}^{-r+t_1} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

$= 1699\, m^3$

$M_{S,L} = V_v \cdot \rho_w \qquad = 1{,}727 \cdot 10^6\, kg$

b) Auftrieb = Gewichtskraft

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$(L \cdot 2 \cdot \int_{-r}^{0} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \cdot \rho_w) + (L \cdot r \cdot h \cdot \rho_w) = M_{S,B}$

$1{,}792 \cdot 10^6\, kg + L \cdot r \cdot h \cdot \rho_w = M_{S,B}$

$h = 4{,}638\, cm$ oder gleich so:

$V_v = (\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 + 2r \cdot h) \cdot L$

$V_v \cdot \rho_w = M_{S,B} \longrightarrow h = 4{,}638\, cm$

$t_2 = r + h = 3{,}246\, m$

c) Das Gesamtgewicht hat sich um das Gewicht des zusätzlichen Wassers erhöht. Das Verdrängungsvolumen erhöht sich durch das nun höhere Gewicht und die Bughöhe verringert sich, um das höhere Verdrängungsvolumen zu erzeugen.

d) Auftrieb = Gewicht

$(L - l_m) \cdot (\pi \cdot r^2 + 2r \cdot a) \cdot \rho_w \cancel{g} = M_{S,B} + V_W \cdot \rho_W$

$V_W = 2766\, m^3$

e) $z_W(y) = -\frac{y}{\cos(\alpha)} \approx -y$ ↯ $(\cos(\alpha) = -\frac{y}{z_W})$

Eigene Lösung auf ~~[illegible]~~ Aufgabenblatt...

$P(z_W) = P_0 + \rho_W \cdot g \cdot \underbrace{\cos(\alpha) \cdot z_W}_{y(z_W)}$

f) $P_T = P_0 \qquad z_c = 80\, m \qquad a = 1{,}5\, m \qquad b = 0{,}5\, m$

$F_x = \int_{y_1}^{y_2} (P_0 + \rho \cdot g \cdot (h_0 + y)) \cdot \overset{a}{\cancel{b}}\, dy \qquad ; \; y_1 = 80\, m, \; y_2 = (80 + \cos(\alpha) \cdot b)$

$F_x =$ Aproj · Mittlerer Druck $\qquad h_0 = 0\, m$

$= b \cdot \cos(\alpha) \cdot a \cdot (\rho_w \cdot g \cdot (z_c + \frac{b\, \cancel{\cos\alpha}}{2}) \cdot \cos(\alpha) + P_0 - P_0)$

$= 586{,}0\, kN$

f) $F_{y,\text{außen}} = \int_0^L (p_0 + \rho_W \cdot g \cdot (h_0 + (-y \cdot \frac{1}{\cos(\alpha)})) \cdot a \, dy$ $y = -\cos(\alpha) \cdot z_v$ ②

$= 55{,}36 \text{ kN}$

$F_{y,\text{innen}} = \int_0^L (p_0 \cdot a) \, dy = 75{,}69 \text{ kN}$ ↯

Wandverlauf wird in Lösung nicht betrachtet...?

g) $T_1 = \overset{15°C}{\cancel{}}$ $T_1 = 8°C$

Isochore ZÄ: $\frac{p_1}{p_0} = \frac{T_1}{T_0}$

$p_1 = 0{,}9884 \text{ bar}$

Der Auftrieb bleibt unverändert, weil sich nicht das Volumen des verdrängten Wassers ändert. Weil der Gegendruck durch den Druck in der Luke kleiner wird, erhöhen sich die ~~~~ Beträge der Kräfte F_x und F_y.

h) mit Gerade $y = \cos(\overset{\alpha}{\cancel{}}) \cdot x$ $\rightarrow x = -\frac{y}{\cos(\alpha)}$

$dM_A = -\rho g (h_0 + y) \cdot b \cdot dy \cdot y + \cancel{} \rho g (h_0 + y) \cdot b \cdot dy \cdot (-\frac{y}{\cos(\alpha)})$

$M_A = \int_0^L -\rho g (h_0 + y) \cdot b \cdot y (1 \cancel{} - \frac{1}{\cos(\alpha)}) \, dy$ ↯

