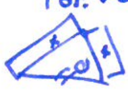
$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix}$ $\quad -\delta_{11} X_1 = \delta_{10}$

1 Konstruktion von Polplänen

Die Bewegung einer starren Scheibe lässt sich auf die Rotation um einen Drehpunkt (Momentanpol) zurückführen.
Bei einem kinematisch verschieblichen System lässt sich mit Hilfe der Polplankonstruktion die Verschiebungsfigur bestimmen.
Bei einem statisch bestimmten System ist die Polplankonstruktion nicht eindeutig.

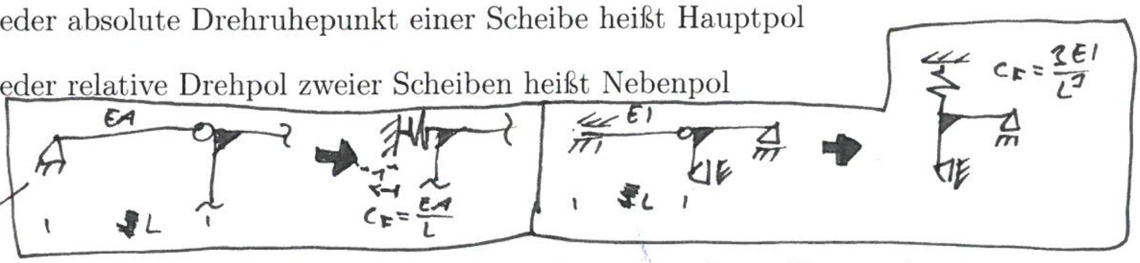
Definition:

$T_u - T_o > 0 \rightarrow$ Pos. Verlauf!



1. Jeder absolute Drehruhepunkt einer Scheibe heißt Hauptpol
2. Jeder relative Drehpol zweier Scheiben heißt Nebenpol

Sätze:



Drehung des Auflagers spielt wohl keine Rolle...?

a) Jedes unverschiebliche Gelenklager einer Scheibe ist deren Hauptpol.

b) Der Hauptpol einer verschieblich gelagerten Scheibe liegt auf der Normalen zur Lagerebene.

c) Jedes Biegemomentengelenk über das zwei Scheiben verbunden sind, ist der gemeinsame Nebenpol zweier Scheiben.

d) Die beiden Hauptpole und der Nebenpol zweier Scheiben liegen auf einer Geraden.

e) Ein Pol liegt im Unedlichen, wenn seine geometrischen Orte parallele Geraden bilden.

f) Die Nebenpole von drei Scheiben liegen auf einer Geraden.

g) Der Nebenpol zweier durch ein Normalkraft-, bzw. Querkraftgelenk verbundene Scheiben liegt senkrecht zur freien Verschiebungsrichtung im Unendlichen.

h) Liegt der Hauptpol einer Scheibe im Unendlichen, erfährt die Scheibe nur eine Parallelverschiebung.

Auflager Gelenkkräfte Stäbe

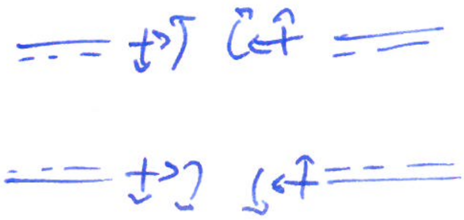
Stat. Bestimmtheit: $n = (a+v) - 3p$; $v = (s-1) \cdot 2$

$n > 0$: n fach statisch unbestimmt

$n = (a+v) - 3 \cdot p$

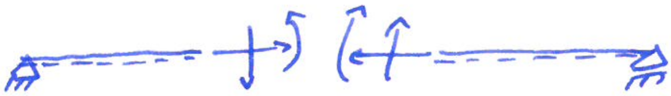
$v = (s-1) \cdot 2$

Wiederspruch in Polplan → kinematisch bestimmt



Reduktionssatz

2 Sätze



Definition Einflusszahl α_{ik}

α_{ik} gibt die Verschiebung an der Stelle i infolge der Kraft $F_k = 1$ an.

$$f_{ik} = \alpha_{ik} F_k$$

$$\alpha_{ik} = \frac{f_{ik}}{F_k}$$

Satz von Betti:

Die geleistete Verschiebungsarbeit im Kraftsystem i infolge der Belastung durch ein Kraftsystem k ist gleich der Verschiebungsarbeit im Kraftsystem k infolge der Belastung durch ein Kraftsystem i, d.h.

$$w_{ik} = w_{ki}$$

$$\alpha_{ik} F_i F_k = \alpha_{ki} F_k F_i$$

Satz von Maxwell:

Die Verschiebungen im Punkt i in Richtung F_i infolge $F_k = 1$ ist gleich der Verschiebung im Punkt k in Richtung von F_k infolge $F_i = 1$. Die Einflusszahlen sind symmetrisch.

$$\begin{aligned} &\alpha_{ik} F_i F_k = \alpha_{ki} F_k F_i \\ &\text{mit } F_i = F_k = 1 \\ &\Rightarrow \alpha_{ik} = \alpha_{ki} \end{aligned}$$

<u>konjugierte äußere Arbeit:</u>

$$\overline{w} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} F_i F_k$$

Satz von Castigliano:

Bei einem linear elastischem System liefert die partielle Ableitung nach dem Betrag der Kraft F_j die Verschiebung des Angriffspunkt dieser Kraft in Richtung dieser Kraft.

$$f_j = \frac{\partial w}{F_j} = \frac{\partial u}{F_j}$$

3 Arbeitssatz/Prinzip der virtuellen Kräfte

Mit Hilfe des Arbeitssatzes $W = \Pi$
(W = von äußeren Lasten geleistete Arbeit, Π = innere Energie)
lassen sich die Verschiebungen in Richtung der Kraft F bestimmen.

$$W = \frac{1}{2}Ff \quad \text{und} \quad W = \frac{1}{2}M_0\varphi$$

Erzeugt die Kraft F eine Verschiebung in eine abweichende Richtung, so lassen sich diese Verschiebungen (bzw. Verdrehungen) mit Hilfe virtueller Kräfte ermitteln.

Vorgehensweise

1. Schnittgrößen infolge tatsächlicher Belastung ermitteln
2. Zur gesuchten Verschiebungsgröße korrespondierende virtuelle Belastung aufbringen
3. Schnittgrößen infolge virtueller Belastung ermitteln
4. Einsetzen in den Arbeitssatz liefert unbekannte Verschiebungsgröße
   (Überlagerung mit Integrationstabellen)

4 Arbeitssatz

$\delta = \frac{1}{EA}(l \cdot (-1)^2) \doteq \frac{(-1)^2}{C_F}$ → nach CF auflösen

$\delta = \frac{1}{EA}\int \overline{N}^2 dx + \frac{1}{EI}\int \overline{M}^2 dx$

$C_F = \frac{1}{\delta}$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
"1"\delta = &\int \frac{N\overline{N}}{EA}dx + \int \frac{Q_y\overline{Q}_y}{GA_s}dx + \int \frac{Q_z\overline{Q}_z}{GA_s}dx \\
&+ \int \frac{M_y\overline{M}_y}{EI_y}dx + \int \frac{M_z\overline{M}_z}{EI_z}dx + \int \frac{M_x\overline{M}_x}{GI_T}dx \\
&+ \frac{\sum F_{fi}\overline{F}_{fi}}{c_F} + \frac{\sum M_{fi}\overline{M}_{fi}}{c_M} \\
&- \sum a_i\overline{F}_{Ai} - \sum \varphi_i\overline{M}_{Ai} \\
&+ \int \alpha_T\Delta T_N\overline{N}dx + \int \alpha_T\Delta T_{My}\overline{M}_y dx + \int \alpha_T\Delta T_{Mz}\overline{M}_z dx
\end{aligned}
}
$$

mit

«1» =	virtuelle Last (infinitesimal, dimensionslos)
δ =	zur virtuellen Last korrespondierenden Verschiebungsgröße
$N, Q_y, Q_z, M_y, M_z, M_x$ =	Schnittgrößen infolge realer Belastung
$\overline{N}, \overline{Q}_y, \overline{Q}_z, \overline{M}_y, \overline{M}_z, \overline{M}_x$ =	Schnittgrößen infolge virtueller Belastung
F_f, M_f =	Lagerreaktionen bei Federn infolge realer Belastung
$\overline{F}_f, \overline{M}_f$ =	Lagerreaktionen bei Federn infolge virtueller Belastung
c_F, c_M =	Federsteifigkeiten (Weg- bzw. Drehfeder)
a_i, φ_i =	Lagerverschiebung bzw Lagerverdrehung
$\overline{F}_{Ai}, \overline{M}_{Ai}$ =	zur Lagerverschiebung/-verdrehung korrespondierende Lagerreaktion
α_T =	Temperaturausdehnungskoeffizient
ΔT_N =	gleichmäßige Temperaturbelastung
ΔT_{My} =	ungleichmäßige Temperaturbelastung (erzeugt Krümmung um y-Achse
ΔT_{Mz} =	ungleichmäßige Temperaturbelastung (erzeugt Krümmung um z-Achse

$$\Delta T_N = \frac{T_u + T_o}{2}$$

$$\Delta T_M = \frac{T_u - T_o}{h} \quad \text{mit } h = \text{Querschnittshöhe}$$

5 Kraftgrößenverfahren

Mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens lassen sich die Schnittgrößen von ein- oder mehrfach statisch unbestimmten Systemen ermitteln. Die statische Bestimmtheit lässt sich anhand eines **Abzählkriteriums** ermitteln:

$$\text{am Gesamtsystem:} \quad n = (a + v) - 3 \cdot p$$
$$\text{bei Zerlegung:} \quad n = (a + s \cdot p) - (g \cdot k + r)$$

mit
a = Anzahl der Lagerreaktionen
v = Anzahl der Verbindungsreaktionen
p = Anzahl der Teilsysteme
s = Anzahl unabhängiger Schnittgrößen je Teilsystem
k = Anzahl der Knoten (einschließlich der Lager)
g = Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen je Knoten
r = Summe aller Nebenbedingungen

Vorgehensweise

1. statische Unbestimmtheit mit Hilfe eines Abzählkriteriums ermitteln
2. Wahl des statisch bestimmten Hauptsystems (HS)
   · n-fach statisch unbestimmt $\Rightarrow$ lösen von n Bindungen
   · HS muss kinematisch und statisch bestimmt sein
3. Berechnung des Lastspannungszustandes (LSZ)
   · Berechnung des HS unter tatsächlicher Belastung
4. Berechnung der n Einspannungszustände (ESZ)
   · Schnittgrößen für HS unter Einfluss der zur k-ten gelösten Bindung entsprechend angesetzten k-ten "1Last X_k mit $k = 1...n$
5. Berechnung der Einflusszahlen δ_{ik}
6. Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems
   $$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} X_k = -\delta_{i0}$$
7. Ermittlung der Schnittgrößen (Zustandslinien) aus Superposition
   $$Z = \sum_{k=0}^{n} X_k \overline{Z_k} = -\delta_{i0} \quad .$$
   mit $X_0 = 1$

6 Reduktionssatz

$$
\begin{aligned}
"1"\delta = & \int \frac{N\overline{N}_o}{EA}dx + \int \frac{Q_y\overline{Q}_{y,o}}{GA_s}dx + \int \frac{Q_z\overline{Q}_{z,o}}{GA_s}dx \\
& + \int \frac{M_y\overline{M}_{y,o}}{EI_y}dx + \int \frac{M_z\overline{M}_{z,o}}{EI_z}dx + \int \frac{M_x\overline{M}_{x,o}}{GI_T}dx \\
& + \frac{\sum F_f\overline{F}_{f,o}}{c_F} + \frac{\sum M_f\overline{M}_{f,o}}{c_M} \\
& - \sum a_i\overline{F}_{Ai,o} - \sum \varphi_i\overline{M}_{Ai,o} \\
& + \int \overline{N}_o\alpha_T\Delta T_N dx + \int \overline{M}_{y,o}\alpha_T\Delta T_{M_y} dx + \int \overline{M}_{z,o}\alpha_T\Delta T_{M_z} dx
\end{aligned}
$$

mit

$N, Q_y, Q_z, M_y, M_z, M_x =$ endgültige Schnittgrößen des statisch unbestimmten Systems infolge tatsächlicher Belastung

$\overline{N}_o, \overline{Q}_{y,o}, \overline{Q}_{z,o}, \overline{M}_{y,o}, \overline{M}_{z,o}, \overline{M}_{x,o} =$ Schnittgrößen eines beliebigen statisch bestimmten Hauptsyster infolge virtueller "1Last

$F_f, M_f =$ endgültige Auflagergröße bei Federn des statisch unbestimmten Systems infolge tatsächlicher Belastung

$\overline{F}_{f,o}, \overline{M}_{f,o} =$ Auflagergrößen bei Federn des statisch bestimmten HS infolge virtueller "1Last

$\overline{F}_{Ai,o}, \overline{M}_{Ai,o} =$ Auflagergröße des statisch bestimmten HS, die zur Stützenverschiebung bzw. -verdrehung korrespondiert, infolge virtueller "1Last

Zusammenfassung Reduktionssatz

Mit Hilfe des Reduktionssatzes lassen sich die tatsächlichen Verformungen (Verschiebungen/Verdrehungen) eines statisch unbestimmten Systems infolge der tatsächlichen Belastung berechnen.
Hat man den tatsächlichen Schnittgrößenverlauf bestimmt, kann man mit Hilfe des Reduktionssatzes die Verformungen ermitteln, indem man die tatsächlichen Schnittgrößen mit den Schnittgrößen aus der virtuellen Belastung (zur gesuchten Verformung korrespondierende aufgebrachte "1Last) überlagert.

$$"1"\delta = \int \frac{M\overline{M}}{EI} dx \qquad \Rightarrow \text{aufwändig}$$

$$"1"\delta = \int \frac{M^b\overline{M^u}}{EI} dx \qquad \Rightarrow \text{gut für mehrere LSZ und nur eine Verschiebung}$$

$$"1"\delta = \int \frac{M^u\overline{M^b}}{EI} dx \qquad \Rightarrow \text{gut für einen LSZ und mehrere Verschiebungen}$$

7 Überlagerungstabelle

Tafel 3.1: **Werte der Integrale** $\int M_j M_k \, dx = l \cdot$ (Tafelwert)

Nr.	l	k k	k	k_1 k_2	k $-k$	k $-\frac{k}{2}$	αl βl k	$\int j^2 \, dx$
1	j j	jk	$\frac{1}{2} jk$	$\frac{1}{2} j (k_1 + k_2)$	0	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{2} jk$	j^2
2	j	$\frac{1}{2} jk$	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{6} j (k_1 + 2k_2)$	$-\frac{1}{6} jk$	0	$\frac{1}{6} jk (1 + \alpha)$	$\frac{1}{3} j^2$
3	j	$\frac{1}{2} jk$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} j (2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{6} jk (1 + \beta)$	$\frac{1}{3} j^2$
4	j_1 j_2	$\frac{1}{2} k (j_1 + j_2)$	$\frac{1}{6} k (j_1 + 2j_2)$	$\frac{1}{6} [j_1 (2k_1 + k_2) + j_2 (k_1 + 2k_2)]$	$\frac{1}{6} k (j_1 - j_2)$	$\frac{1}{4} j_1 k$	$\frac{1}{6} k [j_1 (1+\beta) + j_2 (1 + \alpha)]$	$\frac{1}{3} (j_1^2 + j_1 j_2 + j_2^2)$
5	j $-j$	0	$-\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} j (k_1 - k_2)$	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{6} jk (1 - 2\alpha)$	$\frac{1}{3} j^2$
6	j $-\frac{j}{2}$	$\frac{1}{4} jk$	0	$\frac{1}{4} jk_1$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{4} jk\beta$	$\frac{1}{4} j^2$
7	$-\frac{j}{2}$ j	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{4} jk_2$	$-\frac{1}{4} jk$	$-\frac{1}{8} jk$	$\frac{1}{4} jk\alpha$	$\frac{1}{4} j^2$
8	$\frac{l}{2}$ j	$\frac{1}{2} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{4} j (k_1 + k_2)$	0	$\frac{1}{8} jk$	$\frac{jk}{12\beta} (3 - 4\alpha^2)$	$\frac{1}{3} j^2$
9	γl δl j	$\frac{1}{2} jk$	$\frac{1}{6} jk (1 + \gamma)$	$\frac{1}{6} j [k_1 (1 + \delta) + k_2 (1 + \gamma)]$	$\frac{1}{6} jk (1 - 2\gamma)$	$\frac{1}{4} jk\delta$	$\frac{jk}{6\beta\gamma} (2\gamma - \gamma^2 - \alpha^2)$ $\gamma \geq \alpha$	$\frac{1}{3} j^2$
10	j Quadr. Parabel	$\frac{2}{3} jk$	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{3} j (k_1 + k_2)$	0	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{3} jk (1 + \alpha\beta)$	$\frac{8}{15} j^2$
11	j j Quadr. Parabel	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} j (k_1 + k_2)$	0	$\frac{1}{12} jk$	$\frac{1}{6} jk (1 - 2\alpha\beta)$	$\frac{1}{5} j^2$
12	j Quadr. Parabel	$\frac{2}{3} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{12} j (5k_1 + 3k_2)$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{7}{24} jk$	$\frac{1}{12} jk (5 - \alpha - \alpha^2)$	$\frac{8}{15} j^2$
13	j Quadr. Parabel	$\frac{2}{3} jk$	$\frac{5}{12} jk$	$\frac{1}{12} j (3k_1 + 5k_2)$	$-\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{24} jk$	$\frac{1}{12} jk (5 - \beta - \beta^2)$	$\frac{8}{15} j^2$
14	j Quadr. Parabel	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{12} j (k_1 + 3k_2)$	$-\frac{1}{6} jk$	$-\frac{1}{24} jk$	$\frac{1}{12} jk (1 + \alpha + \alpha^2)$	$\frac{1}{5} j^2$
15	j Quadr. Parabel	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{12} jk$	$\frac{1}{12} j (3k_1 + k_2)$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{5}{24} jk$	$\frac{1}{12} jk (1 + \beta + \beta^2)$	$\frac{1}{5} j^2$
16	$l/2$ $-j$ j Quadr. Parabel	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} jk_2$	$-\frac{1}{6} jk$	$-\frac{1}{12} jk$	$\frac{1}{6} jk\alpha (1 + 2\beta)$	$\frac{1}{5} j^2$
17	$l/2$ j $-j$ Quadr. Parabel	$\frac{1}{6} jk$	0	$\frac{1}{6} jk_1$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} jk\beta (1 + 2\alpha)$	$\frac{1}{5} j^2$
18	$l/2$ j_1 j_2 j_3 Quadr. Parabel	$\frac{1}{6} k (j_1 + 4j_2 + j_3)$	$\frac{1}{6} k (2j_2 + j_3)$	$\frac{1}{6} [j_1 k_1 + 2j_2 (k_1 + k_2) + j_3 k_2]$	$\frac{1}{6} k (j_1 - j_3)$	$\frac{1}{12} k (2j_1 + 2j_2 - j_3)$	$\frac{1}{6} k [j_1 \beta + 2j_2 + j_3 \alpha - \alpha\beta (j_1 - 2j_2 + j_3)]$	$\frac{1}{15} [2 (j_1^2 + 4j_2^2 + j_3^2) + 2j_1 j_2 + 2j_2 j_3 - j_1 j_3]$
19	j Kub. Parabel	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{5} jk$	$\frac{1}{20} j (k_1 + 4k_2)$	$-\frac{3}{20} jk$	$-\frac{1}{20} jk$	$\frac{1}{20} jk (1 + \alpha)(1 + \alpha^2)$	$\frac{1}{7} j^2$
20	j Kub. Parabel	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{20} jk$	$\frac{1}{20} j (4k_1 + k_2)$	$\frac{3}{20} jk$	$\frac{7}{40} jk$	$\frac{1}{20} jk (1 + \beta)(1 + \beta^2)$	$\frac{1}{7} j^2$
21	j Kub. Parabel	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{2}{15} jk$	$\frac{1}{60} j (7k_1 + 8k_2)$	$-\frac{1}{60} jk$	$\frac{1}{20} jk$	$\frac{1}{20} jk \left(1 + \alpha\right)\left(\frac{7}{3} - \alpha^2\right)$	$\frac{8}{105} j^2$
22	j Kub. Parabel	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{7}{60} jk$	$\frac{1}{60} j (8k_1 + 7k_2)$	$\frac{1}{60} jk$	$\frac{3}{40} jk$	$\frac{1}{20} jk \left(1 + \beta\right)\left(\frac{7}{3} - \beta^2\right)$	$\frac{8}{105} j^2$

aus Betonkalender 1988

zu Zeile 21/22: $j = \frac{1}{6} \cdot \overline{q}_0 \cdot l^2$

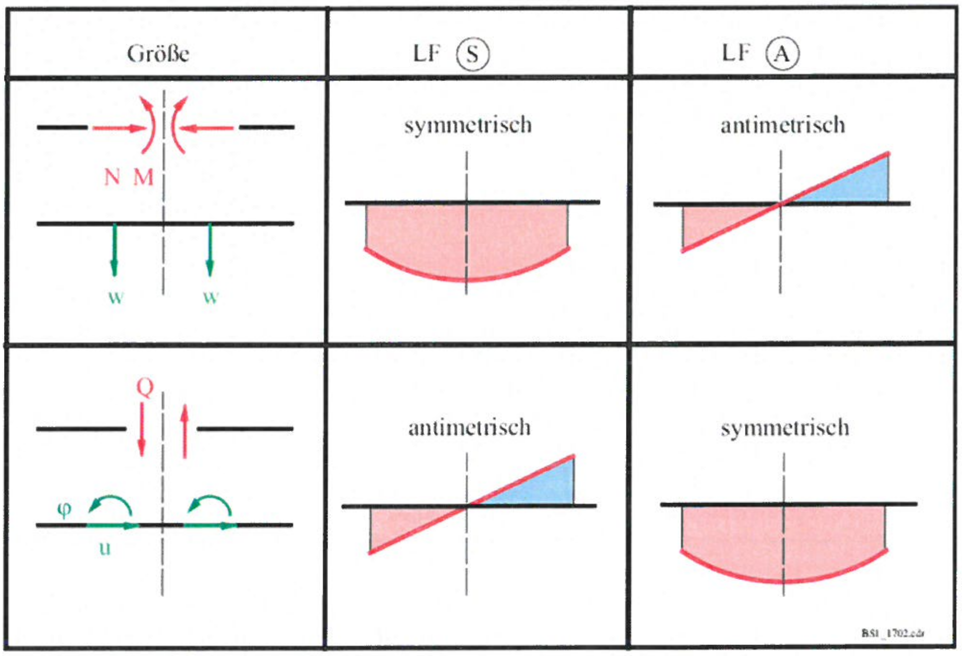
8 Symmetrie - Antimetrie (ebene Systeme)

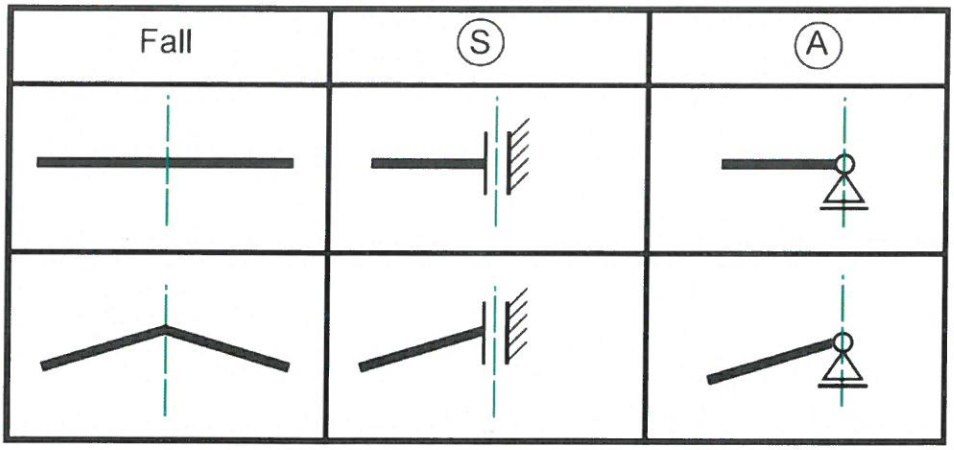
8.1 Ersatzrandbedingungen

Bei symmetrischen Tragwerken unter symmetrischer Belastung sind der Normalkraft- und der Momentenverlauf symmetrisch, der Querkraft-verlauf antimetrisch bezüglich der Symmetrieebene des Systems.