$=$ ↯

② $p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 + \rho \cdot g \cdot 0 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \cancel{+} - \rho \cdot g \cdot H$ $V_0 = 0$

a) $v_1 = 10{,}27 \frac{m}{s}$

$A_1 = \pi \cdot r^2 = 26{,}42 \text{ m}^2$

$\dot{V}_1 = v_1 \cdot A_1 = 269{,}8 \frac{m^3}{s}$

b) $Re = \frac{v \cdot \rho \cdot d}{\eta} = 5{,}922 \cdot 10^7$ (In Lösung $6{,}03 \cdot 10^7$)

$\rightarrow$ Turbulent

$\frac{k_s}{D} = 5{,}172 \cdot 10^{-3}$ $\rightarrow$ Ablesen: $\lambda = 0{,}03$

Bernoulli: $\frac{\rho}{2} v_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{\rho}{2} v_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{\rho}{2} v_2^2 (\lambda \frac{L}{D})$

$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2} v_2^2 (\lambda \frac{L}{D})$ konti: $v_1 = v_2$

$p_2 = 2{,}478 \text{ bar}$

c) $\eta_T = 0{,}72$

$\Delta p_T = p_2 - (p_0 + \rho \cdot g \cdot h) = 0{,}3989 \text{ bar}$

$P_T = \Delta p_T \cdot A_T v_2 \eta = 7{,}748 \text{ W}$

Regelung Klausur 421 ③

d) $A_1 V_1 = A_2 V_2$ $\qquad A_1 > A_2$, $V_2 > V_1 \rightarrow Re_2 > Re_1$

$Re_{max} = 1{,}1 \cdot 10^7 = \frac{V_2 \rho d_2}{\eta}$ $\qquad V_2 = 11 \frac{m}{s}$

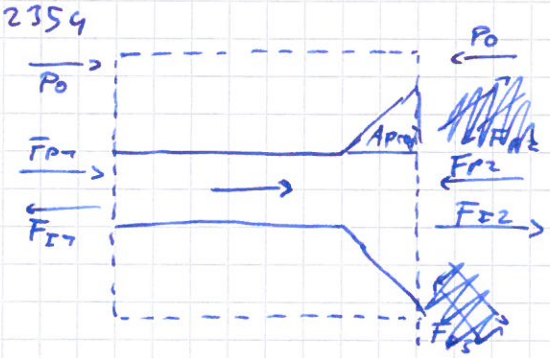
$\dot V_2 = V_2 \cdot A_2 = 8{,}639 \frac{m^3}{s}$

e) λ gesucht ; $V_1 = \frac{V_2 \cdot \pi \cdot (\frac{d}{2})^2}{\pi \cdot 3^2} = 0{,}3056 \frac{m}{s}$

$\frac{\rho}{2} v_1^2 + p_0 + \rho \cdot g \cdot H' = \frac{\rho}{2} v_3^2 + p_0 + \rho \cdot g \cdot h' + \frac{\rho}{2} v_3^2 (\lambda \frac{L}{d_2} + \zeta_{Trichter} + \zeta_{Krümmer})$

$\lambda = 0{,}02354$

f)



Impulssatz in x-Richtung : $F_{p1} + F_{I2} - F_{I1} - F_{p2} - F_{Nx} = 0$

$V_1 = \sqrt{2 g H_1} = 7{,}672 \frac{m}{s}$

$V_1 A_1 = V_2 A_2 \rightarrow V_1 = 15{,}34 \frac{m}{s}$

$-p_1 A_1 + \rho v_2^2 A_2 - \rho v_1^2 A_1 + p_2 A_2 + F_{Nx} - p_0 (A_2 - A_1) = 0$

Bernoulli :
$p_0 + \rho \cdot g \cdot H_1 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \rightarrow p_1 = 0{,}1117 \text{ bar}$

$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \rightarrow p_2 = 1 \text{ bar}$

$A_1 = h_1^2 \qquad A_2 = h_1 \cdot h_2$

$F_{Nx} = 2{,}937 \cdot 10^4 N$

g) $P_0 + \rho \cdot g \cdot H_1 + \cancel{\frac{\rho}{2} V_1^2} \xrightarrow{} =0 = P_0 + \frac{\rho}{2} V_2^2 + \rho \int_1^2 \frac{\partial v_2}{\partial t} ds$

$= P_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2 + \rho \frac{d v_2}{dt} L$

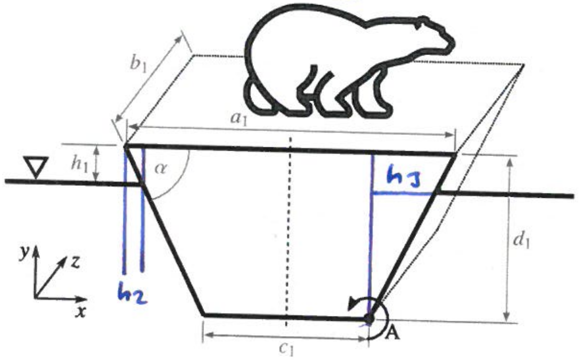
$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{2 \cdot g \cdot H_1 - V_2^2}{2L}$$

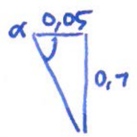
$$dt = \frac{2L}{2gH_1 - V_2^2} dV_2$$

$$\Delta T = \int_0^{0{,}9 \cdot V_1} \frac{2L}{2gH_1 - V_2^2} dv_2 = 3{,}838s$$

Aufgabe 1: Hydrostatik

(29 P.) Die Eisbärin „N26328“ aus Spitzbergen (die schon Opfer einer früheren SL2-Aufgabe war) driftet auf einer kleinen Eisscholle im europäischen Nordmeer. Sie wurde bei einem Hubschrauberflug gesichtet, wobei die Abmaße der Eisscholle teilweise bestimmt werden konnten. Bei der Eisscholle handelt es sich um einen prismatischen Körper mit einem symmetrischen Trapez mit den Seitenlängen a_1, c_1 und der Höhe d_1. In z-Richtung ist die Eisscholle gleichförmig und hat die Länge b_1.





Gegeben

$a_1 = 3\,\text{m}$	Breite Oberseite der Trapezform
$b_1 = 3\,\text{m}$	Länge der Eisscholle in z-Richtung
$h_1 = 0.1\,\text{m}$	Höhe der Oberseite von Wasserspiegel
$\tan(\alpha) = 2$	Winkelbeziehung Trapez
$m_B = 190\,\text{kg}$	Gewicht Eisbärin
$\rho_{SW} = 1025\,\text{kg}/\text{m}^3$	Dichte Salzwasser
$\rho_{Eis} = 917\,\text{kg}/\text{m}^3$	Dichte Eis
$p_0 = 1{,}0\,\text{bar}$	Umgebungsdruck
$g = 9{,}81\,\text{m}/\text{s}^2$	Erdbeschleunigung

Hinweise

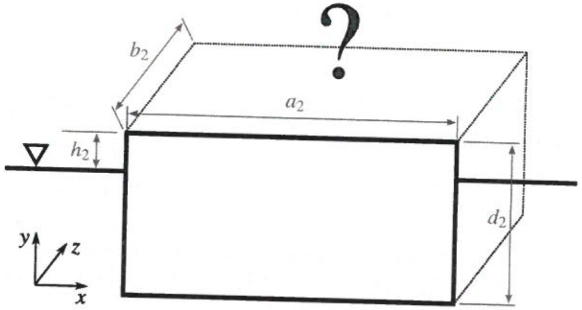
- Der Auftrieb in Luft sei für die gesamte Aufgabe vernachlässigbar.
- Flächeninhalt eines Trapezes: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$
- Aufgaben d), e) und f) können unabhängig von den Aufgaben a), b) und c) bearbeitet werden.

1a) Bei dem Überflug konnte die obere Fläche der Eisscholle (a_1 und b_1), das Winkelverhältnis $\tan(\alpha)$ des Trapezes sowie die Höhe der Oberseite über dem Wasserstand h_1 bestimmt werden. Die Masse der Eisbärin m_B konnte aus alten Daten geschätzt werden. Wie groß sind die Höhe d_1 und die untere Seitenlänge c_1 der Eisscholle? (7)

(1b)) Berechnen Sie die Kraft in x- und y-Richtung, die das Wasser auf die rechte Seite der Eisscholle ausübt. (Notwerte: $d_1 = c_1 = 1{,}5\,\text{m}$) (5)

(1c)) Berechnen Sie das Moment M_A um den Punkt A, welches nur aufgrund der Druckkräfte des Wassers von der rechten Seite auf die Eisscholle wirkt. Vernachlässigen Sie für diese Teilaufgabe den Umgebungsdruck p_0. (5)
Hinweis: Wählen Sie geschickt ein Koordinatensystem mit Ursprung in A.