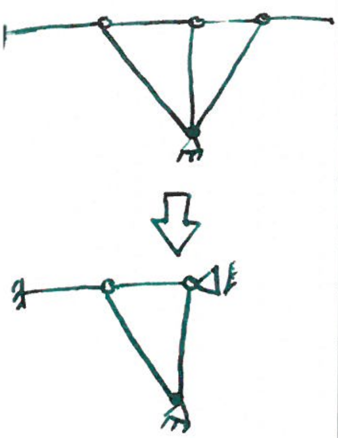
Bei symmetrischen Tragwerken unter antimetrischer Belastung sind der Normalkraft- und der Momentenverlauf antimetrisch, der Querkraftverlauf symmetrisch bezüglich der Symmetrieebene des Systems.

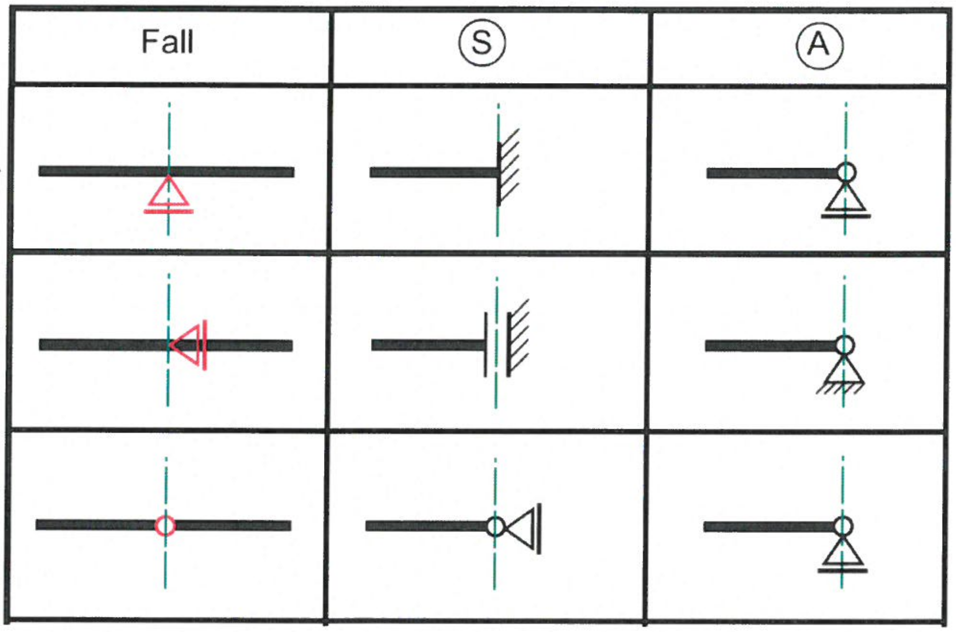
Bei symmetrischen Tragwerken unter symmetrischer oder antimetrischer Belastung kann am halben Ersatzsystem gerechnet werden, sofern entsprechende Ersatzrandbedingungen in der Symmetrieebene angesetzt werden. Die Zustandslinien werden dann nachtraglich symmetrisch bzw. antimetrisch ergänzt.

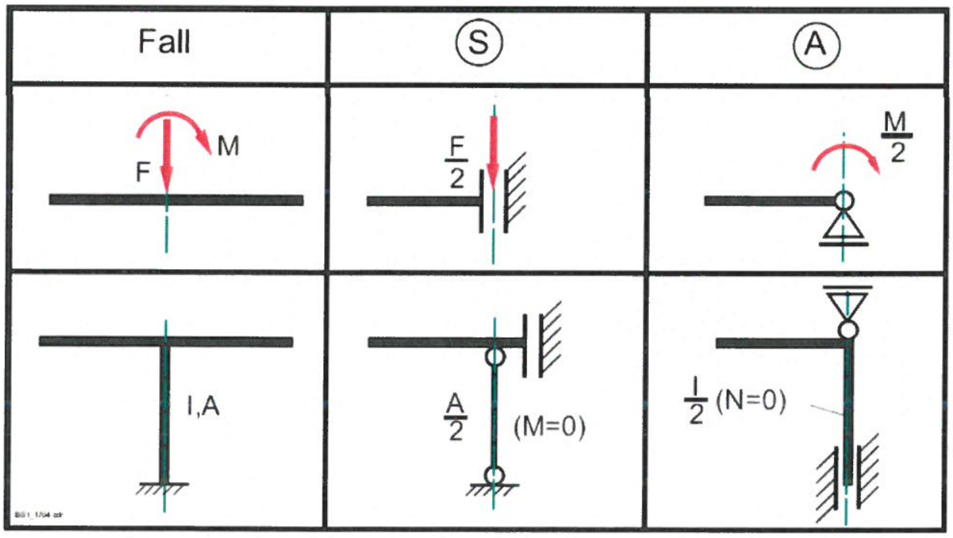




Festlager bleibt







8.2 Belastungsumordnungsverfahren

Für ein symmetrisches System lässt sich jeder Lastfall in einen symmetrischen Lastfall S und antimetrischen Lastfall A additiv zerlegen.

Die Berechnung kann jeweils am halben Ersatzsystem unter Berücksichtigung symmetrischer bzw. antimetrischer Ersatzrandbedingungen erfolgen.

Die Zustandslinien der beiden Lastfälle werden anschließend ergänzt und dann superponiert.

Der Grad der statischen Bestimmtheit reduziert sich häufig bei der Berechnung am halben System. Dadurch kann der Rechenaufwand erheblich reduziert werden.
Für die Aufteilung des Grads der statischen Bestimmtheit im symmetrischen und antimetrischen Lastfall gilt:

$$n = n_S + n_A$$

8.2.1 Additive Zerlegung in symmetrischen und antimetrischen Lastfall

Lastfall Symmetrie

Zwei Lasten auf Hälfte 1 und 2 mit symmetrischem Ort aber unterschiedlichem Wert (und ggfs. VZ)
Ersatzlast entsprechend der Richtung der größeren Last symmetrisch ansetzen:

Größe der Ersatzlast = [(Last aus Hälfte 1) + (Last aus Hälfte 2)] / 2

Lastfall Antimetrie

Zwei Lasten auf Hälfte 1 und 2 mit symmetrischem Ort aber unterschiedlichem Wert (und ggfs. VZ)
Ersatzlast entsprechend der Richtung der größeren Last antimetrisch ansetzen:

Größe der Ersatzlast = [(Last auf Hälfte 1) - (Last auf Hälfte 2)] / 2

1 Konstruktion von Polplänen

Die Bewegung einer starren Scheibe lässt sich auf die Rotation um einen Drehpunkt (Momentanpol) zurückführen. Bei einem kinematisch verschieblichen System lässt sich mit Hilfe der Polplankonstruktion die Verschiebungsfigur bestimmen. Bei einem statisch bestimmten System ist die Polplankonstruktion nicht eindeutig.

1.1 Definition

- Jeder absolute Drehruhepunkt einer Scheibe heißt Hauptpol.
- Jeder relative Drehpol zweier Scheiben heißt Nebenpol.

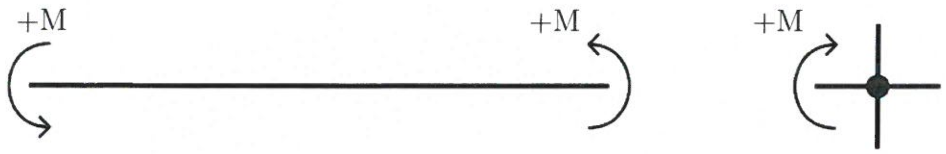
1.2 Sätze

- Jedes unverschiebliche Gelenklager einer Scheibe ist deren Hauptpol.
- Der Hauptpol einer verschieblich gelagerten Scheibe liegt auf der Normalen zur Lagerebene.
- Jedes Biegemomentengelenk, über das zwei Scheiben verbunden sind, ist der gemeinsame Nebenpol der zwei Scheiben.
- Die beiden Hauptpole und der Nebenpol zweier Scheiben liegen auf einer Geraden.
- Ein Pol liegt im Unendlichen, wenn seine geometrischen Orte parallele Geraden bilden.
- Die Nebenpole von drei Scheiben liegen auf einer Geraden.
- Der Nebenpol zweier durch ein Normalkraft-, bzw. Querkraftgelenk verbundenen Scheiben liegt senkrecht zur freien Verschiebungsrichtung im Unendlichen.
- Liegt der Hauptpol einer Scheibe im Unendlichen, erfährt die Scheiben nur eine Parallelverschiebung.

2 Drehwinkelverfahren

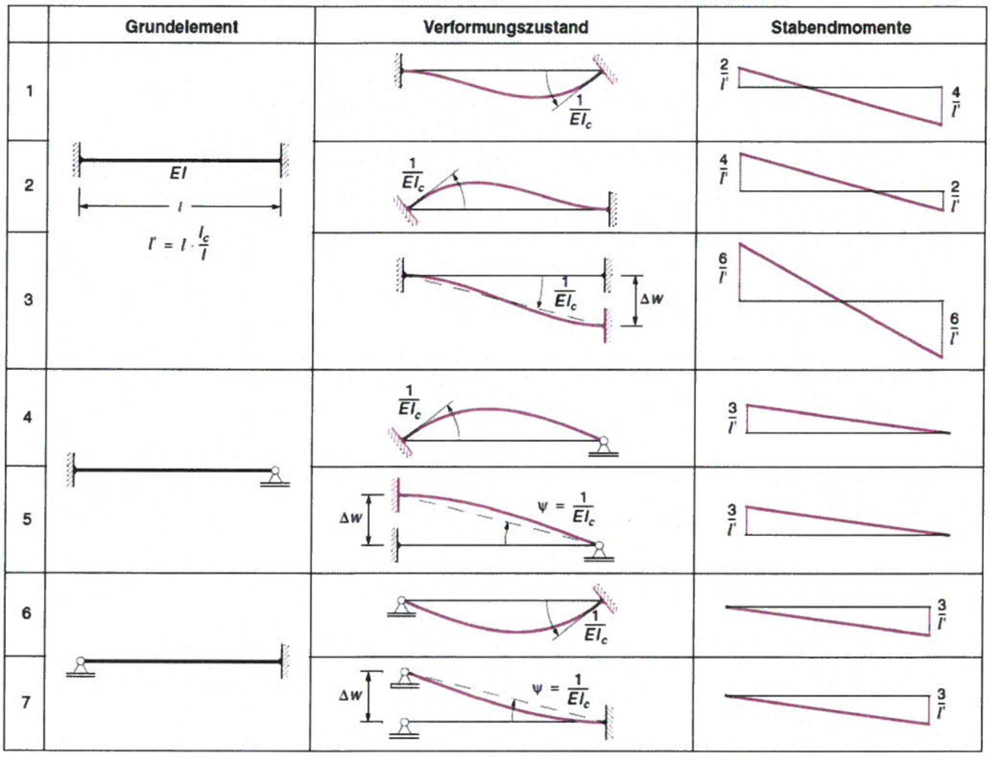
② ESZ (einer pro Knoten)
Verdrehung gegen Uhrzeigersinn

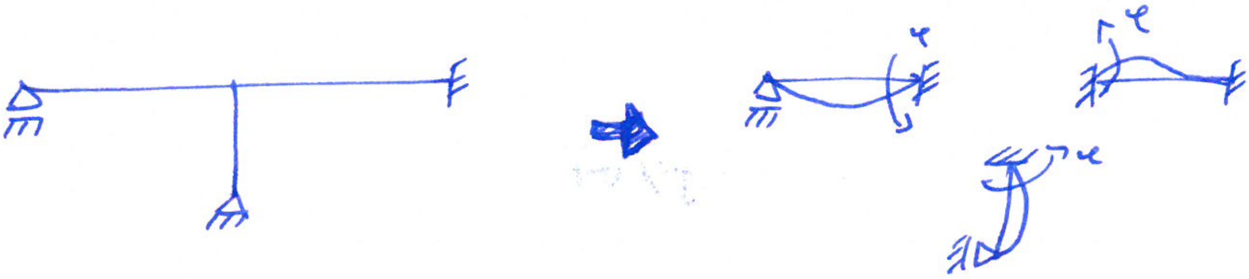
- positive Stabend- und Knotenmomente



- Tafeln zur Bestimmung der Stabend- und Volleinspannmomente im Einheitsverformungs- bzw. Lastverformungszustand

Tafel A8 Einheitsverformungszustände des Drehwinkelverfahrens

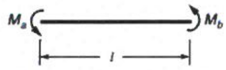
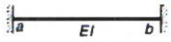
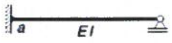
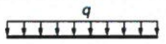
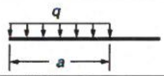
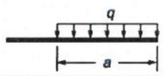
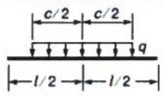
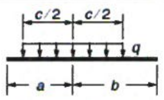
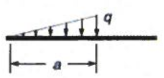
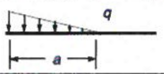
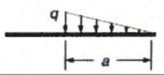
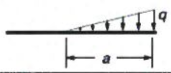
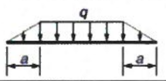
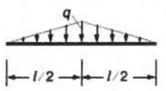
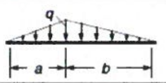
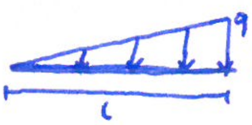




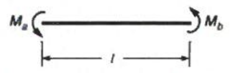
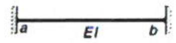
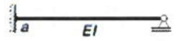
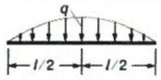
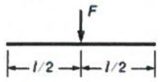
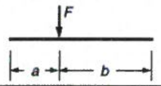
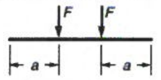
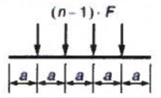
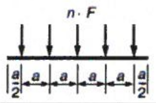
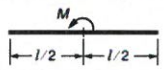
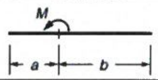
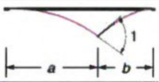
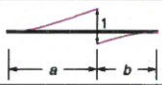
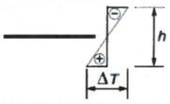
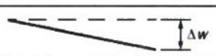
①: LVZ

Tafel A9 Volleinspannmomente $\alpha = \frac{a}{l}$ $\beta = \frac{b}{l}$ $\gamma = \frac{c}{l}$

FE wechseln, falls: A —— E
und q_1, q_2 tauschen
/ a, b vertauschen

				
	Lastfall	M_a	M_b	M_a
1		$\frac{ql^2}{12}$	$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql^2}{8}$
2		$\frac{l^2}{60}(3q_1+2q_2)$	$-\frac{l^2}{60}(2q_1+3q_2)$	$\frac{l^2}{120}(8q_1+7q_2)$
3		$\frac{qa^2}{3}(1.5-2\alpha+0.75\alpha^2)$	$-\frac{qa^2}{3}\alpha(1-0.75\alpha)$	$\frac{qa^2}{8}(2-\alpha)^2$
4		$\frac{qa^2}{3}\alpha(1-0.75\alpha)$	$-\frac{qa^2}{3}(1.5-2\alpha+0.75\alpha^2)$	$\frac{qa^2}{8}(2-\alpha^2)$
5		$\frac{qlc}{24}(3-\gamma^2)$	$-\frac{qlc}{24}(3-\gamma^2)$	$\frac{qlc}{16}(3-\gamma^2)$
6		$qc\left[a\beta^2+\frac{\gamma^2}{12}(l-3b)\right]$	$-qc\left[b\alpha^2+\frac{\gamma^2}{12}(l-3a)\right]$	$\frac{qbc}{2}(1-\beta^2-0.25\gamma^2)$
7		$\frac{ql^2}{20}$	$-\frac{ql^2}{30}$	$\frac{ql^2}{15}$
8		$\frac{qa^2}{3}(1-1.5\alpha+0.6\alpha^2)$	$-\frac{qa^2}{4}\alpha(1-0.8\alpha)$	$\frac{qa^2}{6}(2-2.25\alpha+0.6\alpha^2)$
9		$\frac{qa^2}{6}(1-\alpha+0.3\alpha^2)$	$-\frac{qa^2}{12}\alpha(1-0.6\alpha)$	$\frac{qa^2}{6}(1-0.75\alpha+0.15\alpha^2)$
10		$\frac{qa^2}{4}\alpha(1-0.8\alpha)$	$-\frac{qa^2}{3}(1-1.5\alpha+0.6\alpha^2)$	$\frac{qa^2}{6}(1-0.6\alpha^2)$
11		$\frac{qa^2}{12}\alpha(1-0.6\alpha)$	$-\frac{qa^2}{6}(1-\alpha+0.3\alpha^2)$	$\frac{qa^2}{12}(1-0.3\alpha^2)$
12		$\frac{qa^2}{6}(1-0.5\alpha)$	$-\frac{qa^2}{6}(1-0.5\alpha)$	$\frac{qa^2}{4}(1-0.5\alpha)$
13		$\frac{ql^2}{12}[1-\alpha^2(2-\alpha)]$	$-\frac{ql^2}{12}[1-\alpha^2(2-\alpha)]$	$\frac{ql^2}{8}[1-\alpha^2(2-\alpha)]$
14		$\frac{5}{96}ql^2$	$-\frac{5}{96}ql^2$	$\frac{5}{64}ql^2$
15		$\frac{ql^2}{30}(1+\beta+\beta^2-1.5\beta^3)$	$-\frac{ql^2}{30}(1+\alpha+\alpha^2-1.5\alpha^3)$	$\frac{ql^2}{120}(1+\beta)(7-3\beta^2)$
		$\frac{l^2 \cdot q}{30}$	$-\frac{l^2 \cdot q}{20}$	$\left(\frac{7 l^2 \cdot q}{120}\right)$

Tafel A9 Volleinspannmomente (Fortsetzung) $\alpha = \frac{a}{l}$ $\beta = \frac{b}{l}$ $\gamma = \frac{c}{l}$

				
	Lastfall	M_a	M_b	M_a
16		$\frac{ql^2}{15}$	$-\frac{ql^2}{15}$	$\frac{ql^2}{10}$
17		$\frac{F\cdot l}{8}$	$-\frac{F\cdot l}{8}$	$\frac{3}{16}F\cdot l$
18		$F\cdot a\cdot\beta^2$	$-F\cdot b\cdot\alpha^2$	$\frac{F\cdot a\cdot b}{2\cdot l}(1+\beta)$
19		$F\cdot a(1-\alpha)$	$-F\cdot a(1-\alpha)$	$\frac{3}{2}F\cdot a(1-\alpha)$
20		$\frac{Fl}{12}\cdot\frac{n^2-1}{n}$	$-\frac{Fl}{12}\cdot\frac{n^2-1}{n}$	$\frac{Fl}{8}\cdot\frac{n^2-1}{n}$
21		$\frac{Fl}{24}\cdot\frac{2n^2+1}{n}$	$-\frac{Fl}{24}\cdot\frac{2n^2+1}{n}$	$\frac{Fl}{16}\cdot\frac{2n^2+1}{n}$
22		$\frac{M}{4}$	$\frac{M}{4}$	$\frac{M}{8}$
23		$M\cdot\beta(3\alpha-1)$	$M\cdot\alpha(3\beta-1)$	$\frac{M}{2}\cdot(1-3\beta^2)$
24		$\frac{2EI}{l}(3\beta-1)$	$-\frac{2EI}{l}(3\alpha-1)$	$\frac{3EI}{l}\beta$
25		$-\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{6EI}{l^2}$	$-\frac{3EI}{l^2}$
26		$EI\cdot\alpha_T\cdot\frac{\Delta T}{h}$	$-EI\cdot\alpha_T\cdot\frac{\Delta T}{h}$	$-\frac{3}{2}\cdot EI\cdot\alpha_T\cdot\frac{\Delta T}{h}$
27		$\frac{6EI}{l^2}\cdot\Delta w$	$\frac{6EI}{l^2}\cdot\Delta w$	$\frac{3EI}{l^2}\cdot\Delta w$

Falls:

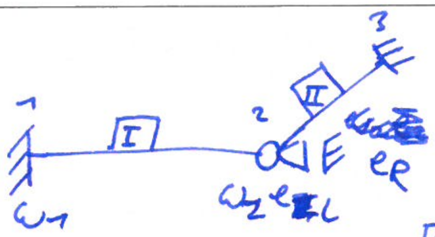
LoFz wechseln!
a,b tauschen!