Da die Oberseite der Scholle nur einen geringen Abstand zum Wasser hat, ist die Eisbärin besorgt, bald nasse Pfoten zu bekommen. Auf ihrer Irrfahrt sichtet die Eisbärin eine weitere Eisscholle, bei welcher die Oberseite einen größeren Abstand $h_{2,l}$ zum Wasser hat. Diese Eisscholle ist quaderförmig mit einer Grundfläche von a_2 und b_2 und einer Höhe d_2.



Weitere Größen:

$a_2 = 3\,\text{m}$	Breite der Eisscholle
$b_2 = 2\,\text{m}$	Länge der Eisscholle in z-Richtung
$h_{2,l} = 0{,}2\,\text{m}$	Höhe der Oberseite über dem Wasserspiegel (leer)

1d) Berechnen Sie die Höhe d_2 der Eisscholle und bestimmen Sie, ob die Eisscholle eine Verbesserung für die Eisbärin darstellen würde, d.h. ob die Höhe der Oberseite der Eisscholle von dem Wasserspiegel mit Eisbärin $h_{2,d}$ größer als h_1 ist. (5)

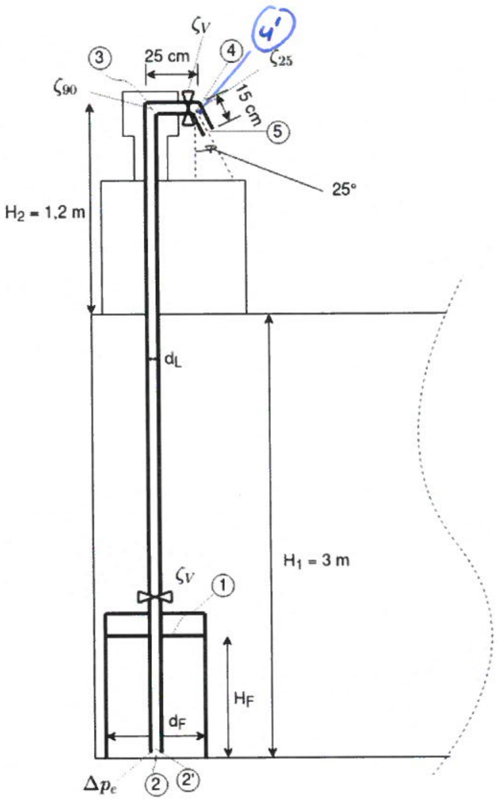
Die Eisbärin treibt bis nach Island und kommt in der Skjálfandi-Bucht an. Leider ist kurz vorher ein Öltanker in der Nähe havariert, weswegen durch den Wind eine Ölschicht der Dicke $t_{Öl} = 0{,}05\,\text{m}$, welche eine Dichte von $\rho_{Öl} = 900\,\text{kg}/\text{m}^3$ hat, über das Meerwasser gedrückt wird.

1e) Berechnen Sie die neue Höhe der Oberseite über dem Flüssigkeitspegel $h_{2,e}$, welcher sich durch das Öl jetzt einstellt. Erklären Sie in Worten die Ursache für die Veränderung zu $h_{2,d}$. (5)

1f) Die Eisbärin soll mit einem Hubschrauber (betäubt) aus ihrer Misere gerettet werden. Das Rettungsteam ist allerdings besorgt, beim Einsatz die Eisscholle samt der Eisbärin im Ölteppich zu versenken. Bleibt die Oberseite der Eisscholle über dem Flüssigkeitspegel, wenn ein Hubschrauber einen Abwind von $F_{Heli} = 500\,\text{N}/\text{m}^2$ auf die Scholle ausübt und zudem eine Person mit $m_P = 80\,\text{kg}$ auf der Eisscholle steht? Berechnen Sie dazu $h_{2,f}$. (2)

Aufgabe 2: Bierzapfanlage

(36 P.) Ein Barbesitzer plant für seine neue Bar eine Zapfanlage für Weizenbier. Dafür befindet sich ein Stockwerk unter dem Tresen ein Kühlraum, von dem aus das Bier über eine Rohrleitung in die Zapfanlage befördert wird. Im Kühlraum herrschen angenehme 6 °C. Das Bier wird aus einem 50 ℓ Fass mittels Überdruck aus einer angeschlossenen CO_2 Flasche (nicht abgebildet) zum Zapfhahn befördert. Unmittelbar über dem Fass befindet sich ein Ventil, am Zapfhahn selbst ein weiteres. Im Folgenden sind beide Ventile geöffnet, aber verlustbehaftet.