Aus: R. Dallmann, Baustatik 2 - Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke, Hanser Fachbuchverlag, 2. Auflage 2009

$1\ m^2 = 1 \cdot 10^6\ mm^2 \rightarrow = 1 \cdot 10^4\ cm^2$ $\qquad 1\ m^4 = 1 \cdot 10^{12}\ mm^4 = 1 \cdot 10^8\ cm^4$

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$ $\qquad 1\ cm^4 = 1 \cdot 10^4\ mm^4$

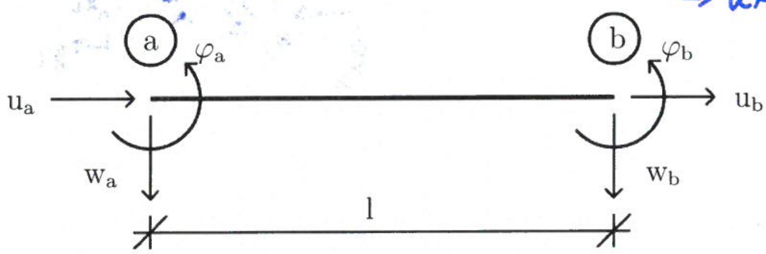
3 Weggrößenverfahren



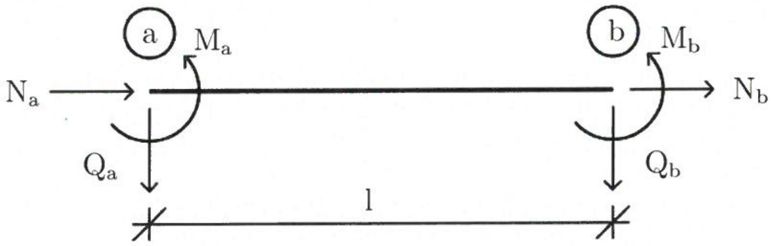
$\rightarrow k_{red} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ e_{2,L} \\ e_{2,R} \end{bmatrix}$

- Vorzeichen am ebenen Balkenelement

  - Knotenverschiebungen



  - Knotenkraftgrößen



$E\ [\frac{kN}{m^2}]$

$I\ [m^4]$

- Elementsteifigkeitsmatrix (lokales Koordinatensystem)

$$\mathbf{k}^l = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} & 0 & -12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & -6\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} & 0 & 6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^2} & 0 & 12\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & -6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} & 0 & 6\frac{EI}{l^2} & 4\frac{EI}{l} \end{array} \right] \\ \begin{array}{cccccc} u & w & e & u & w & e \end{array} \end{array} \begin{array}{c} u \\ w \\ e \\ u \\ w \\ e \end{array}$$

$f_1(E, A, I, l) := kl1 ; kl2 ; \ldots$

$f_{11}(EA, EI, l) := \ldots$

E $\hat{=}$ E-Modul
A $\hat{=}$ Querschnittsfläche
I $\hat{=}$ Flächenträgheitsmoment
l $\hat{=}$ Stablänge

$k^g_{red} = f6(k^g_I, k^g_{II})$

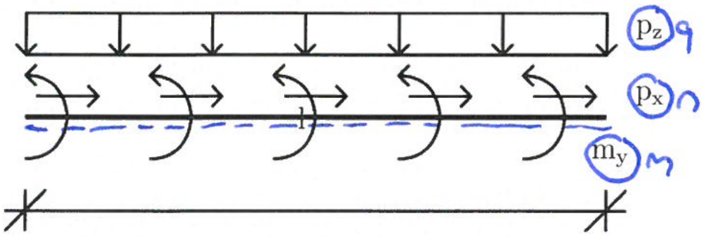
- Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix (globales Koordinatensystem)

$$\mathbf{k}^{g} = \mathbf{T}^{T}\mathbf{k}^{l}\mathbf{T} \qquad f2(k^l, \alpha)$$

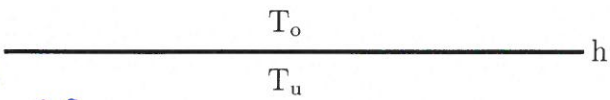
$f2(k_g, \alpha)$

$\mathbf{T} \;\hat{=}\;$ Transformationsmatrix

- Elementlastvektor
  - Streckenbelastung



  - Temperaturbelastung



$n, q,$
$f3(q, n, m, l)$ $\qquad f_4(E, A, J, \alpha, T_o, T_u, h)$ $\qquad f_{4r}(EA, EI, \alpha, T_o, T_u, h)$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} P_{xa} \\ P_{za} \\ M_{ya} \\ P_{xb} \\ P_{zb} \\ M_{yb} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} p_x \frac{l}{2} \\ p_z \frac{l}{2} \\ -p_z \frac{l^2}{12} + m_y \frac{l}{2} \\ p_x \frac{l}{2} \\ p_z \frac{l}{2} \\ p_z \frac{l^2}{12} + m_y \frac{l}{2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} n_1 \\ q_1 \\ m_1 \\ n_2 \\ q_2 \\ m_2 \end{array} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -EA\,\alpha_t T_S \\ 0 \\ -EI\,\alpha_t \frac{\Delta T}{h} \\ EA\,\alpha_t T_S \\ 0 \\ EI\,\alpha_t \frac{\Delta T}{h} \end{bmatrix}$$

$P_{ges} = f7(P_I^l, P_{II}^l)$

$V_{red} = K_{red}^{-1} \cdot P_{red}$

Temperaturdifferenz vom unteren zum oben Rand: $\Delta T = T_u - T_o$

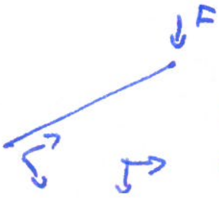
Für doppeltsymmetrische Querschnitte gilt: $T_S = \dfrac{T_o + T_u}{2}$

$\alpha_t \;\hat{=}\;$ Wärmeausdehnkoeffizient, $\quad h \;\hat{=}\;$ Elementdicke

- Transformation des Elementlastvektors (globales Koordinatensystem)

$$\mathbf{p}^{g} = \mathbf{T}^{T}\mathbf{p}^{l} \qquad f_5(p_l, \alpha)$$

$f_5(p_g, \alpha)$

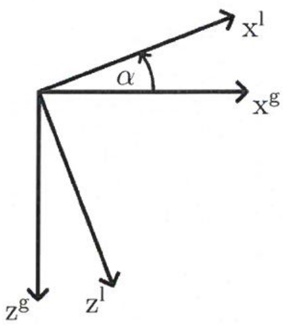


F trotzdem ganz normal auf q_2 von P_I^g draufrechnen...

- Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - positive Drehrichtung



$\rightarrow T(+\alpha)$

- Lösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{K}_{\text{red}}\,\mathbf{V}_{\text{red}} = \mathbf{P}_{\text{red}}$$ $\rightarrow V_{red} = K_{red}^{-1} \cdot P_{red}$

$\mathbf{K}_{\text{red}} \;\hat{=}\;$ reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{V}_{\text{red}} \;\hat{=}\;$ reduzierter Lösungsvektor
$\mathbf{P}_{\text{red}} \;\hat{=}\;$ reduzierter Lastvektor

- Ermittlung der lokalen Schnittgrößen

$$\mathbf{s}^{\text{l}} = \mathbf{k}^{\text{l}}\,\mathbf{v}^{\text{l}} - \mathbf{p}^{\text{l}}$$

$\mathbf{v}^{\text{l}} \;\hat{=}\;$ lokaler Lösungsvektor
$\mathbf{p}^{\text{l}} \;\hat{=}\;$ lokaler Lastvektor

4 Überlagerungstabelle

Tabelle zur Überlagerung von Momenten

Tafel 3.1: **Werte der Integrale** $\int M_j M_k \, dx = l \cdot$ **(Tafelwert)**

Nr.	l	k k	k	k_1 k_2	k $-k$	k $-\frac{k}{2}$	αl βl k	$\int j^2 \, dx$
1	j j	jk	$\frac{1}{2} jk$	$\frac{1}{2} j(k_1+k_2)$	0	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{2} jk$	j^2
2	j	$\frac{1}{2} jk$	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{6} j(k_1+2k_2)$	$-\frac{1}{6} jk$	0	$\frac{1}{6} jk(1+\alpha)$	$\frac{1}{3} j^2$
3	j	$\frac{1}{2} jk$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} j(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{6} jk(1+\beta)$	$\frac{1}{3} j^2$
4	j_1 j_2	$\frac{1}{2} k(j_1+j_2)$	$\frac{1}{6} k(j_1+2j_2)$	$\frac{1}{6} [j_1(2k_1+k_2) + j_2(k_1+2k_2)]$	$\frac{1}{6} k(j_1-j_2)$	$\frac{1}{4} j_1 k$	$\frac{1}{6} k[j_1(1+\beta) + j_2(1+\alpha)]$	$\frac{1}{3}(j_1^2 + j_1 j_2 + j_2^2)$
5	j $-j$	0	$-\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} j(k_1-k_2)$	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{6} jk(1-2\alpha)$	$\frac{1}{3} j^2$
6	j $-\frac{j}{2}$	$\frac{1}{4} jk$	0	$\frac{1}{4} jk_1$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{4} jk\beta$	$\frac{1}{4} j^2$
7	$-\frac{j}{2}$ j	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{4} jk_2$	$-\frac{1}{4} jk$	$-\frac{1}{8} jk$	$\frac{1}{4} jk\alpha$	$\frac{1}{4} j^2$
8	$\frac{l}{2}$ j	$\frac{1}{2} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{4} j(k_1+k_2)$	0	$\frac{1}{8} jk$	$\frac{jk}{12\beta}(3-4\alpha^2)$	$\frac{1}{3} j^2$
9	γl δl j	$\frac{1}{2} jk$	$\frac{1}{6} jk(1+\gamma)$	$\frac{1}{6} j[k_1(1+\delta) + k_2(1+\gamma)]$	$\frac{1}{6} jk(1-2\gamma)$	$\frac{1}{4} jk\delta$	$\frac{jk}{6\beta\gamma}(2\gamma-\gamma^2-\alpha^2)$ $\gamma \geq \alpha$	$\frac{1}{3} j^2$
10	j Quadr. Parabel	$\frac{2}{3} jk$	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{3} j(k_1+k_2)$	0	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{3} jk(1+\alpha\beta)$	$\frac{8}{15} j^2$
11	j j Quadr. Parabel	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} j(k_1+k_2)$	0	$\frac{1}{12} jk$	$\frac{1}{6} jk(1-2\alpha\beta)$	$\frac{1}{5} j^2$
12	j Quadr. Parabel	$\frac{2}{3} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{12} j(5k_1+3k_2)$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{7}{24} jk$	$\frac{1}{12} jk(5-\alpha-\alpha^2)$	$\frac{8}{15} j^2$
13	j Quadr. Parabel	$\frac{2}{3} jk$	$\frac{5}{12} jk$	$\frac{1}{12} j(3k_1+5k_2)$	$-\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{24} jk$	$\frac{1}{12} jk(5-\beta-\beta^2)$	$\frac{8}{15} j^2$
14	j Quadr. Parabel	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{12} j(k_1+3k_2)$	$-\frac{1}{6} jk$	$-\frac{1}{24} jk$	$\frac{1}{12} jk(1+\alpha+\alpha^2)$	$\frac{1}{5} j^2$
15	j Quadr. Parabel	$\frac{1}{3} jk$	$\frac{1}{12} jk$	$\frac{1}{12} j(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{5}{24} jk$	$\frac{1}{12} jk(1+\beta+\beta^2)$	$\frac{1}{5} j^2$
16	$l/2$ $-j$ J Quadr. Parabel	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} jk_2$	$-\frac{1}{6} jk$	$-\frac{1}{12} jk$	$\frac{1}{6} jk\alpha(1+2\beta)$	$\frac{1}{5} j^2$
17	$l/2$ j $-j$ Quadr. Parabel	$\frac{1}{6} jk$	0	$\frac{1}{6} jk_1$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} jk$	$\frac{1}{6} jk\beta(1+2\alpha)$	$\frac{1}{5} j^2$
18	$l/2$ j_1 j_2 j_3 Quadr. Parabel	$\frac{1}{6} k(j_1+4j_2+j_3)$	$\frac{1}{6} k(2j_2+j_3)$	$\frac{1}{6} [j_1k_1 + 2j_2(k_1+k_2) + j_3k_2]$	$\frac{1}{6} k(j_1-j_3)$	$\frac{1}{12} k(2j_1+2j_2-j_3)$	$\frac{1}{6} k[j_1\beta + 2j_2 + j_3\alpha - \alpha\beta(j_1-2j_2+j_3)]$	$\frac{1}{15} [2(j_1^2+4j_2^2+j_3^2) + 2j_1j_2 + 2j_2j_3 - j_1j_3]$
19	j Kub. Parabel	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{5} jk$	$\frac{1}{20} j(k_1+4k_2)$	$-\frac{3}{20} jk$	$-\frac{1}{20} jk$	$\frac{1}{20} jk(1+\alpha)(1+\alpha^2)$	$\frac{1}{7} j^2$
20	j Kub. Parabel	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{1}{20} jk$	$\frac{1}{20} j(4k_1+k_2)$	$\frac{3}{20} jk$	$\frac{7}{40} jk$	$\frac{1}{20} jk(1+\beta)(1+\beta^2)$	$\frac{1}{7} j^2$
21	j Kub. Parabel	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{2}{15} jk$	$\frac{1}{60} j(7k_1+8k_2)$	$-\frac{1}{60} jk$	$\frac{1}{20} jk$	$\frac{1}{20} jk\left(1+\alpha\right)\left(\frac{7}{3}-\alpha^2\right)$	$\frac{8}{105} j^2$
22	j Kub. Parabel	$\frac{1}{4} jk$	$\frac{7}{60} jk$	$\frac{1}{60} j(8k_1+7k_2)$	$\frac{1}{60} jk$	$\frac{3}{40} jk$	$\frac{1}{20} jk\left(1+\beta\right)\left(\frac{7}{3}-\beta^2\right)$	$\frac{8}{105} j^2$

aus Betonkalender 1988

Institut für Statik und Dynamik
der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen

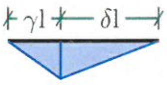
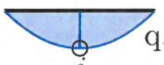
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Tim Ricken

Statik

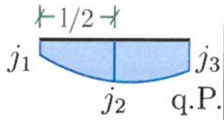
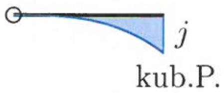
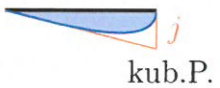
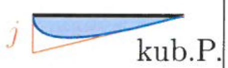
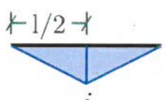
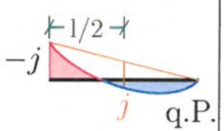
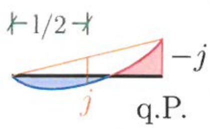
Integrationstabelle

!!!

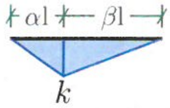
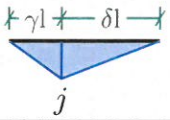
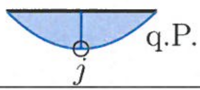
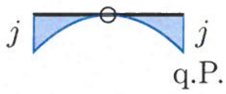
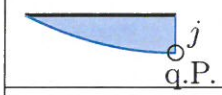
$\int_0^l M_j M_k dx = l \cdot$(Tafelwert) ° Scheitelpunkt der Parabel, d.h. horizontale Tangente

	k  k	 k	k_1  k_2	$\int_0^l M_j^2 dx$ $= l \cdot$(Tafelwert)	
j  j	jk	$\frac{1}{2}jk$	$\frac{1}{2}j(k_1+k_2)$	j^2	1
 j	$\frac{1}{2}jk$	$\frac{1}{3}jk$	$\frac{1}{6}j(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}j^2$	2
j 	$\frac{1}{2}jk$	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{6}j(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}j^2$	3
j_1  j_2	$\frac{1}{2}k(j_1+j_2)$	$\frac{1}{6}k(j_1+2j_2)$	$\frac{1}{6}[j_1(2k_1+k_2)+ j_2(k_1+2k_2)]$	$\frac{1}{3}(j_1^2+j_1j_2+j_2^2)$	4
γl δl  j	$\frac{1}{2}jk$	$\frac{1}{6}jk(1+\gamma)$	$\frac{1}{6}j[k_1(1+\delta)+ k_2(1+\gamma)]$	$\frac{1}{3}j^2$	5
 q.P. j	$\frac{2}{3}jk$	$\frac{1}{3}jk$	$\frac{1}{3}j(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}j^2$	6
j  j q.P.	$\frac{1}{3}jk$	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{6}j(k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}j^2$	7
j  q.P.	$\frac{2}{3}jk$	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{12}j(5k_1+3k_2)$	$\frac{8}{15}j^2$	8
 j q.P.	$\frac{2}{3}jk$	$\frac{5}{12}jk$	$\frac{1}{12}j(3k_1+5k_2)$	$\frac{8}{15}j^2$	9
 j q.P.	$\frac{1}{3}jk$	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{12}j(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}j^2$	10
j  q.P.	$\frac{1}{3}jk$	$\frac{1}{12}jk$	$\frac{1}{12}j(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}j^2$	11

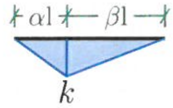
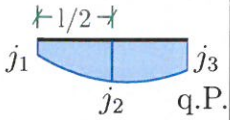
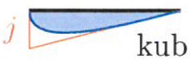
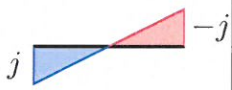
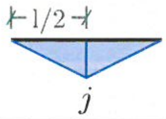
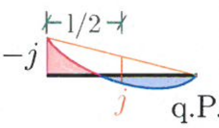
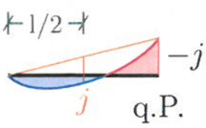
$\int_0^l M_j M_k dx = l \cdot (\text{Tafelwert})$ ° Scheitelpunkt der Parabel, d.h. horizontale Tangente

				$\int_0^l M_j^2 dx$ $= l \cdot (\text{Tafelwert})$	
	$\frac{1}{6}k(j_1+4j_2+j_3)$	$\frac{1}{6}k(2j_2+j_3)$	$\frac{1}{6}[j_1k_1+2j_2(k_1+k_2)+j_3k_2]$	$\frac{1}{15}[2(j_1^2+4j_2^2+j_3^2)+2j_1j_2+2j_2j_3-j_1j_3]$	12
	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{5}jk$	$\frac{1}{20}j(k_1+4k_2)$	$\frac{1}{7}j^2$	13
	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{20}jk$	$\frac{1}{20}j(4k_1+k_2)$	$\frac{1}{7}j^2$	14
	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{2}{15}jk$	$\frac{1}{60}j(7k_1+8k_2)$	$\frac{8}{105}j^2$	15
	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{7}{60}jk$	$\frac{1}{60}j(8k_1+7k_2)$	$\frac{8}{105}j^2$	16
	0	$-\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{6}j(k_1-k_2)$	$\frac{1}{3}j^2$	17
	$\frac{1}{4}jk$	0	$\frac{1}{4}jk_1$	$\frac{1}{4}j^2$	18
	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{4}jk_2$	$\frac{1}{4}j^2$	19
	$\frac{1}{2}jk$	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{4}j(k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}j^2$	20
	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{6}jk_2$	$\frac{1}{5}j^2$	21
	$\frac{1}{6}jk$	0	$\frac{1}{6}jk_1$	$\frac{1}{5}j^2$	22

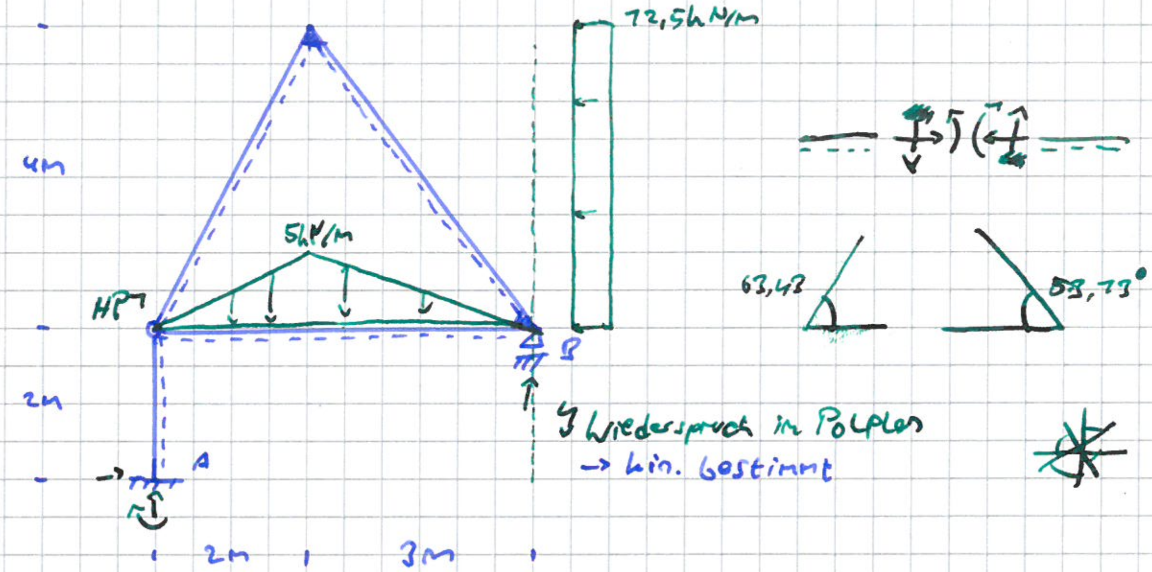
$\int_0^l M_j M_k dx = l \cdot$ (Tafelwert) $\quad$ ° Scheitelpunkt der Parabel, d.h. horizontale Tangente

				
	0	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{2}jk$	23
	$-\frac{1}{6}jk$	0	$\frac{1}{6}jk(1+\alpha)$	24
	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{6}jk(1+\beta)$	25
	$\frac{1}{6}k(j_1 - j_2)$	$\frac{1}{4}j_1k$	$\frac{1}{6}k[j_1(1+\beta)+j_2(1+\alpha)]$	26
	$\frac{1}{6}jk(1-2\gamma)$	$\frac{1}{4}jk\delta$	$\frac{jk}{6\beta\gamma}(2\gamma - \gamma^2 - \alpha^2)$, $\gamma \geq \alpha$	27
	0	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{3}jk(1+\alpha\beta)$	28
	0	$\frac{1}{12}jk$	$\frac{1}{6}jk(1-2\alpha\beta)$	29
	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{7}{24}jk$	$\frac{1}{12}jk(5-\alpha-\alpha^2)$	30
	$-\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{24}jk$	$\frac{1}{12}jk(5-\beta-\beta^2)$	31
	$-\frac{1}{6}jk$	$-\frac{1}{24}jk$	$\frac{1}{12}jk(1+\alpha+\alpha^2)$	32
	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{5}{24}jk$	$\frac{1}{12}jk(1+\beta+\beta^2)$	33

$\int_0^l M_j M_k dx = l \cdot (\text{Tafelwert})$ ° Scheitelpunkt der Parabel, d.h. horizontale Tangente

				
	$\frac{1}{6}k(j_1 - j_3)$	$\frac{1}{12}k(2j_1 + 2j_2 - j_3)$	$\frac{1}{6}k[j_1\beta + 2j_2 + j_3\alpha - \alpha\beta(j_1 - 2j_2 + j_3)]$	34
	$-\frac{3}{20}jk$	$-\frac{1}{20}jk$	$\frac{1}{20}jk(1+\alpha)(1+\alpha^2)$	35
	$\frac{3}{20}jk$	$\frac{7}{40}jk$	$\frac{1}{20}jk(1+\beta)(1+\beta^2)$	36
	$-\frac{1}{60}jk$	$\frac{1}{20}jk$	$\frac{1}{20}jk(1+\alpha)(\frac{7}{3} - \alpha^2)$	37
	$\frac{1}{60}jk$	$\frac{3}{40}jk$	$\frac{1}{20}jk(1+\beta)(\frac{7}{3} - \beta^2)$	38
	$\frac{1}{3}jk$	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{6}jk(1-2\alpha)$	39
	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{4}jk\beta$	40
	$-\frac{1}{4}jk$	$-\frac{1}{8}jk$	$\frac{1}{4}jk\alpha$	41
	0	$\frac{1}{8}jk$	$\frac{jk}{12\beta}(3 - 4\alpha^2)$	42
	$-\frac{1}{6}jk$	$-\frac{1}{12}jk$	$\frac{1}{6}jk\alpha(1+2\beta)$	43
	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{6}jk\beta(1+2\alpha)$	44