Hinweise

- Beachten Sie die Abbildung, dort sind wichtige Maße enthalten.
- Betrachten Sie das Fass als dickes Rohr, in dem das Bier ganz langsam strömt.
- Die Strömung ist durchgehend als reibungsbehaftet zu behandeln.
- Bei Δp_E handelt es sich um die gesamte Druckabnahme beim Übergang vom Fass in die Leitung.

Gegeben

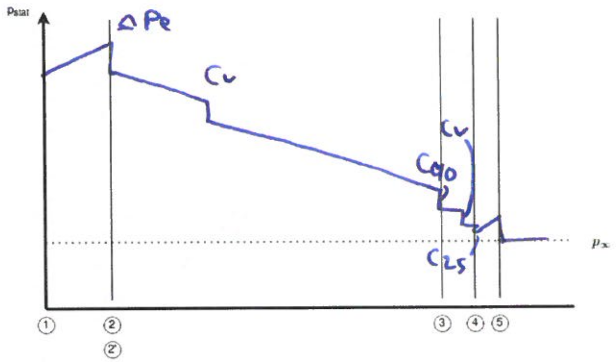
Dichte Bier	ρ_B	1007,76 $\mathrm{kg/m^3}$
Dynamische Viskosität Bier	η_B	$2{,}868 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$
Volumenstrom in der Leitung	$\dot{V}$	2 ℓ/min
Durchmesser der Leitung	d_L	7 mm
Füllstand des Fasses	H_F	0,5 m
Volumen des Fasses bei Füllstand H_F	V_F	50 ℓ
Druckverlust Leitungseinlauf (Fass)	Δp_E	0,05 bar
Verlustbeiwert der Ventile	ζ_V	0,1
Verlustbeiwert der 90° Krümmung	ζ_{90}	0,1
Verlustbeiwert der 25° Krümmung	ζ_{25}	0,025
Umgebungsdruck	p_∞	1,013 bar
Erdbeschleunigung	g	9,81 $\mathrm{m/s^2}$

2a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in der Leitung (v_L) und im Fass (v_F). (4)

2b) Welcher Strömungszustand liegt jeweils im Fass und in der Leitung vor? Bestimmen Sie hierfür die Reynolds-Zahlen für beide Bereiche. (4)

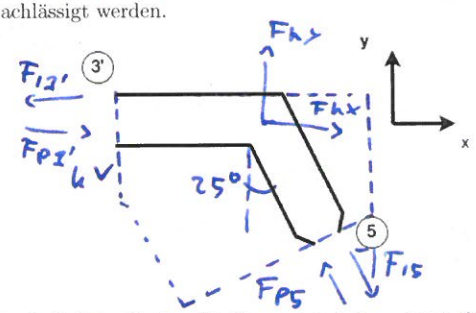
2c) Stellen Sie den verlustbehafteten Bernoulli von ① nach ② und von ②' nach ④ auf. Das obere Ventil ist hierbei vor dem Zustand ④ und die 25° Krümmung nach dem Zustand ④ positioniert. (4½)

2d) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf des statischen Drucks entlang eines Stromfadens von ① bis ⑤. Nehmen Sie hierbei an, dass am Austritt des Zapfhahns bei ⑤ ein weiterer Druckverlust auftritt. (5½)



2e) Damit das Bier nicht schäumt, sollte der statische Druck stets höher sein als der Sättigungsdruck des im Bier gelösten CO_2. Berechnen Sie den Druck p_1, der nötig ist, um einen statischen Druck höher als 1,35 bar über die komplette Leitung zu gewährleisten. (6)

2f) Nun soll die Kraft auf den Zapfhahn bestimmt werden. Zeichnen Sie zunächst ein geeignetes Kontrollvolumen und tragen Sie alle auftretenden Kräfte ein. Volumenkräfte können vernachlässigt werden. (4)



2g) Am Zapfhahn befindet sich eine Verjüngung auf $d_D = 4$ mm Durchmesser, darüber hinaus tritt im Hahn ein Reibungsverlust von insgesamt 0,32 bar auf. Berechnen Sie daraus die Kräfte, die in x- und y-Richtung auf den Zapfhahn wirken. (8)

ömung Klausur f21 ①

①

a) Massengleichgewicht: $m_B + (\frac{a+\overset{c_1}{c}}{2}\cdot \overset{d_1}{h})\,\rho_{eis}\cdot g \overset{!}{=} \frac{(a_1-2\cdot h_2)\cdot c_1}{2}\cdot(d_1-h_1)\cdot g\cdot \rho_w$

$h_2 = \frac{h_1}{\tan(\alpha)}$ $\qquad h_1 = \frac{2,9}{2} - c_1/2 = 0,7035\,m$

$A = \frac{a_1+c_1}{2} d_1$

$\tan(\alpha) = \frac{d_1}{(a_1-c_1)/2} = 2$

$c_1 = 1,493\,m \qquad d_1 = 1,508\,m$

b) ~~$F_y = (p_0 + 1028 \cdot 9,81 \cdot 3) \int_0^{0,7535} (2x)\,dx = 11,13\,kN$~~

~~$F_x = \frac{1028\cdot 9,81}{2}(0^2-(1,508-0,1)^2)\cdot 3 = -29,90\,kN$~~ ~~Anders als in Lösung~~

~~c) $M_A = 1028 \cdot 9,81 \cdot 3 \left(\int_0^{0,7535} x(2x)\,dx + \frac{1}{3}(0^3-(1,508-0,1)^3)\right)$~~

~~$= 36,67\,kNm$~~ ↯ ~~Fehler in Formelsammlung?~~

$F_x = p_S \cdot A_{proj} = (p_0 + \rho_{sw}\cdot g\cdot \frac{d_1-h_1}{2})\cdot(d_1-h_1)\cdot b_1 = \overset{452,3}{\cancel{[illegible]}}\,kN$

$F_y = (\frac{(a_1-2\cdot h_2)+c_1}{2}\cdot(d_1-h_1)\cdot b_1\cdot g\cdot\rho_{sw}) : 2 = \overset{46,65}{\cancel{[illegible]}}\,kN$ (Auftrieb

c) $M_A = \rho_{sw}\cdot g\cdot b_1 \cdot \left(\int_0^{h_3} x(2x)\,dx - \frac{1}{3}((d_1-h_1)^3-0^3)\right) = -27,07\,kN$

②

d) Auftrieb $\overset{!}{=}$ Gewichtskraft

$(d_2-h_2)\cdot b_2\cdot a_2\cdot\rho_w\cdot g = d_2\cdot b_2\cdot a_2\cdot\rho_{eis}\cdot g$

$d_2 = 1,898\,m$

Höhe Mit Eisbärin:

$(m_b + d_2 b_2 a_2 \rho_{eis})\cdot g = (d_2-h_3)\cdot b_2\cdot a_2\cdot\rho_w\cdot g$

$h_3 = 0,7697\,m$ → besser als vorher!

e) $t_{öl} = 0,05\,m \qquad \rho_{öl} = 900\,\frac{kg}{m^3}$

$(m_b + d_2 b_2 a_2 \rho_{eis})\,g = t_{öl}\cdot b_2\cdot a_2\cdot\rho_{öl}\cdot g + (d_2 - x \overset{}{-t_{öl}})\,b_2\cdot a_2\cdot\rho_w\cdot g$

$x = h_3 = 0,7630\,m$ Öl ist leichter als Wasser (schwimmt oben) und erzeugt daher weniger Auftrieb als Wasser → Scholle sinkt ab.

(Archimedisches Prinzip

②

f) $F_{Heli} = 500 \frac{N}{m^2}$ $m_P = 80\ kg$

$$(m_G + m_P + \frac{(F_{Heli} \cdot b_2 \cdot a_2)}{g} + b_2 \cdot d_2 \cdot a_2 \cdot \rho_{eis}) \cdot g = (t_{Öl} \cdot b_2 \cdot a_2 \cdot \rho_{Öl} + (d_2 - x - t_{Öl}) \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot \rho_W) \cdot g$$

$x = h_{2,f} = 0,1003\ m$

② ~~Bernoulli Druckform~~

a) Geschw. konst. im ganzen Rohr: $v_L = \frac{\dot{V}}{A}$ ~~Durchmesser Fass: π·dF~~

$\dot{V} = 2 \frac{l}{min} = 3,333 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s}$

$A = \pi \cdot (\frac{7}{2})^2$

$V_L = 0,8667 \frac{m}{s}$

~~b) ($Re_L = \frac{v_L \rho_B d_L}{\eta_B} = 2130 < 2300 \rightarrow$ laminar)~~