1

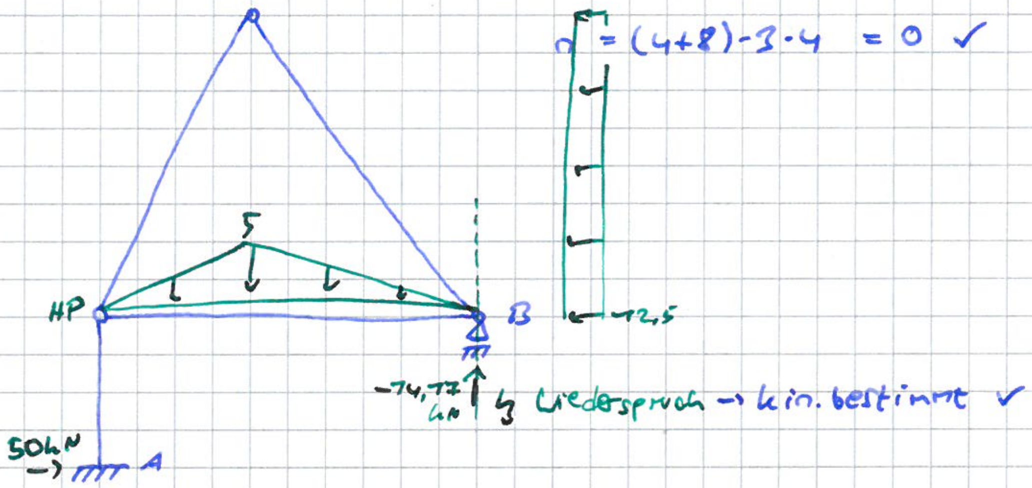


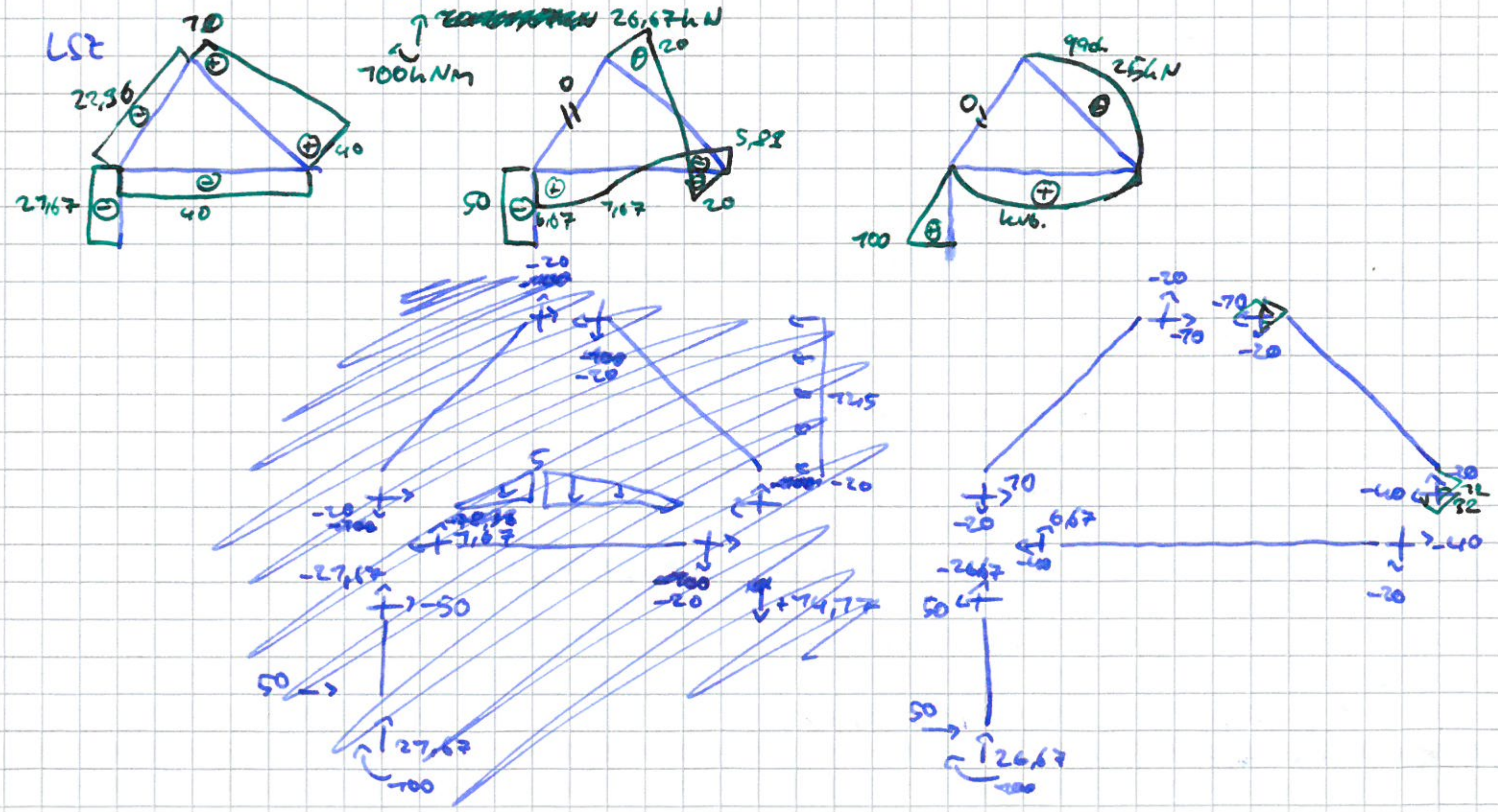
a) Stat. Bestimmtheit : $n = (a + v) - 3p$

$= (4+4) - 3 \cdot 2 = 2$ fach stat. unbestimmt

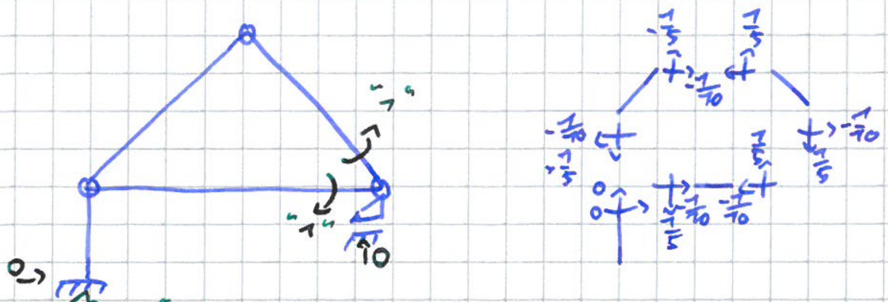
b) Stat. bestimmtes HS :

$n = (4+8) - 3 \cdot 4 = 0$ ✓

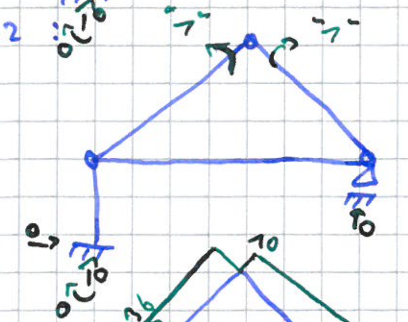


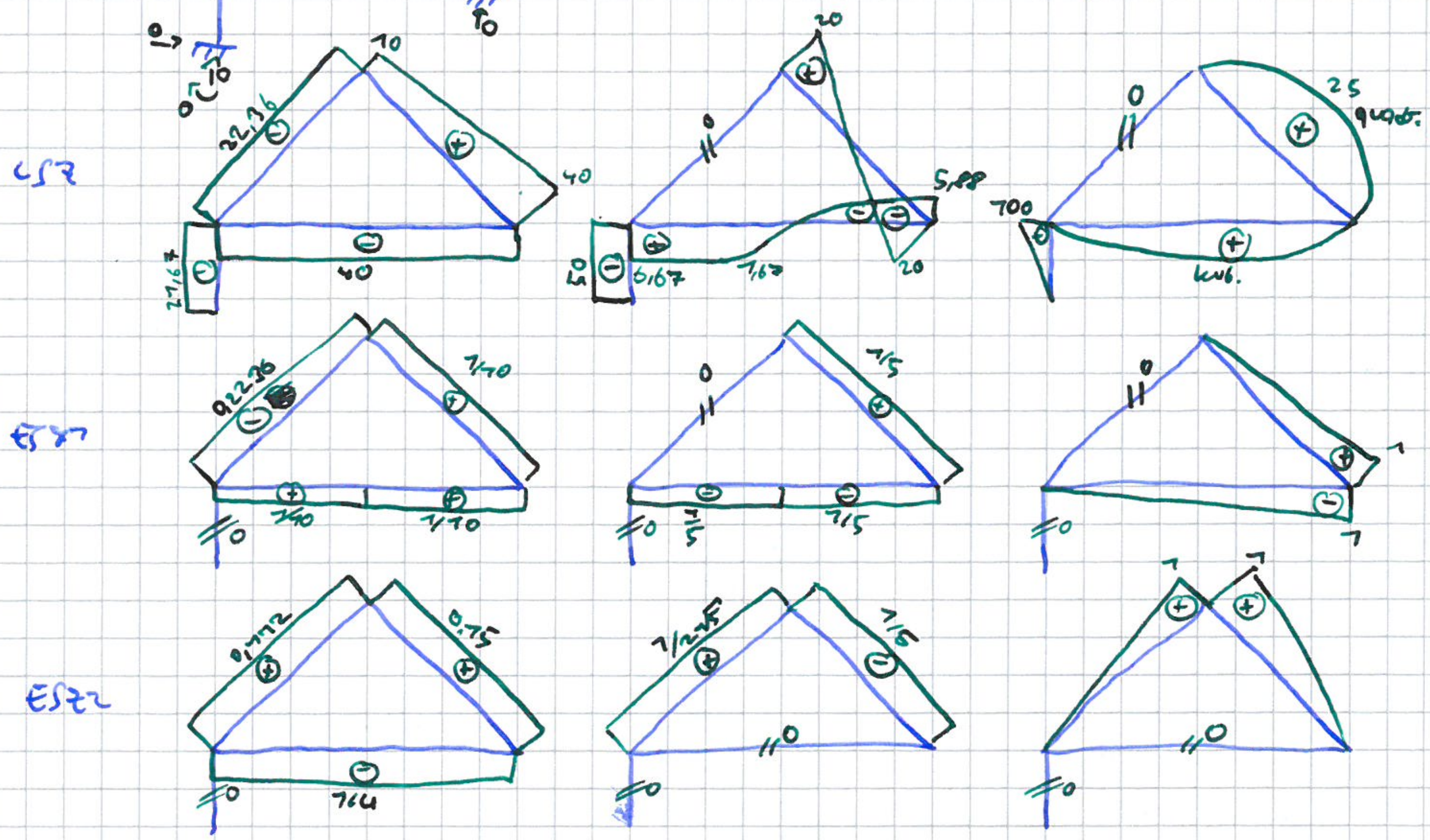


ESZ 1 :



ESZ 2 :





Berechnung von $\delta_{10}, \delta_{20}, \delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{12}, \delta_{21}$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot 25\cdot 1\cdot 5 + \int_0^2 M_1(x)(-0.2x)\,dx + \int_0^3 M_2(x)(-0.2x - 0.4)\,dx\right)$$

$$= 0{,}038$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot 25\cdot 1\cdot 5\right) = 0{,}0625$$

$$\delta_{11} = \left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 5 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 5\right)\cdot\frac{1}{EI} = 0{,}005$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 5 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\sqrt{2^2+4^2}\right) = 0{,}004736$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 1\cdot 5\right) = 0{,}00125$$

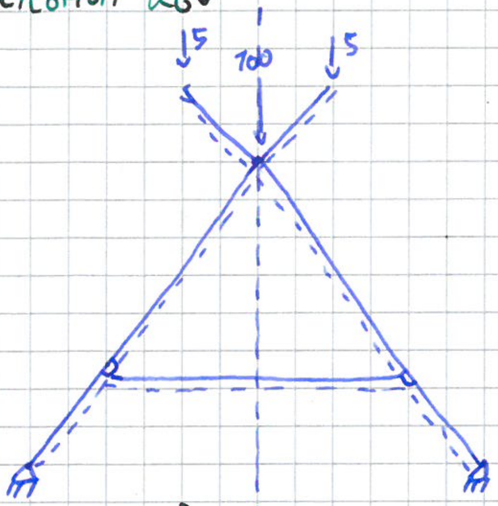
$x_1 = -4{,}676$

$x_2 = -11{,}94$

Keine Musterlösung für finalen Verlauf ...

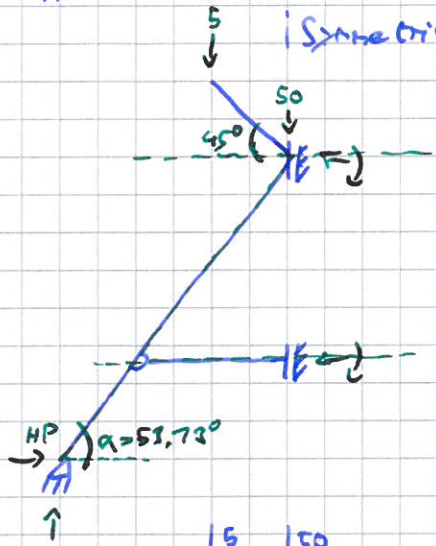
Repetitorium KGV

②



Symmetrielinie -> Vereinfachung möglich

a)

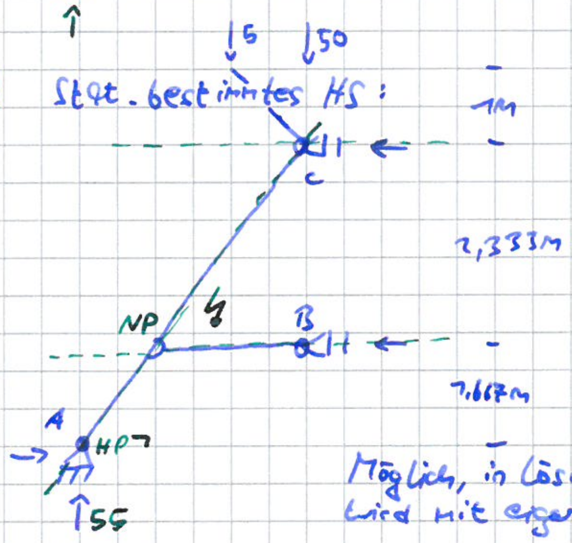


Stat. bestimmt? $n = (a+v) - 3p = (6+2) - 3\cdot 2 = 2$

2-fach stat. unbestimmt

↯ Wiedersp. Polplan -> kin. bestimmt!

b) Stat. bestimmtes HS:



$n = (4+2) - 3\cdot 2) = 0$ ✓

kin. bestimmt!

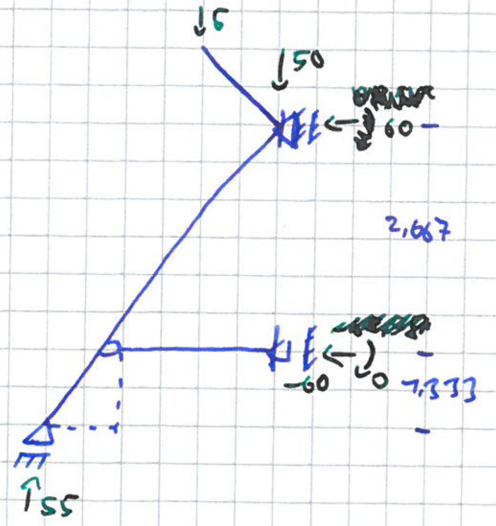
Möglich, in Lösung jedoch leicht anders... Fürs erste wird mit eigener Lösung weitergerechnet.

$\circlearrowleft^{?}_{+} \sum M_B = 55\cdot 3 - A\cdot 1{,}667 - C\cdot 2{,}333m - 5\cdot 1m = 0$

$\circlearrowleft^{?}_{+} \sum M_A = -B\cdot 1{,}667 - C\cdot 4m + 50\cdot 3m + 5\cdot 2m \cancel{100} = 0$

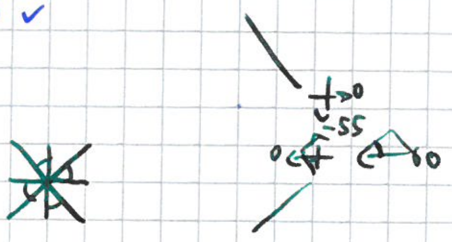
$\circlearrowleft^{?}_{+} \sum M_C = -5\cdot 1m + B\cdot 2{,}333m - A\cdot 4m + 55\cdot 3m = 0$

↯ Einfacher mit Systemaus Lösung...

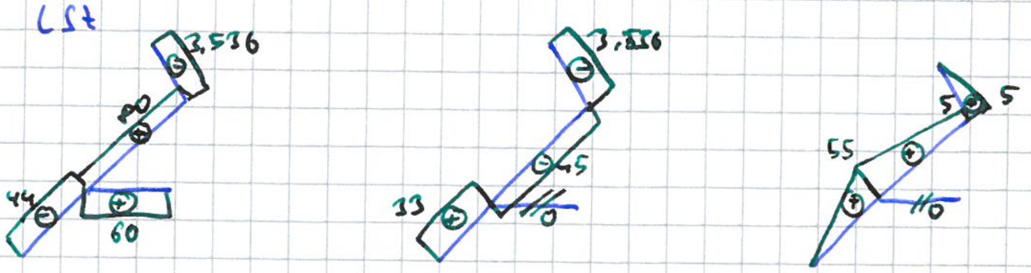


$n = (4+2) - 2 \cdot 3 = 0$ ✓

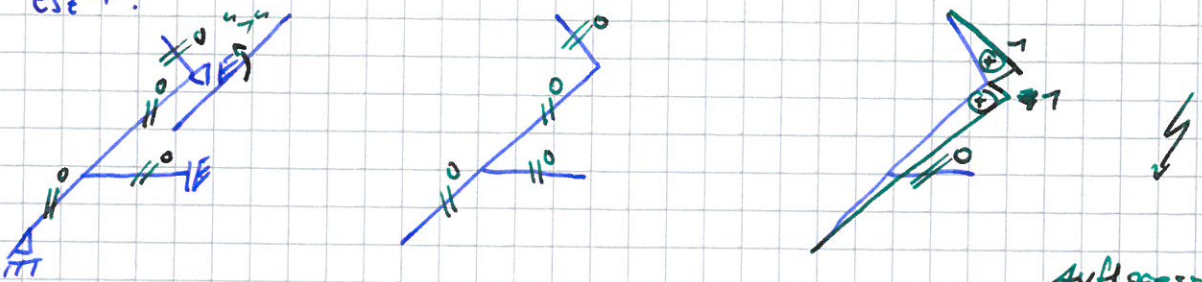
kin. bestimmt ✓



LSt

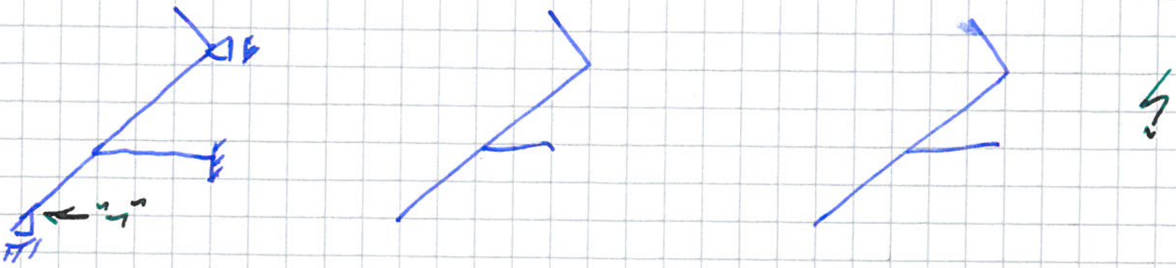


ESZ 1 :



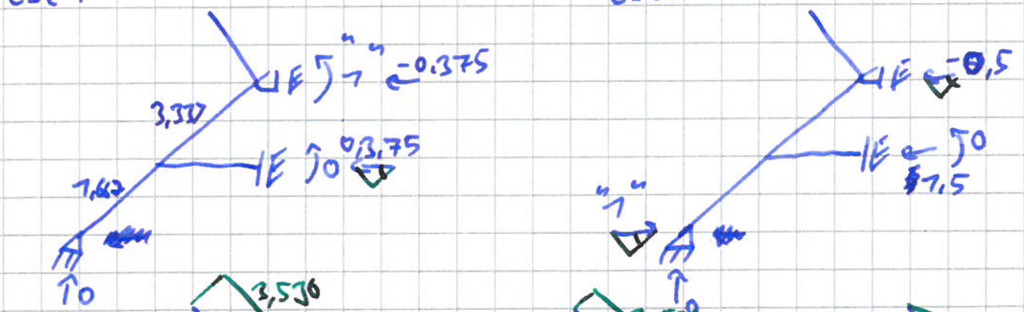
Auflagerreaktionen nicht berücksichtigt!

ESZ 2 :

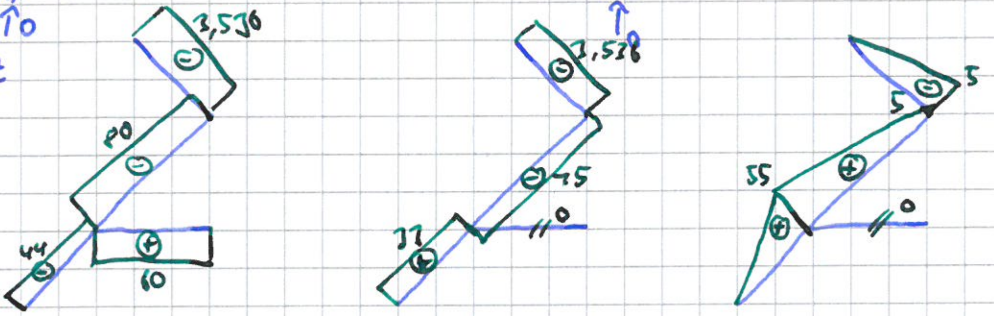


Repetetorium KGV

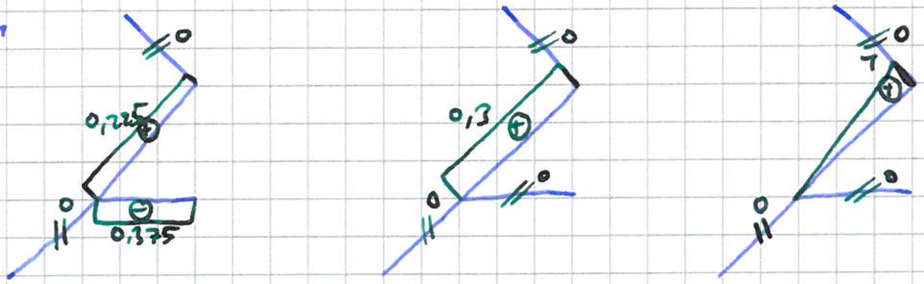
ESZ1 ESZ2



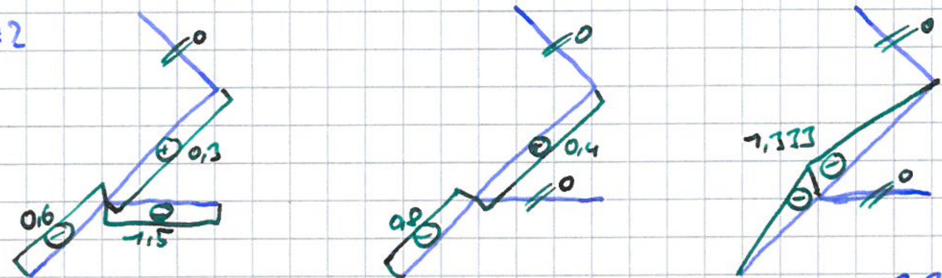
LSZ



ESZ1



ESZ2



$$\delta_{10} = \left(2\cdot 60\cdot(-0{,}375) + 0{,}225\cdot(-80)\cdot 3{,}334\right)\cdot\frac{1}{EA} + \left(\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(5+2\cdot 55)\cdot 3{,}333\right)\cdot\frac{1}{EI} = 1{,}563\cdot 10^{-6}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EA}\left(3{,}333\cdot(-80)\cdot 0{,}3 + 1{,}667\cdot(-44)\cdot(-0{,}6) + 2\cdot 60\cdot(-1{,}5)\right) + \frac{1}{EI}\left(1{,}667\cdot\frac{1}{3}\cdot 55\cdot(-1{,}333)\right. +$$

$$\left. + (-1{,}333)\cdot\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(5+2\cdot 55)\right) = -8{,}094\cdot 10^{-6}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}\left(0{,}225^2\cdot 3{,}333 + (-0{,}375)^2\cdot 2\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot 3{,}333\right) = 6{,}536\cdot 10^{-8}$$

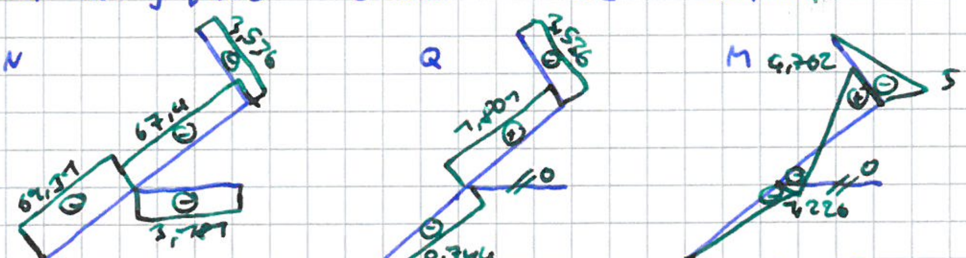
$$\delta_{22} = \frac{1}{EA}\left(0{,}3^2\cdot 3{,}333 + (-0{,}6)^2\cdot 1{,}667 + (-1{,}5)^2\cdot 2\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot(-1{,}333)^2\cdot 1{,}667 + \frac{1}{3}(-1{,}333)^2\cdot 3{,}333\right)$$

$$= 1{,}977\cdot 10^{-7}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EA}\left(0{,}225\cdot 0{,}3\cdot 3{,}333 + (-0{,}375)\cdot(-1{,}5)\cdot 2\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}(-1{,}333)\cdot 1\cdot 3{,}333\right) = -3{,}669\cdot 10^{-8}$$

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} X_1 &= -0{,}2377\\ X_2 &= 42{,}78\end{aligned}$$

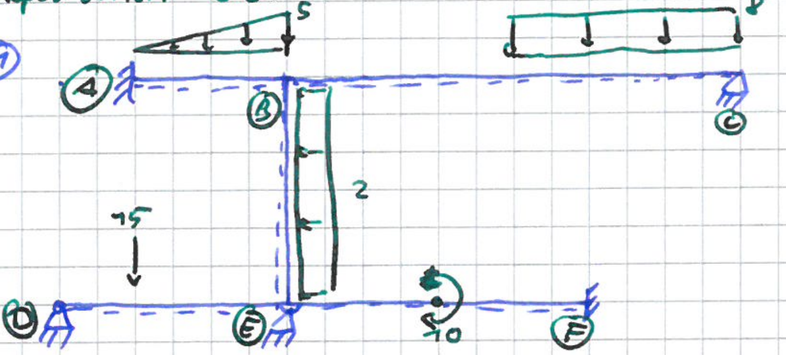
N Q M



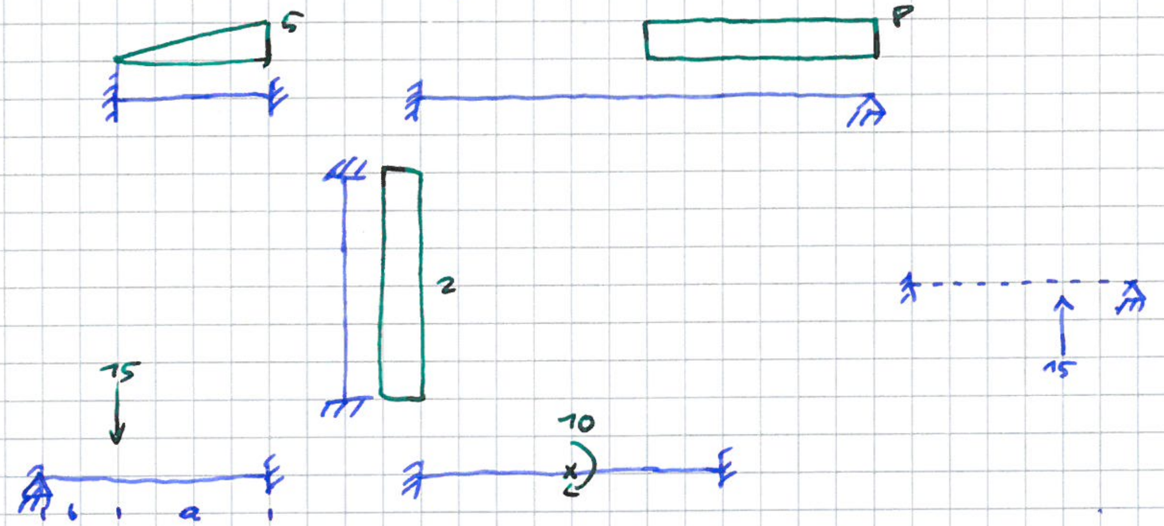
Symmetr. ergänzen Antimetr. Fortsetzen Symmetr. ergänzen

Repetitorium WGV

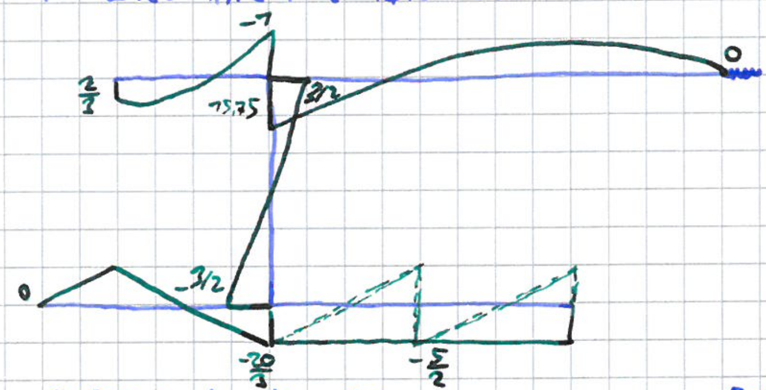
1



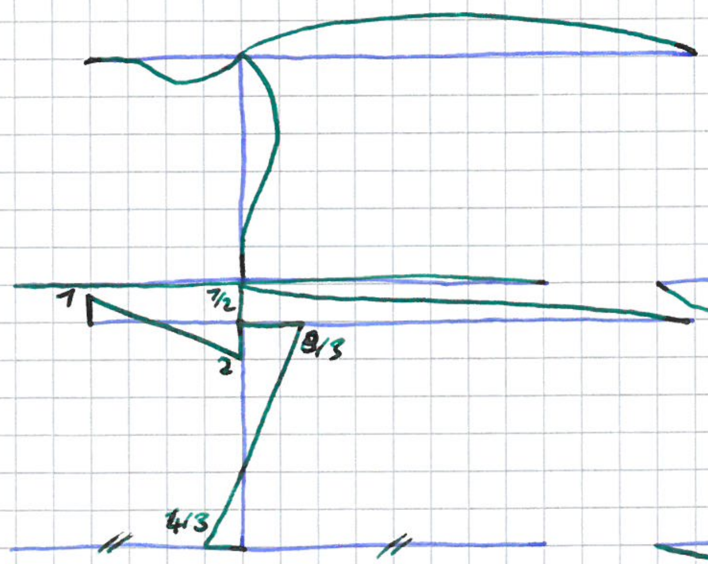
kin. bestimmtes HS bilden



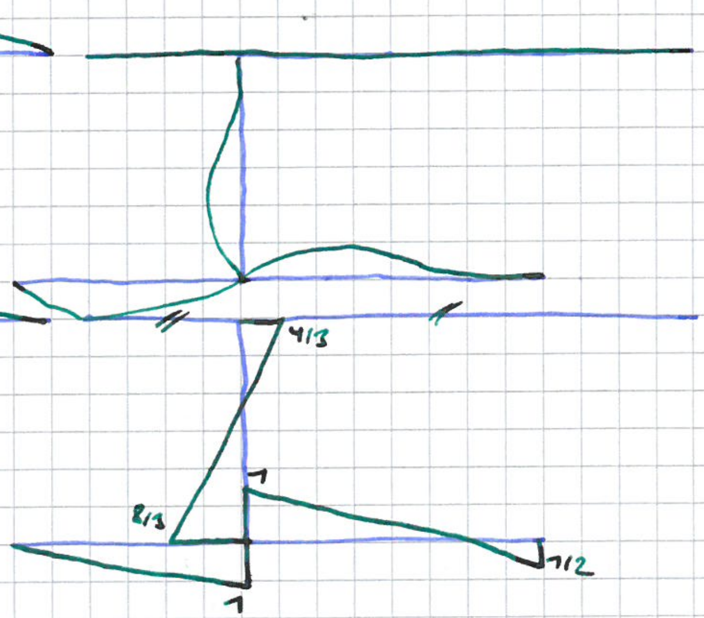
Momentenlinie mit Tafel A1:



EVZ1: Knoten B:



EVZ2: Knoten E :



Verträglichkeitsbedingungen

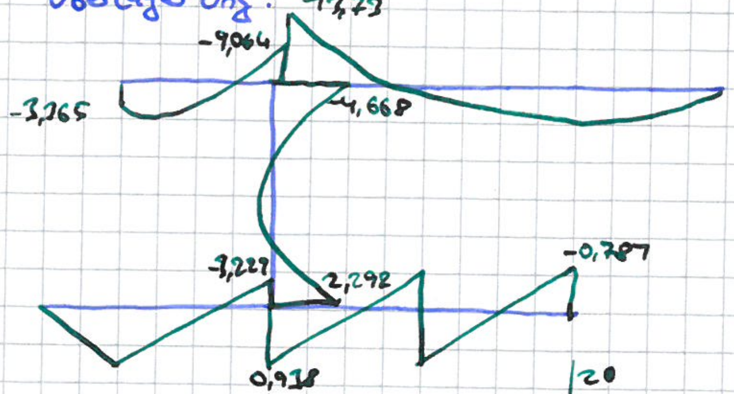
$$\begin{bmatrix} M_{1,a} & M_{2,a} \\ M_{1,b} & M_{2,b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{0,a} \\ M_{0,b} \end{bmatrix}$$

$M_{1,a} = \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + 2 \qquad M_{1,b} = \frac{4}{3} \qquad M_{0,a} = -1 + 15{,}75 + \frac{3}{2}$

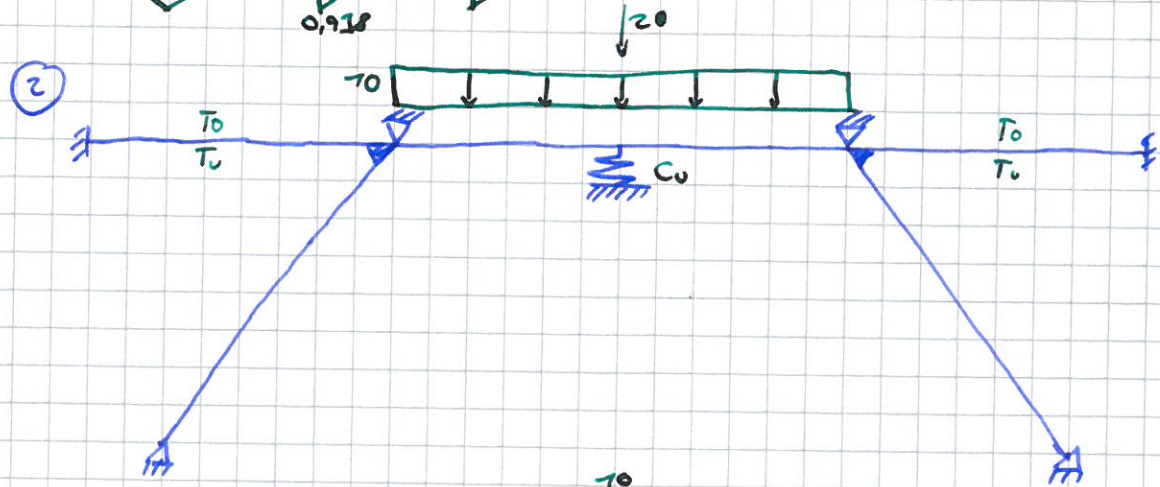
$M_{2,a} = \frac{4}{3} \qquad M_{2,b} = \frac{8}{3} + 1 + 1 \qquad M_{0,b} = -\frac{3}{2} - \frac{20}{3} - \frac{5}{2}$

$y_1 = -4{,}032 \qquad y_2 = 3{,}438$

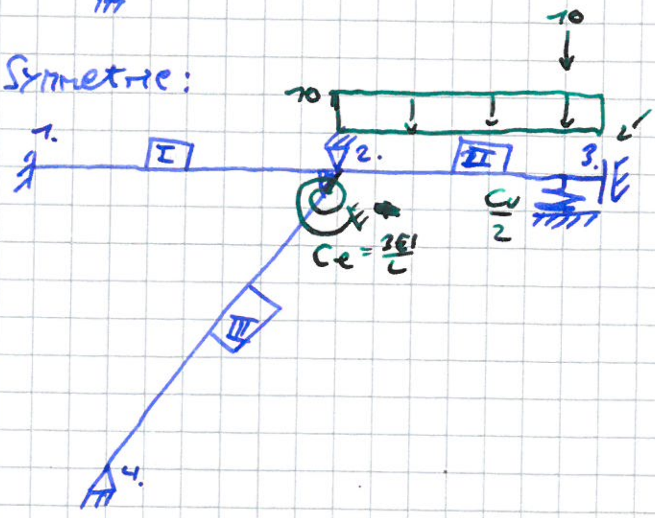
Überlagerung:



2



Symmetrie:



Nur zur Übersicht nebeneinander, eig. beide Lager aufeinander

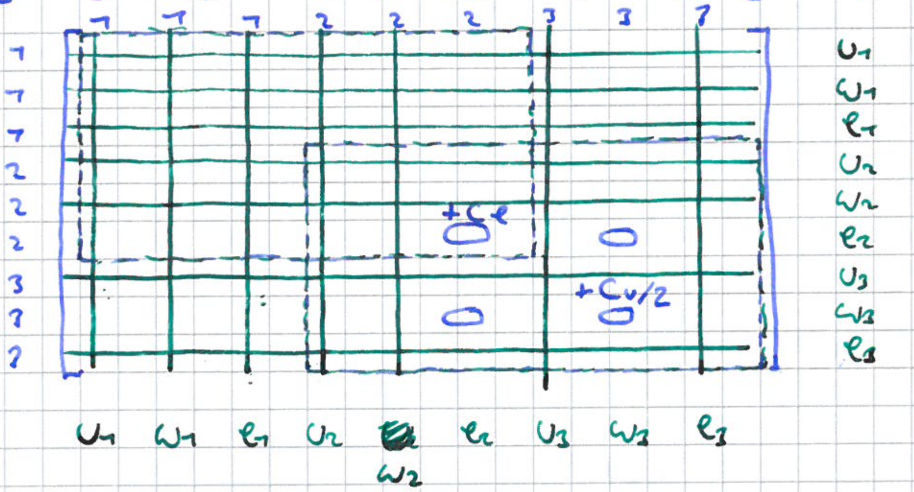
Stab 3 wird in Lösung durch Momentenfeder ersetzt

Repetitorium Wgv

Lokale Steifigkeitsmatrix (hier = globale Steifigkeitsmatrix)

$$k_I^l = \begin{pmatrix} 7{,}875\cdot10^6 & 0 & 0 & -7{,}875\cdot10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}271\cdot10^8 & -4{,}542\cdot10^8 & 0 & -2{,}271\cdot10^8 & -4{,}542\cdot10^8 \\ 0 & -4{,}542\cdot10^8 & 1{,}211\cdot10^9 & 0 & 4{,}542\cdot10^8 & 6{,}056\cdot10^8 \\ -7{,}875\cdot10^6 & 0 & 0 & 7{,}875\cdot10^6 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}271\cdot10^8 & 4{,}542\cdot10^8 & 0 & 2{,}271\cdot10^8 & 4{,}542\cdot10^8 \\ 0 & -4{,}542\cdot10^8 & 6{,}056\cdot10^8 & 0 & 4{,}542\cdot10^8 & 1{,}211\cdot10^9 \end{pmatrix}$$

$k_I^l = [6\times6]$; $k_I^l = k_I^g$; $k_{II}^l = k_{II}^g$



Gesamtsteifigkeits-matrix

$$k_{red} = \begin{bmatrix} k^g_{I\,6,6} + k^g_{II\,3,3} + C_\varphi & k^g_{II\,3,5} \\ k^g_{II\,5,3} & k^g_{II\,5,5} + C_v/2 \end{bmatrix}$$

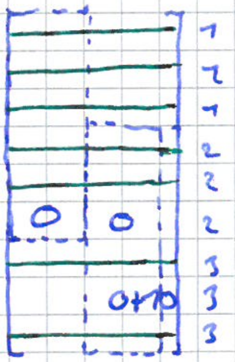
$EI = 1{,}211\cdot10^5$

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3{,}553\cdot10^5 & 8{,}075\cdot10^4 \\ 8{,}075\cdot10^4 & 6{,}383\cdot10^4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \varphi_2 \\ w_3 \end{array}$$

$P_I^l = P_I^g = [-1134; 0; 58{,}14; 1134; 0; -58{,}14]^T$

$P_{II}^l = P_{II}^g = [0; 15; -7{,}5; 0; 15; 7{,}5]^T$

Pred :



$$\rightarrow P_{red} = \begin{bmatrix} P^g_{I,6} + P^g_{II,3} \\ P^g_{II,5} + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -65{,}64 \\ 25 \end{bmatrix} \begin{array}{l} m_2 \\ P_{z3} \end{array}$$

$$k_{red}\cdot V_{red} = P_{red} \rightarrow V_{red} = \begin{bmatrix} -3{,}842 \\ 8{,}778 \end{bmatrix}\cdot10^{-4} \begin{array}{l} \varphi_2 \\ w_3 \end{array}$$

$$S_I^l = k_I^l V_I^l - P_I^l = k_I^l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3{,}842 \end{pmatrix} - P_I^l = \begin{pmatrix} 1134 \\ 17{,}45 \\ -81{,}41 \\ -1134 \\ -17{,}45 \\ 11{,}6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{array}; \quad S_{II}^l = \begin{pmatrix} 0 \\ -31{,}23 \\ 16{,}33 \\ 0 \\ 1{,}231 \\ 32{,}36 \end{pmatrix} \begin{array}{l} N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \\ N_3 \\ Q_3 \\ M_3 \end{array}$$

$N_1^I, Q_1^I, M_1^I + N_2^{II}, Q_2^{II}, M_2^{II}$ VZW (aber warum?)

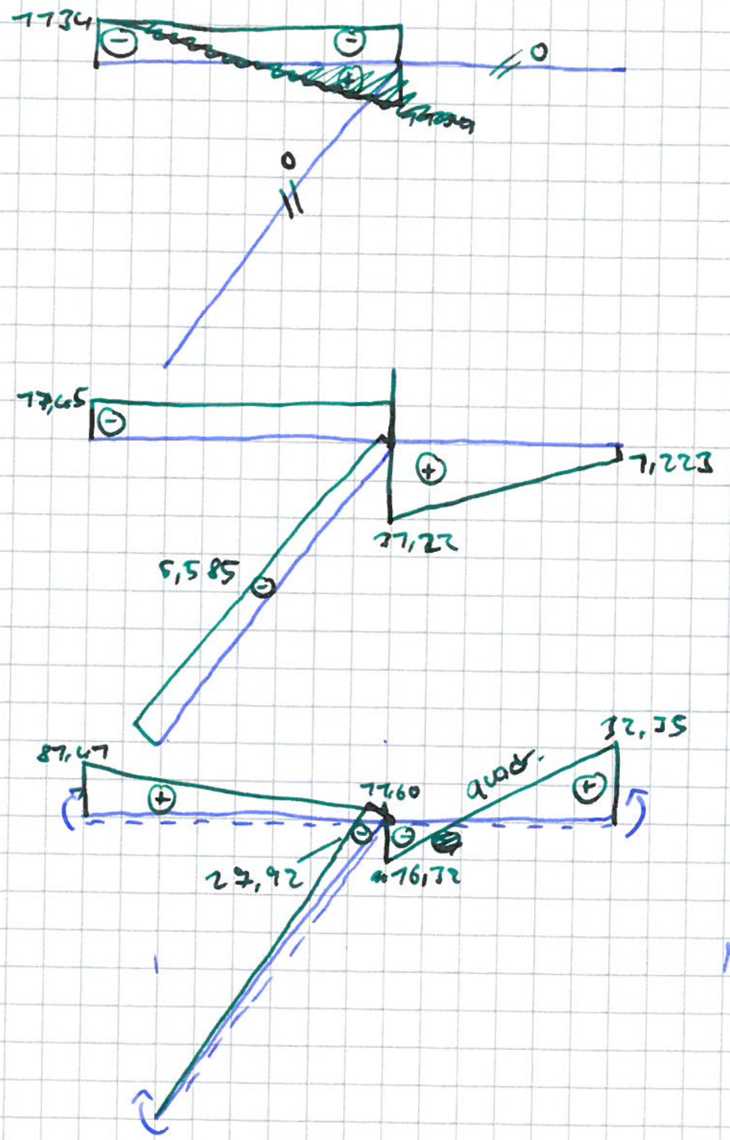
Element $\mathbb{III}$:

Moment am Knoten: $M_{\mathbb{III}}^2 = e_2 \cdot C_e = -27{,}92\,kNm$

Lineares Verlauf $M_{\mathbb{III}}^4 = 0\,kNm$ $\quad L_{\mathbb{III}} = 5m$

Querkraft : $M_{\mathbb{III}}^2 \stackrel{!}{=} \int_0^{L_{\mathbb{III}}} Q_{\mathbb{III}}\, ds \;\rightarrow\; Q_{\mathbb{III}} = -5{,}585\,kN$

konstanter Verlauf.



$\Sigma M_2 = 11{,}6 - (-16{,}32) + (-27{,}92) = 0 \;\checkmark \;\rightarrow$ VZ stimmt bei M_3

Institut für Statik und Dynamik
der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Tim Ricken

Bachelor of Science
Luft- und Raumfahrttechnik

Statik

Modulprüfung am 6. September 2022 (SoSe22)

Dauer: 120 min

Vorname: ______________ Nachname: ______________

Matrikelnummer: ______________ Unterschrift: ______________

Hilfsmittel:

- Taschenrechner PO15: programmierbar, nicht kommunikationsfähig
- Taschenrechner PO19: TI Nspire CX (CAS), TI Nspire CS II-T (CAS) oder nicht programmierbar
- Stifte, Papier, etc.
- Formelsammlung TM1-3 sowie Statik mit Anmerkungen
- Integrationstabelle mit Anmerkungen

Bearbeitungshinweise:

- Prüfen Sie die Klausur auf *Vollständigkeit.*
- Versehen Sie *unbedingt* jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Beginnen Sie *unbedingt* mit jeder neuen Aufgabe auch ein neues Blatt.
- Beschreiben Sie die Blätter nur *einseitig.*
- Die Verwendung *grüner* und *roter* Farbstifte ist *unzulässig.*
- Dokumentieren Sie Ihre Lösungen mit *nachvollziehbarem Rechenweg.*

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	8	6	4	7	19	22	19	15	100
erreicht									

Name: ______________
Matrikelnummer: ______________

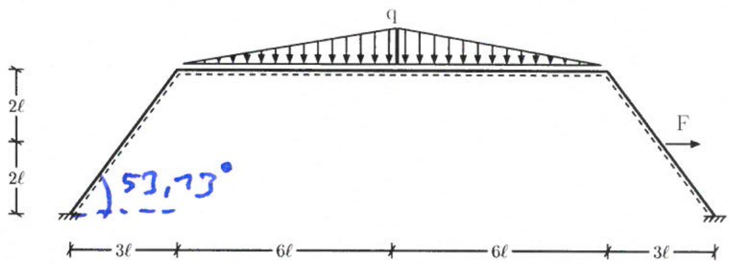
Aufgabe 5 (19 P.)

Nachfolgend soll eine symmetrische Struktur unter allgemeiner Belastung betrachtet werden. Bestimmen Sie die Zustandslinien des Systems unter Ausnutzung des Belastungsumordnungsverfahrens.

a) Geben Sie den symmetrischen und den antimetrischen Lastfall an. Bestimmen Sie jeweils alle Lagerungen, Belastungen sowie den Grad der statischen Bestimmtheit! Vereinfachen Sie beiden Systeme so weit als möglich!

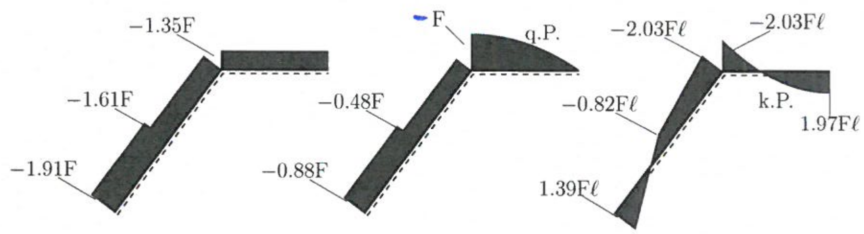
b) Berechnen Sie für den antimetrischen Lastfall alle Zustandslinien und stellen Sie diese grafisch dar! Nutzen Sie dazu den beiliegenden Vordruck.

c) Bestimmen Sie nun die Zustandslinien (N, Q, M) des allgemein belasteten Systems! Nutzen Sie dazu die gegebenen Zustandslinien des symmetrischen Teilsystems sowie die beiliegenden Vordrucke.