~~Durchmesser des Fasses ohne Bierleitung~~:

Fass: $V_F = H_F \cdot \pi \cdot (\frac{d_F}{2})^2 \rightarrow d_F = 0,3568 m$

$v_F = \frac{\dot{V}}{\pi \frac{d_F^2}{4} - \pi \cdot \frac{d_L^2}{4}} = 3,335 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}$

b) $Re_L = \frac{v_L \rho_B d_L}{\eta_B} = 2130 < 2300 \rightarrow$ laminar

$Re_F = \frac{v_F \rho_B (d_F - d_L)}{\eta_B} = 42,65 < 2300 \rightarrow$ laminar

c) ~~Re~~

① -> ② $\lambda_F = \frac{64}{Re} = 1,507$

$$\rho_B v_F^2 + p_1 + \rho_B \cdot g \cdot H_F = \rho_B v_F^2 + p_2 + \rho_B g \cdot 0 + \frac{\rho_B}{2} v_E^2 (\lambda_F \frac{H_F}{d_h})$$

$\hookrightarrow (d_F - d_L)$

②' -> ④

~~ρ_B~~

$$\rho_B v_L^2 + p_2' + \rho_B \cdot g \cdot 0 = \rho_B v_4^2 + p_4 + \rho_B \cdot g \cdot (H_1 + H_2) + \rho_B v_L^2 (\lambda \frac{(H_1 + H_2 + 25)}{d_L} + 2\zeta_V + \zeta_{90})$$

d) Sprung ζ_V und ζ_{90} gleich groß

ζ_S ist kleiner als ζ_{90} und ζ_V

Zeichnung siehe Aufgabenblatt

trömung Klausur F21

e) P_1, damit über komplette Leitung $p \geq 1{,}35$

Geringster Druck nach 25° Krümmung bei ④'

Beide Bernoulligleichungen aus c) zusammensetzen : ① -> ④'

$$\rho_B v_F^2 + P_1 + \rho_B g H_F = \rho_B v_L^2 + P_4' + \Delta p_E + \rho_B g (H_1+H_2) +$$

$$+ \frac{\rho_B}{2} v_L^2 \left(\lambda_L \frac{H_1+H_2+25}{d_L} + 2\zeta_V + \zeta_{90} + \zeta_{25} \right)$$

$$+ \frac{\rho_B}{2} v_F^2 \left(\lambda_F \frac{H_F}{d_h} \right)$$

$\lambda_F = 1{,}501$ $\lambda_L = 0{,}0[illegible]3005$

$P_1 = P_4' + 0{,}4968 \text{ bar}$; $P_4' = 1{,}35 \text{ bar}$

$P_1 = 1{,}847 \text{ bar}$ (Rundungsfehler, weil Lösung bei λ keine 4 sign. Stellen hat)

f) Kontrollvolumen KV auf Aufgabenblatt

Kraft-/Impulsströme auf Aufgabenblatt

g) $d_D = 4\,mm$ Verlust von 0,32 bar

$$v_D = \frac{\dot{V}}{\pi \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^2} = 2{,}652 \frac{m}{s}$$

Bernoulli von ③' zu ⑤

$$P_3' + \frac{\rho_B}{2} v_L^2 + \rho_B \cdot g \cdot (15 \cdot \cos(25)) = P_\infty + \frac{\rho_B}{2} v_D^2 + \rho_B \cdot g \cdot 0$$

$P_3' = 1{,}037 \text{ bar}$ + Reibungsverlust im Hahn:

$P_3' = 1{,}357 \text{ bar}$

Impulssatz x-Richtung :

$$-F_{I3'} + F_{I5} \cdot \sin(25°) = F_{P3'} - F_{P5} \cdot \sin(25°) + F_{hx}$$

$$-\rho_B \cdot v_L^2 \cdot A_L + \rho_B \cdot v_D^2 \cdot A_D \cdot \sin(25°) = (P_3' - P_\infty) A_L + F_{hx}$$

$$F_x = -F_{hx} = 1{,}34\,N$$

Impulssatz y-Richtung :

$$-F_{I5} \cdot \cos(25°) = F_{hy}$$

$$-\rho_B v_D^2 A_D \cdot \cos(25°) = F_{hy}$$

$$F_y = -F_{hy} = 0{,}081\,N$$