Gegeben: ℓ, $EA \to \infty$, EI, F, $q = \frac{F}{3\ell}$

Zustandslinien symmetrisches Teilsystem:



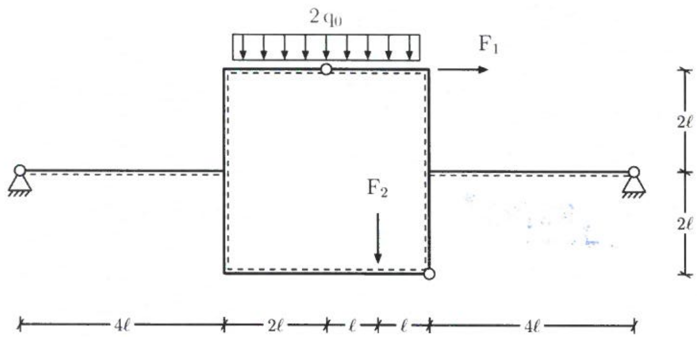
Aufgabe 6 (22 P.)

Das dargestellte Tragwerk wird mit zwei Einzel- sowie einer konstanten Streckenlast beaufschlagt.

a) Bestimmen Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit und konstruieren Sie ein statisch bestimmtes Hauptsystem!

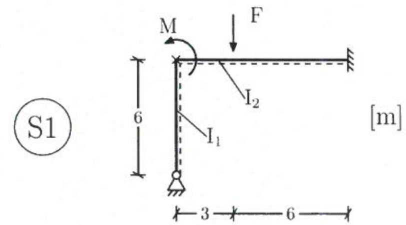
b) Bestimmen Sie die Zustandslinien für Normalkraft, Querkraft und Moment und stellen Sie deren Verläufe dar! Nutzen Sie die Vordrucke auf der nächsten Seite.

Gegeben: ℓ, $EA \to \infty$, EI, q_0, $F_1 = 6\,q_0\ell$, $F_2 = 12\,q_0\ell$



Aufgabe 7 (19 P.)

In dieser Aufgabe sollen zwei Strukturen behandelt werden. Im ersten Teil soll die Struktur S1 mittels des Drehwinkelverfahrens (DWV) berechnet werden.

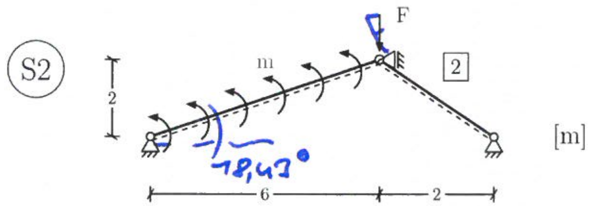


Gegeben: $I_c/I_1 = 2$, $I_c/I_2 = 3$, $F = 50\,\mathrm{kN}$, $M = 10\,\mathrm{kN\,m}$

a) Ermitteln Sie den Last- (LVZ) und Einheitsverformungszustand (EVZ). Skizzieren Sie dabei die jeweiligen prinzipiellen Momentenverläufe.

b) Berechnen Sie nun die erforderlichen Größen zur Erfüllung der Kräftegleichgewichtsbedingungen. Bestimmen Sie damit den Gesamtmomentenverlauf der Struktur und stellen Sie diesen grafisch dar! Skizzieren Sie außerdem das Knotengleichgewicht im Angriffspunkt des Moments M!

Betrachten Sie nun die Struktur S2. Nutzen Sie das allgemeine Weggrößenverfahren (WGV) für die nachfolgenden Teilaufgaben.



Gegeben: $EA = 45\,000\,\mathrm{kN}$, $EI = 10\,500\,\mathrm{kN\,m^2}$, $F = 100\,\mathrm{kN}$, $m = 5\,\mathrm{kN}$

c) Bestimmen Sie alle unbekannten Weggrößen des ersten Stabes! Nutzen Sie für Ihre Berechnung so wenig Balkenelemente als möglich!

d) Skizzieren Sie die Zustandslinien des Stabes 2!

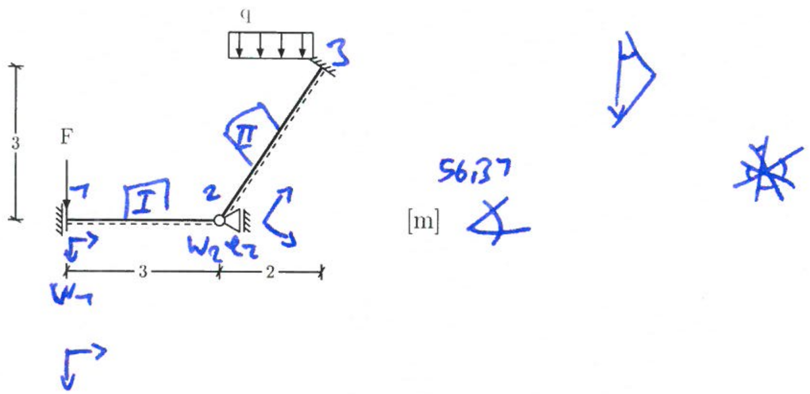
Aufgabe 8 (15 P.)

Gegeben ist eine Struktur unter mechanischer Belastung. Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben mittels des allgemeinen Weggrößenverfahrens (WGV).

a) Bestimmen Sie alle unbekannten Weggrößen!

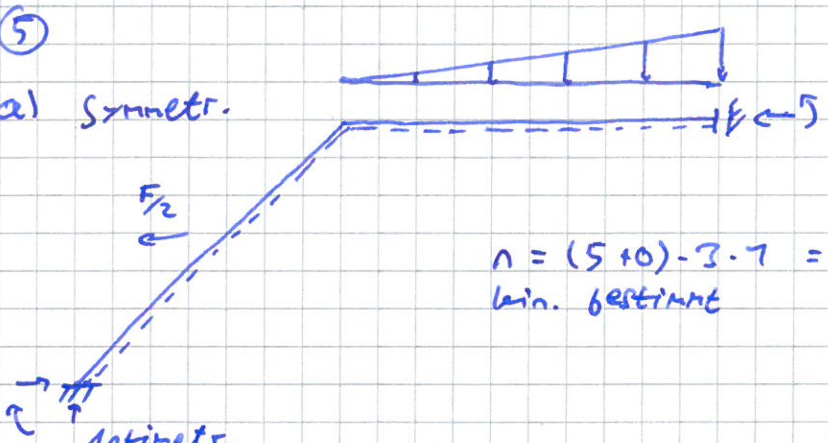
b) Berechnen Sie die Element-Lastvektoren aller Elemente und skizzieren Sie Normalkraft, Querkraft und Moment in Form, Vorzeichen und Ordinate! Nutzen Sie die Vordrucke auf der nächsten Seite.

Gegeben: $EA = 45\,000\,\mathrm{kN}$, $EI = 10\,500\,\mathrm{kN\,m^2}$, $F = 20\,\mathrm{kN}$, $q = 100\,\mathrm{kN\,m^{-1}}$



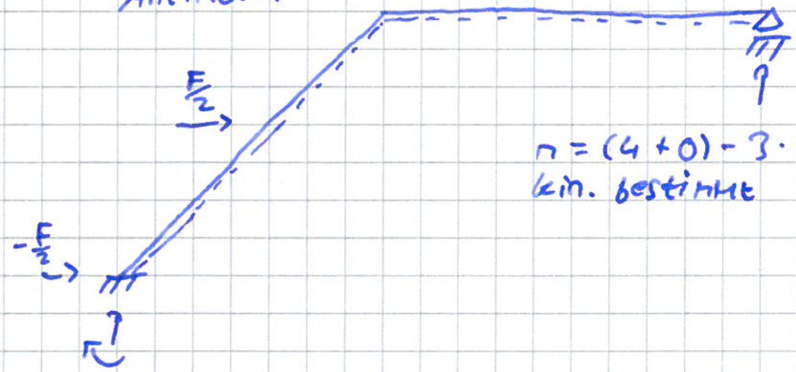
5

a) Symmetr.



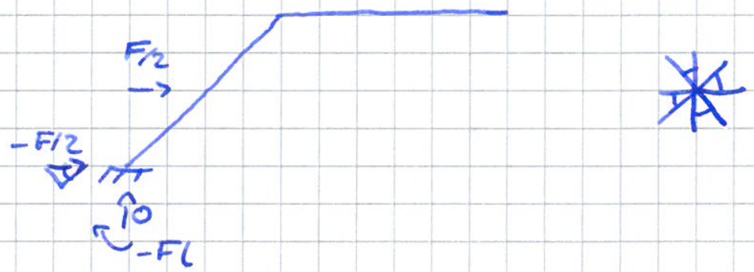
$n = (5+0) - 3 \cdot 1 = 2 \rightarrow$ 2-fach stat. bestimmt
kin. bestimmt

Antimetr.

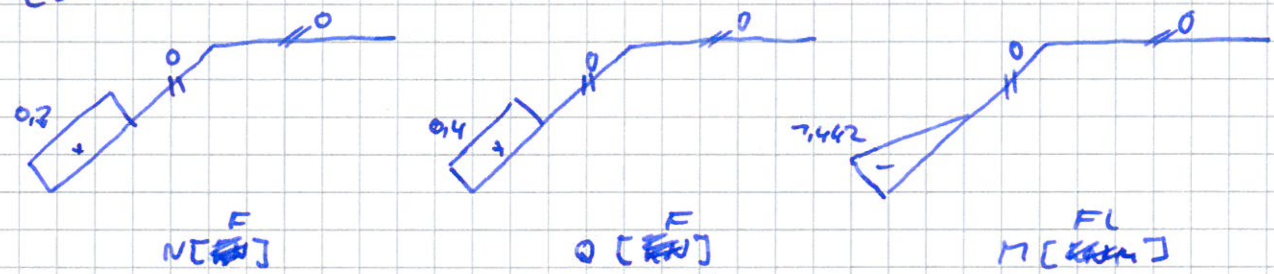


$n = (4+0) - 3 \cdot 1 = 1 \rightarrow$ 1-fach stat. bestimmt
kin. bestimmt

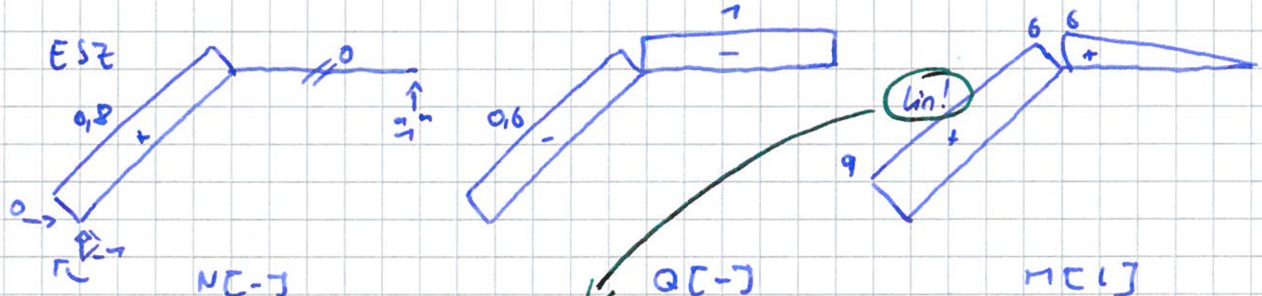
b) Stat. bestimmtes HS:



LSZ:



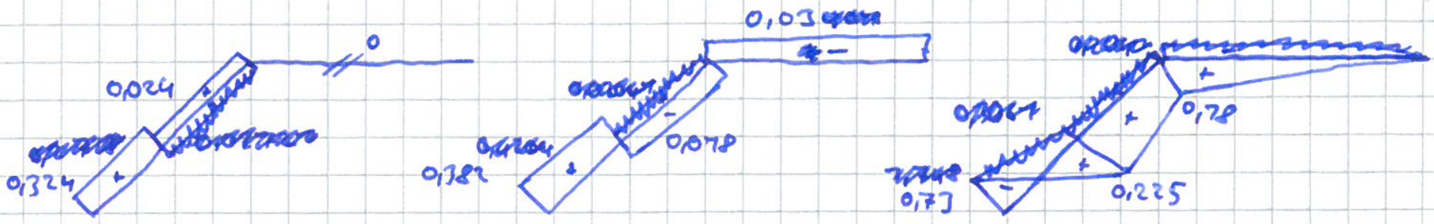
ESZ



$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(5 \cdot 0{,}5l \cdot \frac{1}{2} \cdot 9l \cdot 1{,}442 \cdot Fl\right) = 16{,}22 \frac{Fl^3}{EI}$$

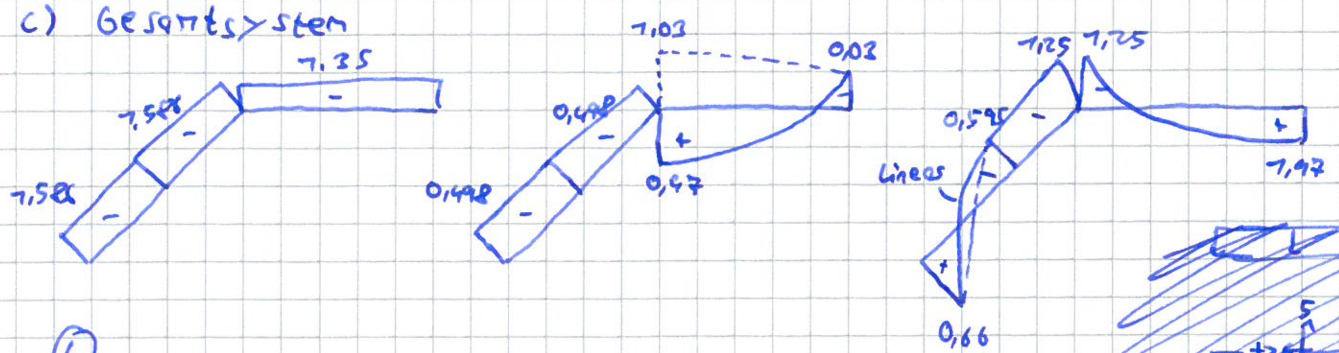
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(5l \cdot (9l)^2 + 6l \cdot \frac{1}{3} \cdot (6l)^2\right) = 477 \frac{l^3}{EI}$$

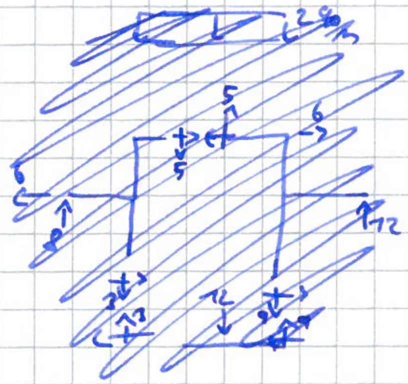
$$\delta_{11} \cdot (-X) = \delta_{10} \rightarrow X = -0{,}03401\,F$$ eig. $0{,}03F$



N[F] Q[F] M[FL]

c) Gesamtsystem

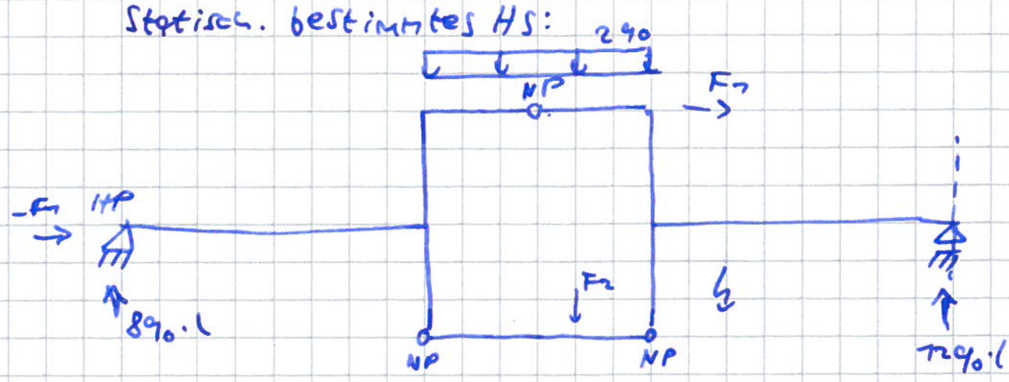




(6)

a) $n = (4+4) - 3 \cdot 2 = 2$-fach stat. unbestimmt

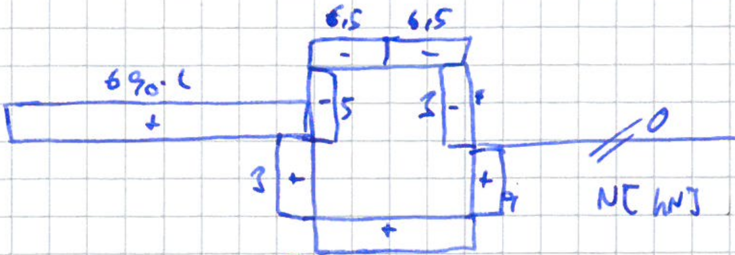
Statisch. bestimmtes HS:

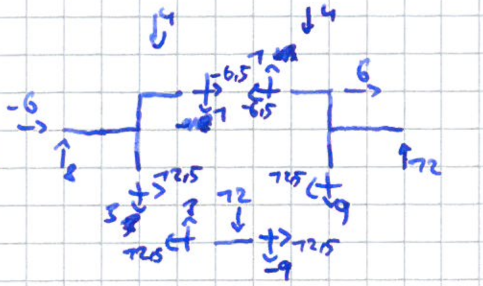


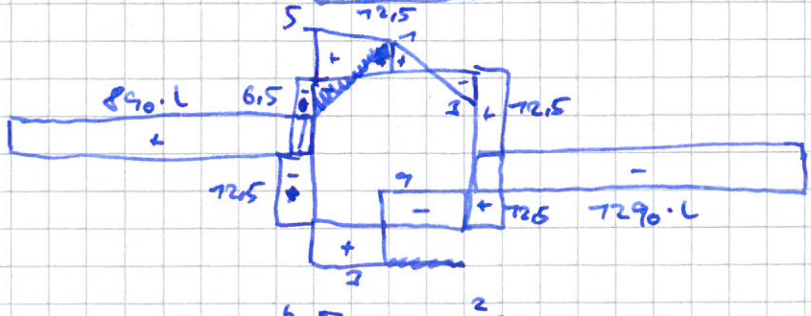
$n = (3+6) - 3 \cdot 3 = 0$ ✓

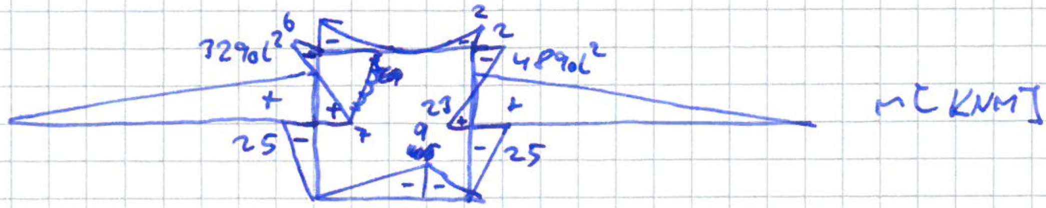
Stat.-kin. bestimmt ✓

b)



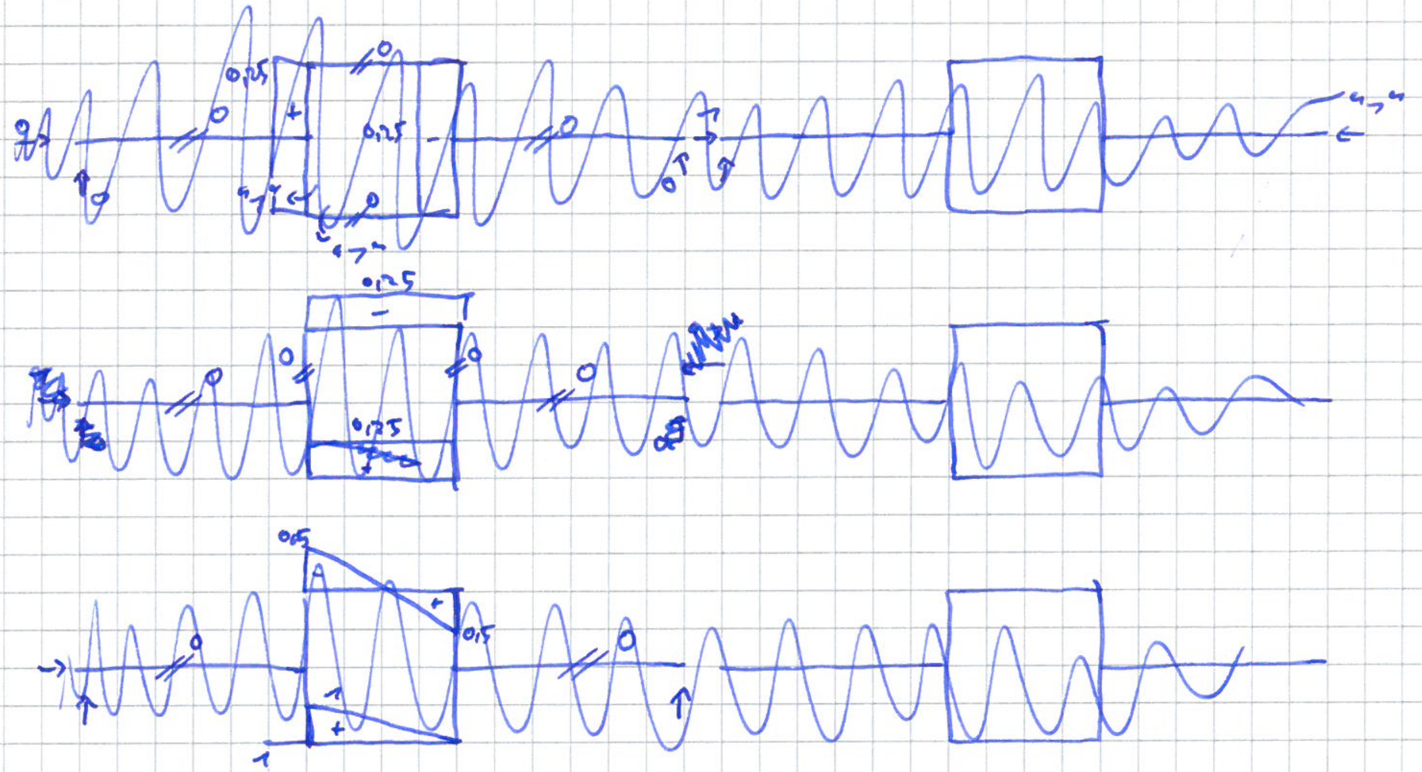




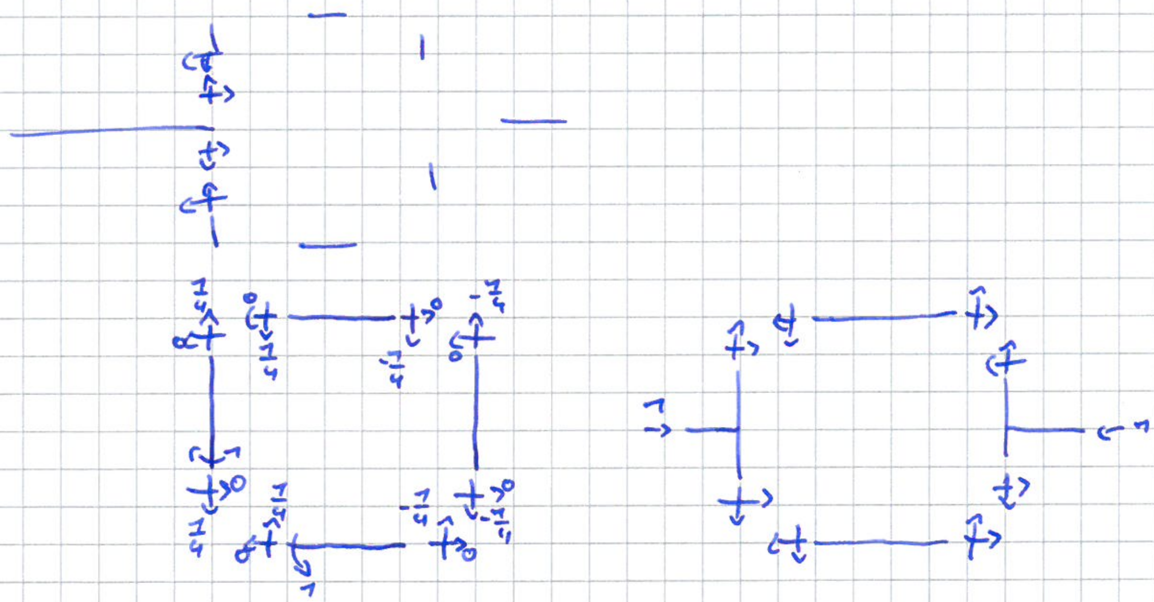


Statik H22

ESZ 1: ESZ 2:

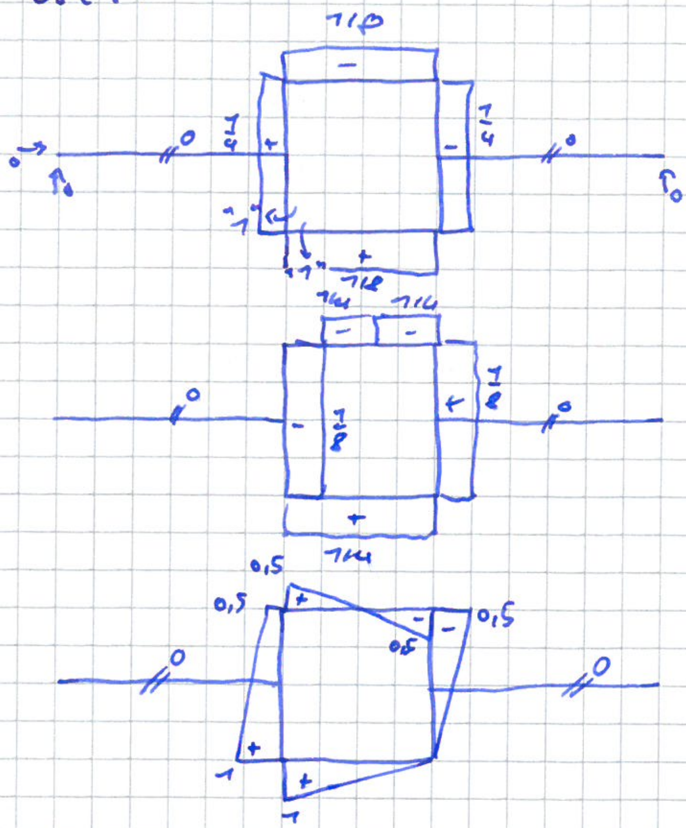


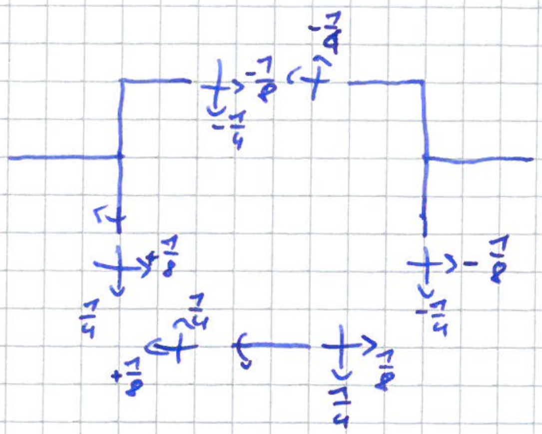
Nebenrechnung



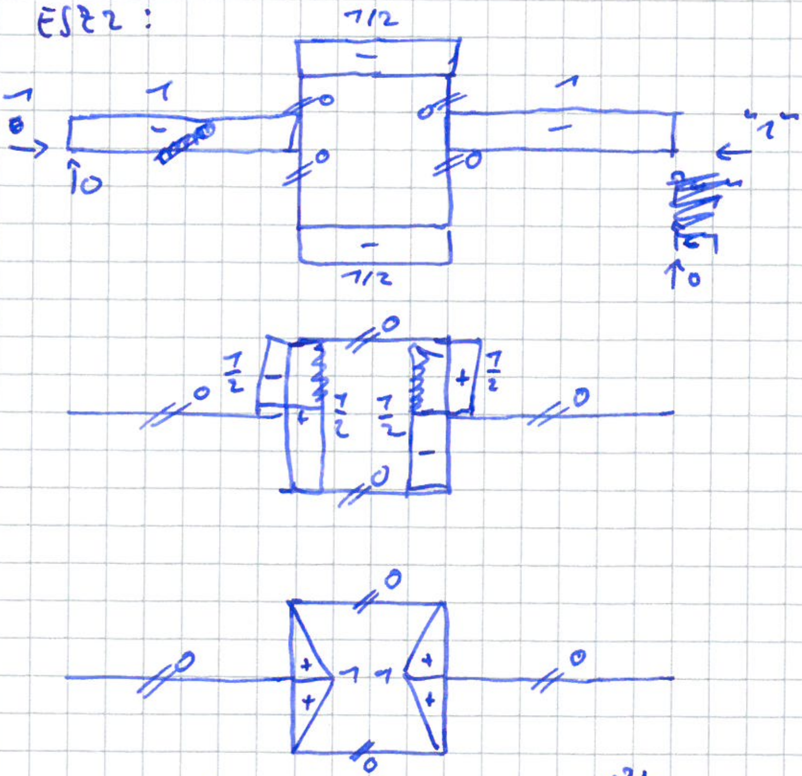
Neuer Versuch auf nächster Seite...

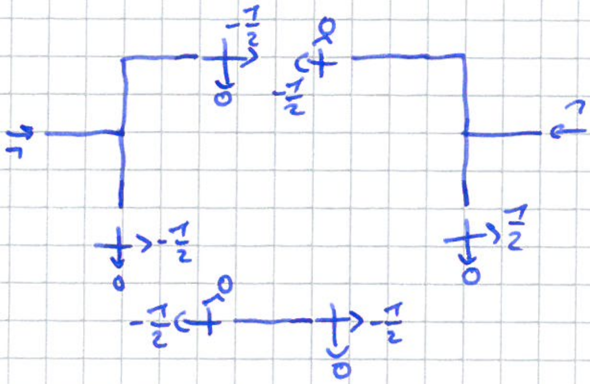
ESZ 1:





ESZ 2:





$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\left(2l \cdot 1l \cdot (-25Fl) \cdot \frac{1}{3} + \int_0^{2l} \left(7 - \frac{13}{2}x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx\right\} + \int_0^{2l} \left(-2 + \frac{25}{2}x\right)\left(\frac{1}{2}x\right) dx +$$

$$+ \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-25) \cdot 1\right) = -\frac{16}{EI} Fl^{3}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(\left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-6) \cdot 0{,}5\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-0{,}5) \cdot (-2)\right) +\right.$$

$$+ \left(\frac{1}{6} \cdot (-9) \cdot 1 \cdot (1+3)\right) + \int_0^2 \left(23 - \frac{25}{2}x\right)\left(0{,}25 - \frac{0{,}25}{2}x\right) dx + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-2{,}3) \cdot (-0{,}25) +$$

$$\left. + \left(2 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-25)\left(2 \cdot 0{,}75 + 1\right)\right) + \int_0^2 \left(0{,}75 - \frac{0{,}25}{2}x\right)\left(7 - \frac{13}{2}x\right) dx\right.$$

$$= -27{,}75 \frac{Fl^3}{EI}$$

Wer rechnet das in einer Klausur...??

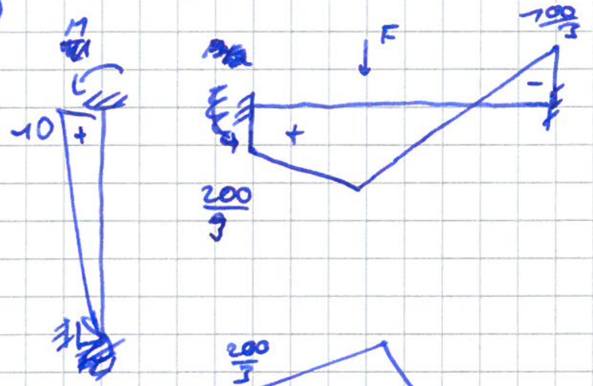
$\delta_{22} = 2{,}667 \frac{l^3}{EI}$ $\delta_{11} = 4{,}333 \frac{l^3}{EI}$ $\delta_{12} = \delta_{21} = 1 \frac{l^3}{EI}$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix}$$

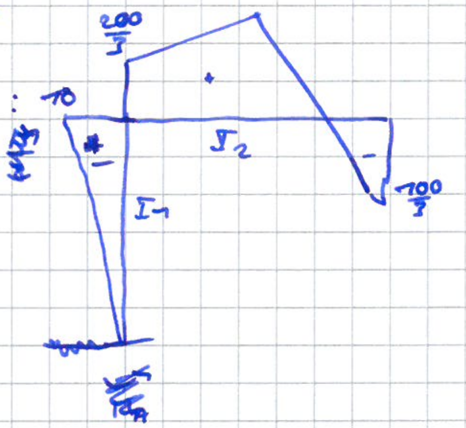
$x_1 = 5{,}495 \qquad x_2 = 3{,}939$

Verläufe über Superposition mit $Z = Z_0 + x_1 Z_1 + x_2 Z_2$

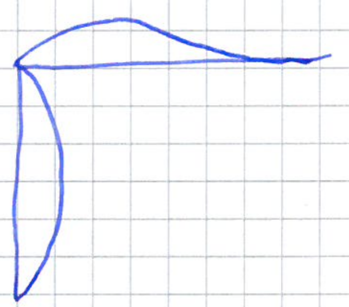
7)

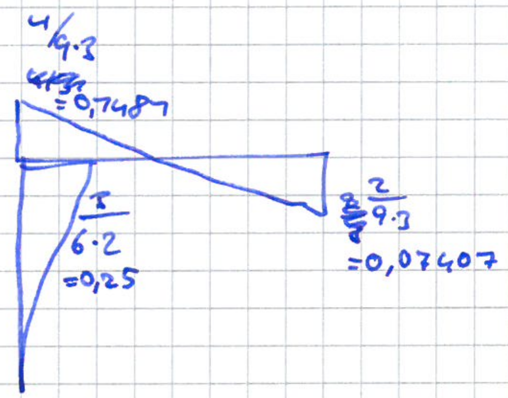


LV7 :



EI7 :



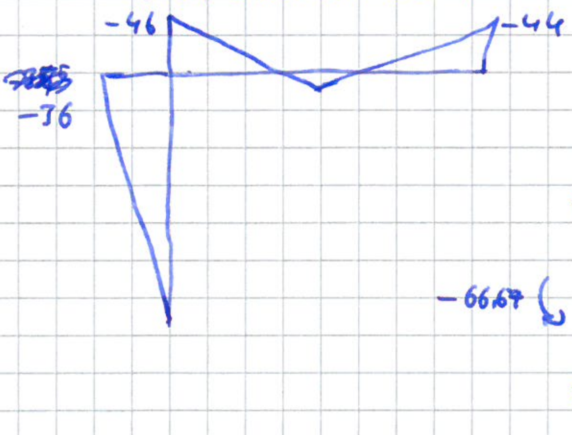


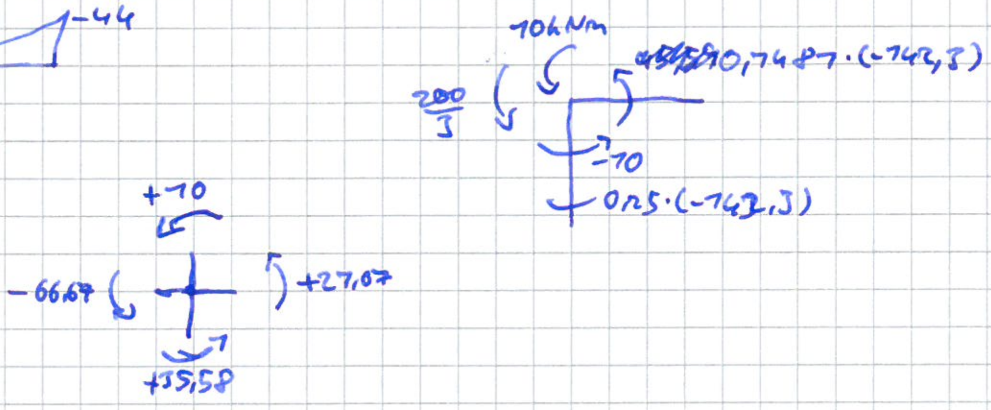
6)

$M_0 + M^1 y^1 = 0 \;\rightarrow\; y_1 =$

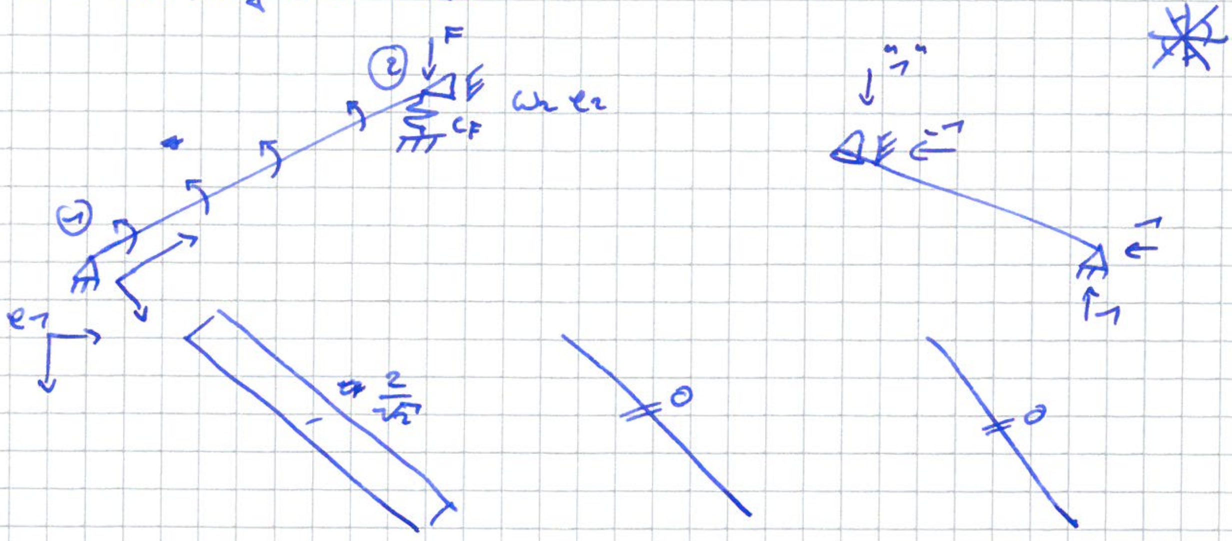
$\left(\frac{200}{3} - 10\right) + (0{,}1481 + 0{,}25)\, y = 0 \;\rightarrow\; y = -142{,}3\ kNm^2$

Gesamtmomentenverlauf :





c) Einführung einer Feder:



$$\delta = \frac{1}{EA}\left(-\sqrt{2^2+2^2}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 1{,}257\cdot 10^{-4} \stackrel{!}{=} \frac{1}{c_F}$$

$c_F = 7955 \ \frac{kN}{m}$

$k^L = [\ \ ]^{6\times 6} \qquad k^g = T^T k^L T = [\ \ ]^{6\times 6}$

$$k_{red} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 6641 & 1494 & 3320 \\ 1494 & 1159+c_F & 1494 \\ 3320 & 1494 & 6641 \end{bmatrix}\begin{array}{l} e_1 \\ \omega_2 \\ e_2 \end{array}$$

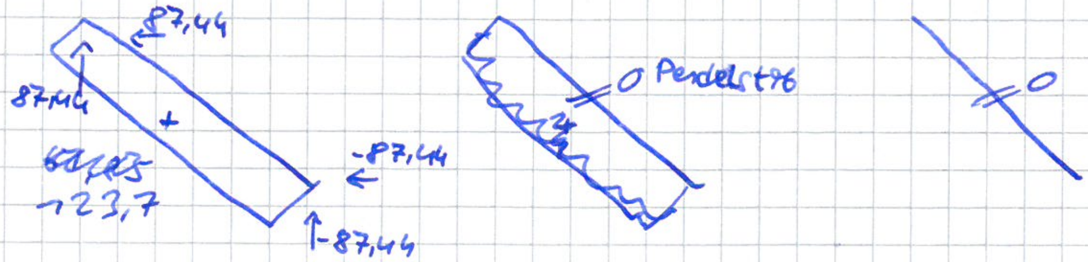
$$p^L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15{,}87 \\ 0 \\ 0 \\ 15{,}87 \end{bmatrix} \qquad p^g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15{,}87 \\ 0 \\ 100 \\ 15{,}87 \end{bmatrix} \qquad P_{red} = \begin{bmatrix} 15{,}87 \\ 100 \\ 15{,}87 \end{bmatrix}$$

$k_{red}\cdot V_{red} = P_{red} \rightarrow$ ~~$V_{red} = \begin{bmatrix} 2{,}588\cdot 10^{-3} \\ -6{,}672\cdot 10^{-3} \\ 2{,}588\cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$~~

$$V_{red} = \begin{bmatrix} -6{,}749\cdot 10^{-5} \\ 1{,}099\cdot 10^{-2} \\ -6{,}749\cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

d) $S_I^g = k_I^g V_I^g - p_I^g$

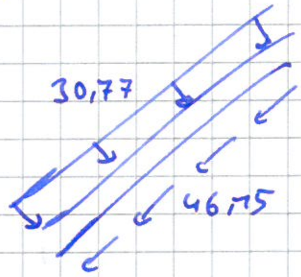
$F_F = -87{,}44 \ kN$



a) $k_I^l = k_I^g = [\cdot]^{6\times6}$

$k_{II}^l = [\ \ ]^{6\times6}$ $\qquad k_{II}^g = T^T k_{II}^l T = [\ \ ]^{6\times6}$

$$P_I^l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P_{II}^l = \begin{bmatrix} -83,2 \\ 55,47 \\ -33,33 \\ -83,2 \\ 55,47 \\ 33,33 \end{bmatrix}$$



$$k_{red} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 4667 & \cancel{4667}\ -4667 & -7000 \\ -4667 & 14130 & 4312 \\ -7000 & 4312 & 25650 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{array}$$

ϟ Fehler!

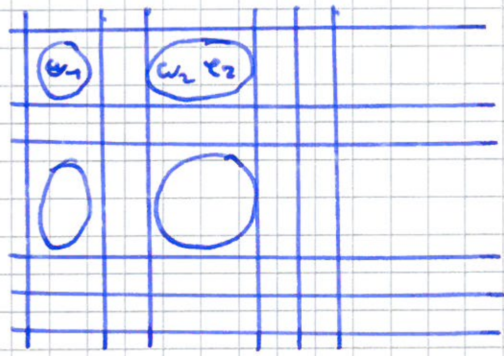
Neuer Versuch auf nächster Seite!

$$P_{red} = \begin{bmatrix} 0+20 \\ \cancel{1000}\ 99,9 \\ -33,33 \end{bmatrix}$$

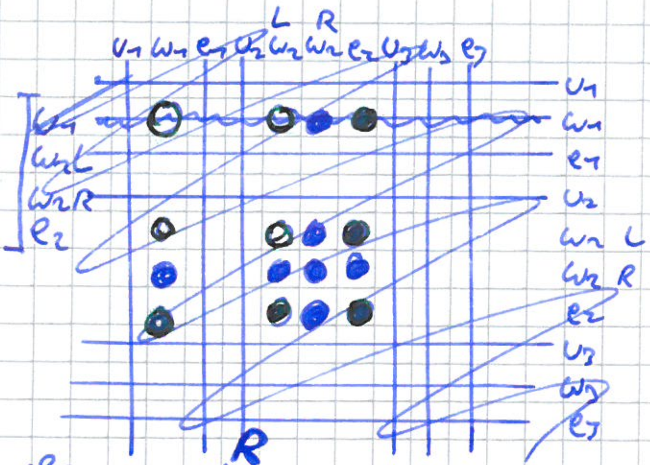
$$k_{red} V_{red} = P_{red} \quad \rightarrow \quad V_{red} = \begin{bmatrix} 2,077\cdot10^{-2} \\ 1,328\cdot10^{-2} \\ 2,138\cdot10^{-3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{array}$$

$$S_I^l = k_I^l V_I^l - P_I^l = \begin{bmatrix} 0 \\ 19,99 \\ -37,46 \\ 0 \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

	u_1	w_1	φ_1	u_2	w_2	φ_2	u_3	w_3	φ_3
u_1									
w_1									
φ_1									
u_2									
w_2									
φ_2									
u_3									
w_3									
φ_3									



$\cancel{k_{red} = \begin{bmatrix} 4667 & -4667 \\ -4667 & 14730 \end{bmatrix}}$



$$\cancel{k_{red} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} w_1 & w_2^{L} & e_2 & w_2^{R} \\ \end{array}}$$

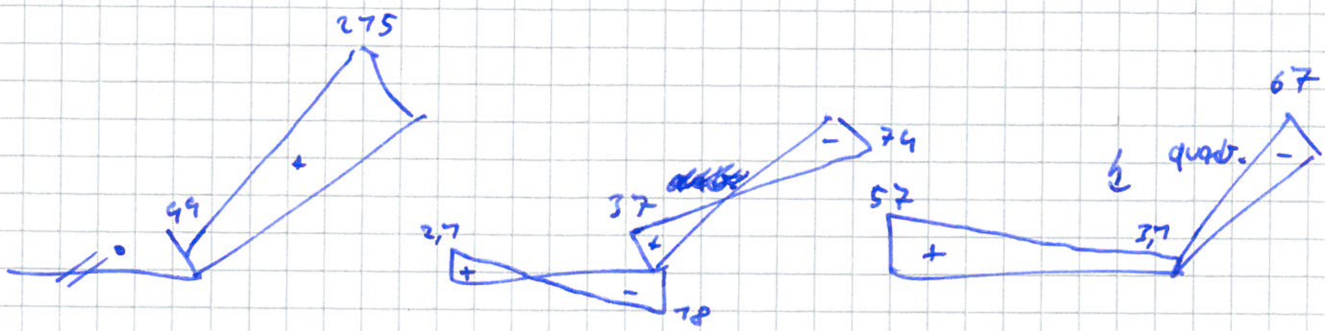
$$\cancel{\begin{bmatrix} 4667 & 0 & -4667 & 0 \\ 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17650+4667 & -2688 \\ 0 & 0 & \cancel{4667}\ -2688 & 9468 \end{bmatrix}}\begin{array}{l} w_1 \\ w_2\ L \\ e_2 \\ w_2\ R \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & w_1 & w_2 & e_2^{L} & e_2^{R} \\ \cancel{K_{red}} \ k_{red} = & \left[\begin{array}{c} 4667 \\ -4667 \\ -7000 \\ 0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} -4667\ \cancel{-7000} \\ 4667+9468 \\ 7000 \\ -2688 \end{array} & \begin{array}{c} -7000 \\ 7000 \\ 14000 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ -2688 \\ \cancel{-2688}\ 0 \\ 17650 \end{array}\right] \end{array}$$

$$P_{red} = \begin{bmatrix} 20 \\ 99{,}9 \\ 0 \\ -33{,}33 \end{bmatrix}$$

$$k_{red} \cdot V_{red} = P_{red} \qquad V_{red} = \begin{bmatrix} 2{,}938 \cdot 10^{-2} \\ 1{,}269 \cdot 10^{-2} \\ 8{,}564 \cdot 10^{-3} \\ 6{,}849 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}\begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \\ e_2\ L \\ e_2\ R \end{array}$$

$$S_I^L = k_I^L\, v_I^L - P_I^L = \begin{bmatrix} 0 \\ -2{,}7 \\ -57 \\ 0 \\ -78 \\ 3{,}7 \end{bmatrix} \qquad S_{II}^L = \begin{bmatrix} -49 \\ -37 \\ 0 \\ 275 \\ -74 \\ -67 \end{bmatrix}$$



N[kN] Q[kN] M[kNm]

Institut für Statik und Dynamik
der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Tim Ricken

Bachelor of Science
Luft- und Raumfahrttechnik

Statik

Modulprüfung am 5. April 2022 (WiSe22)

Dauer: 120 min

Vorname: ______________ Nachname: ______________

Matrikelnummer: _ _ _ _ _ _ _ Unterschrift: ______________

Hilfsmittel:

- Taschenrechner (programmierbar, nicht kommunikationsfähig)
- Stifte, Papier, etc.
- Formelsammlung TM1-3 sowie Statik mit Anmerkungen
- Integrationstabelle mit Anmerkungen

Bearbeitungshinweise:

- Prüfen Sie die Klausur auf *Vollständigkeit.*
- Versehen Sie *unbedingt* jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Beginnen Sie *unbedingt* mit jeder neuen Aufgabe auch ein neues Blatt.
- Beschreiben Sie die Blätter nur *einseitig.*
- Die Verwendung *grüner* und *roter* Farbstifte ist *unzulässig.*
- Dokumentieren Sie Ihre Lösungen mit *nachvollziehbarem Rechenweg.*

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	6	7	6	6	24	14	24	13	100
erreicht									

Aufgabe 5 (24 P.)

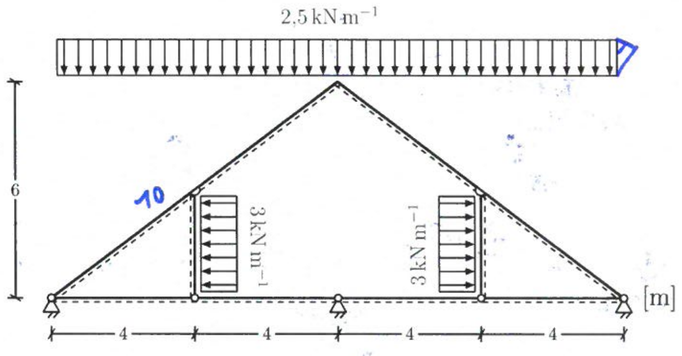
Gegeben ist eine symmetrische Struktur unter mechanischer Belastung. Die Struktur weist konstante Kennwerte EA und EI auf.

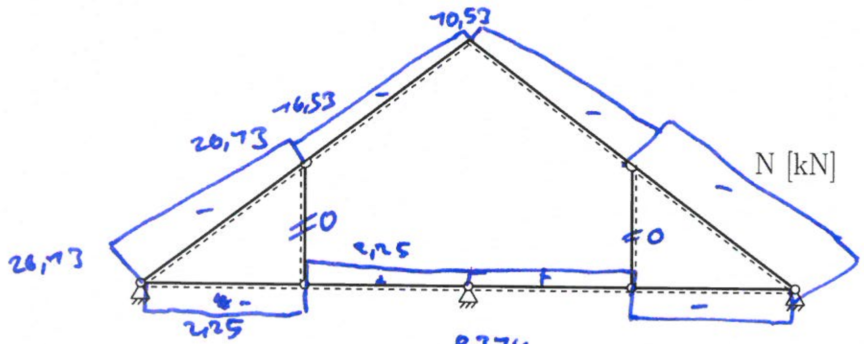
a) Vereinfachen Sie die gegebene Struktur unter Ausnutzung der Symmetrie- und Antimetriebedingungen!

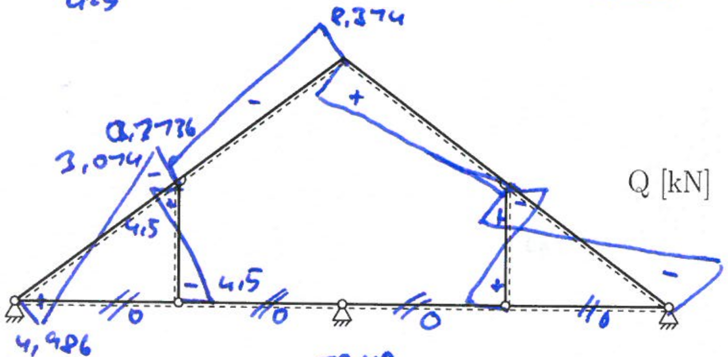
b) Geben Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit an (vereinfachtes System!) und konstruieren Sie ein statisch bestimmtes Hauptsystem!

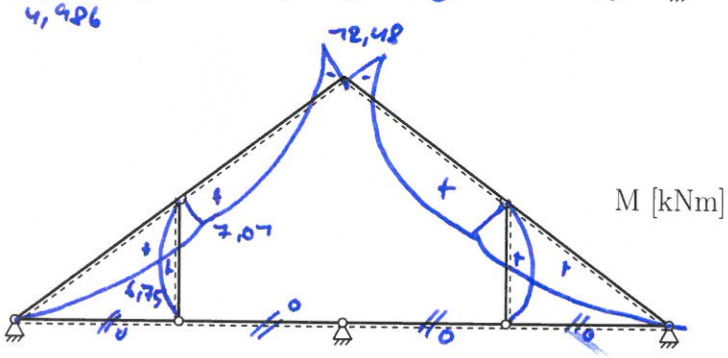
c) Bestimmen Sie die Zustandslinien für Normalkraft, Querkraft und Moment und stellen Sie deren Verläufe dar! Nutzen Sie die Vordrucke auf der nächsten Seite.

Gegeben: EA = 30 000 kN, EI = 10 000 kN m²









Aufgabe 6 (14 P.)

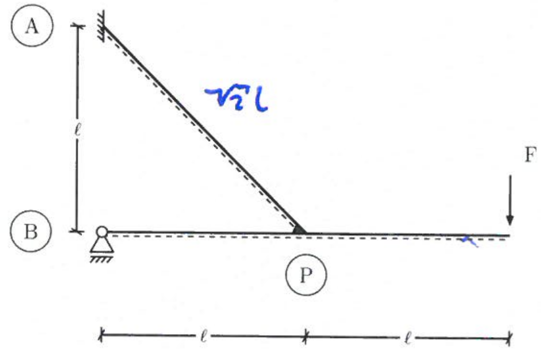
Das dargestellte Tragwerk ist mit einer Einzelkraft F belastet. Es ist in Position A durch eine feste Einspannung, im Punkt B durch ein Loslager fixiert.

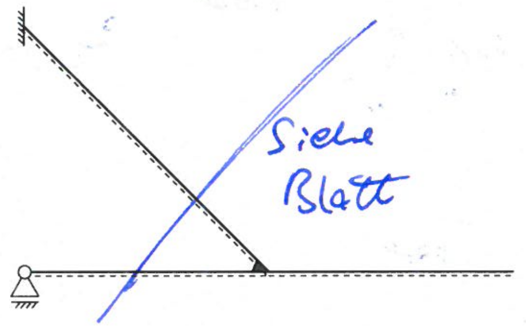
a) Bestimmen Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit und konstruieren Sie ein statisch bestimmtes Hauptsystem!

b) Bestimmen Sie die Zustandslinien für Normalkraft, Querkraft und Moment und stellen Sie deren Verläufe dar! Nutzen Sie die Vordrucke auf der nächsten Seite.

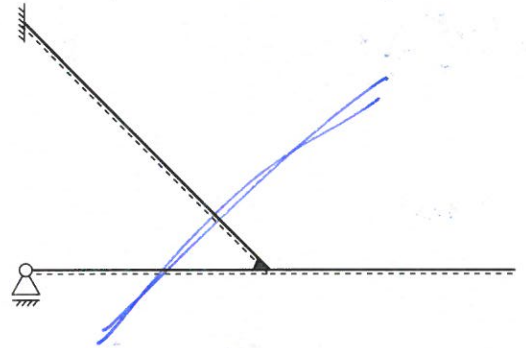
c) Bestimmen Sie die vertikale Verschiebung am Kraftangriffspunkt sowie die Verdrehung am Punkt P!

Gegeben: ℓ, EA, $EI = \frac{2\sqrt{2}EA\ell^2}{6}$, F

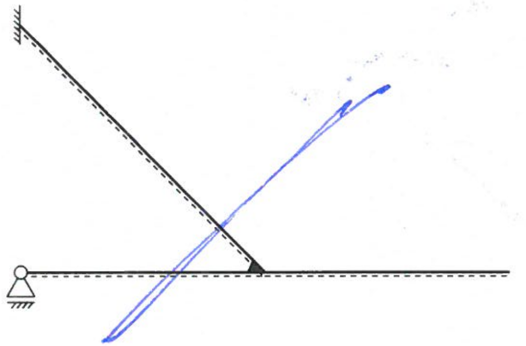




N [kN]



Q [kN]



M [kNm]

Aufgabe 7

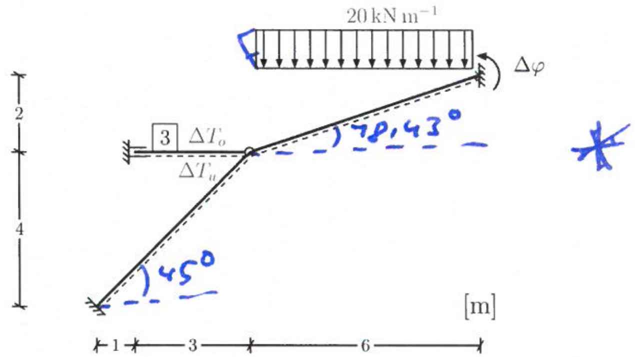
(24 P.)

Gegeben ist eine Struktur unter thermo-mechanischer Belastung sowie einer Verdrehung $\Delta\varphi$ der rechten Einspannung. Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben mittels des allgemeinen Weggrößenverfahrens (WGV).

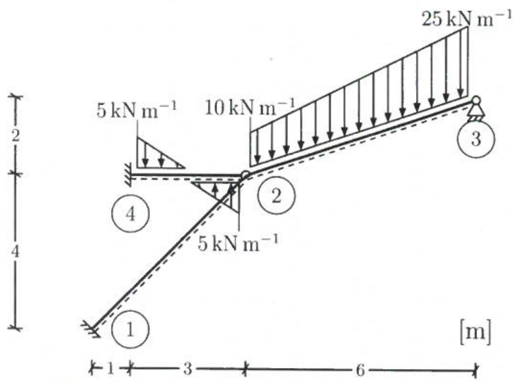
a) Vereinfachen Sie das System, indem Sie Balken 3 durch eine geeignete Feder ersetzen! Überlegen Sie dabei welche Kraftgröße am verbindenden Gelenk ungleich null ist, skalieren Sie diese auf 1 und bestimmen Sie die geleistete Arbeit des Balkens 3. Bestimmen Sie nun eine Federkonstante c, sodass die geleitete Arbeit der Feder der des Balken 3 entspricht. Sollten Sie c nicht bestimmen können, nehmen Sie $c = 60$ an.

b) Bestimmen Sie alle unbekannten Weggrößen des reduzierten Systems!

Gegeben: $EA = 45\,000\,\mathrm{kN}$, $EI = 10\,500\,\mathrm{kN\,m^2}$, $h = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $\alpha_T = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$, $\Delta\varphi = 2 \cdot 10^{-3}$, $\Delta T_o = -15\,\mathrm{K}$, $\Delta T_u = 15\,\mathrm{K}$



Betrachten Sie nun das nachfolgende, modifizierte System. Berechnungen ergaben die Schnittkräfte der Elemente 1 bis 3.



Element	1	2	3
Knoten A	1	2	4
Knoten B	2	3	2

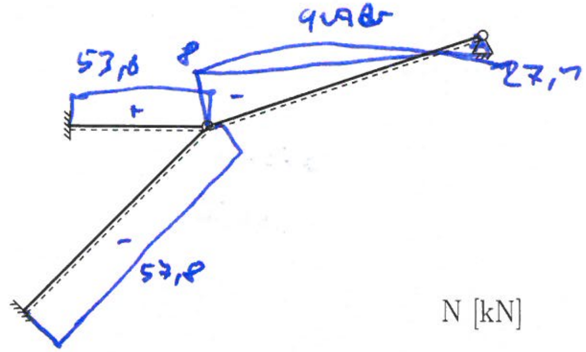
$s_1^l = [57,8;\ 6,3;\ -3,8;\ -57,8;\ -6,3;\ -31,8]^T$

$s_2^l = [8,0;\ -50;\ 31,8;\ 27,1;\ -55,0;\ 0]^T$

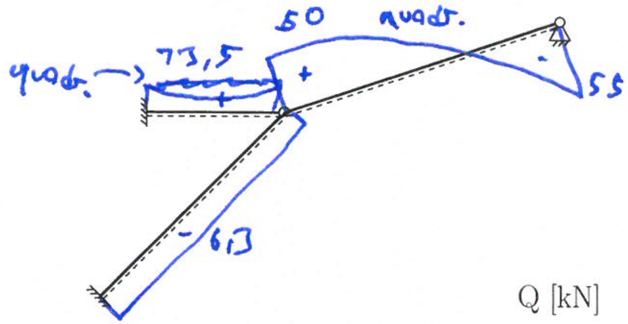
$s_3^l = [-53,6;\ -13,5;\ 48,1;\ 53,6;\ 13,5;\ 0]^T$

c) Stellen Sie alle Zustandslinien des Systems grafisch dar! Achten Sie auf qualitativ korrekte Verläufe und geben Sie den Funktionsgrad mit an. Nutzen Sie die Vordrucke auf der nächsten Seite.

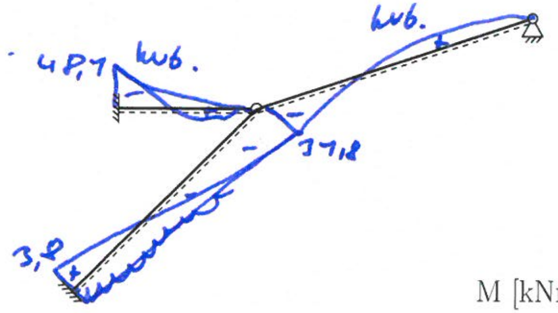
d) Beschreiben Sie, wie Sie unter Ausnutzung von Standard-Elementen mit konstanter Streckenlast einen Balken mit linearer Streckenlast approximieren könnten.



N [kN]



Q [kN]



M [kNm]

Aufgabe 8

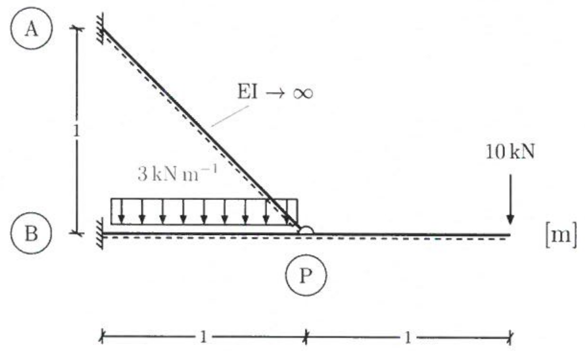
(13 P.)

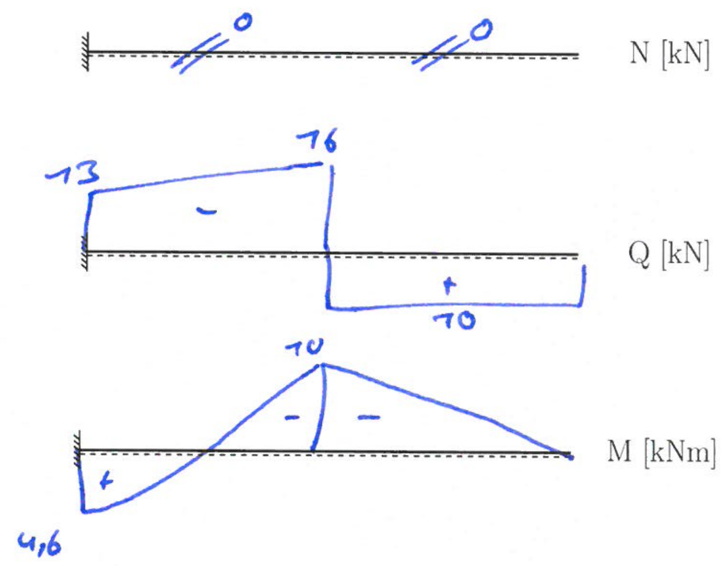
Gegeben ist eine Struktur unter mechanischer Belastung. Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben mittels des allgemeinen Weggrößenverfahrens (WGV).

a) Vereinfachen Sie den schrägen Balken $\overline{AP}$ durch ein geeignetes Lager. Denken Sie dabei an die Proportionalität von Federkonstaten bezüglich der Parameter EA und EI.

b) Bestimmen Sie alle unbekannten Weggrößen des reduzierten Systems und skizzieren Sie die Schnittkraftverläufe im horizontalen Teil der Struktur!

Gegeben: $EA \to \infty$, $EI = 833\,\mathrm{kN\,m^2}$

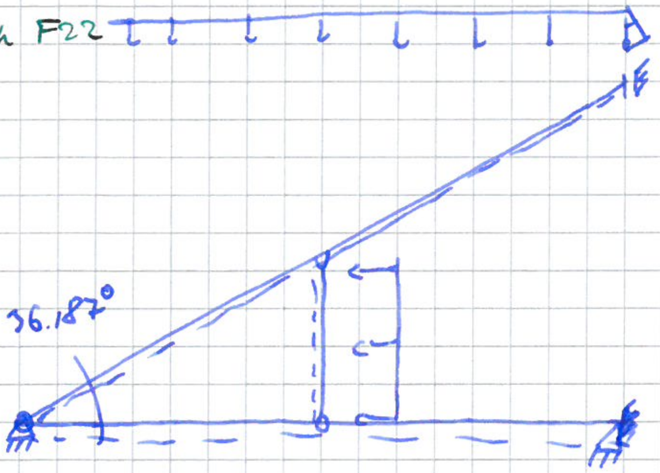




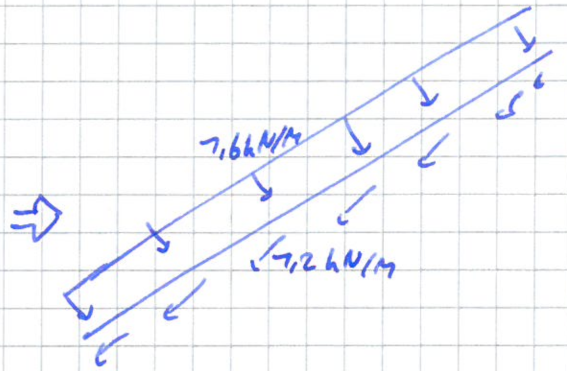
Statik F22

(5)

a)

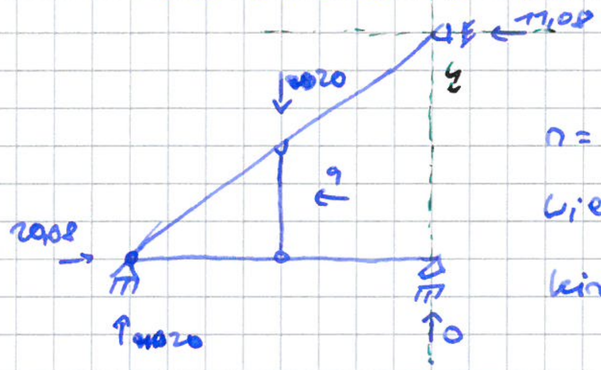


$\Rightarrow$



b) $n = (6+6+2) - 3 \cdot 4 = 2$- fach stat. unbestimmt

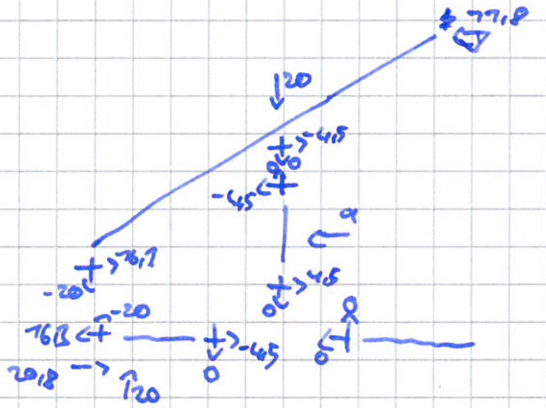
Statisch bestimmtes HS

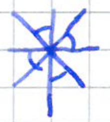


$n = (4+8) - 3 \cdot 4 = 0$ ✓

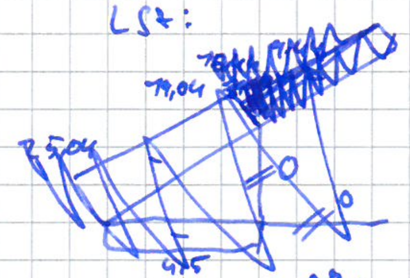
Wiederspruch in Polplan

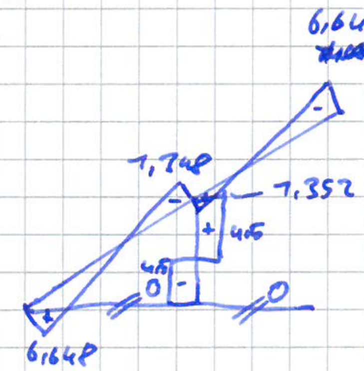
kinematisch und statisch bestimmt.

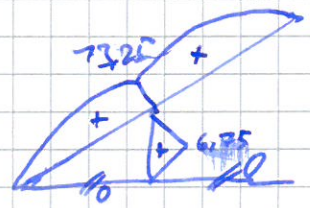


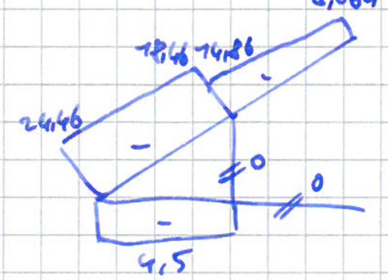


LSt:

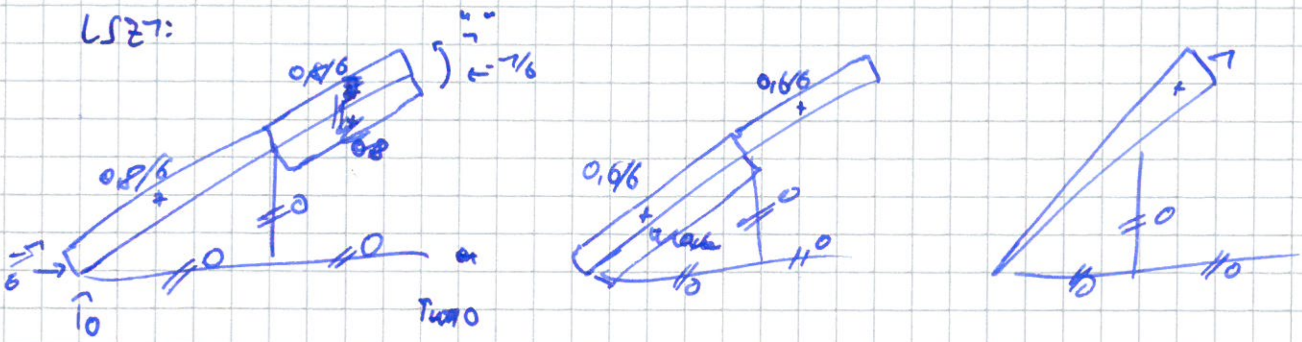


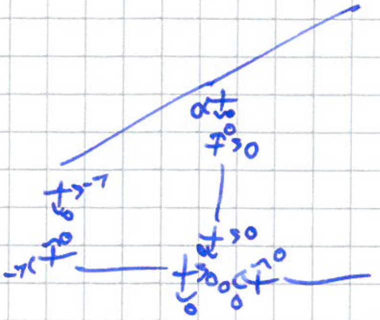




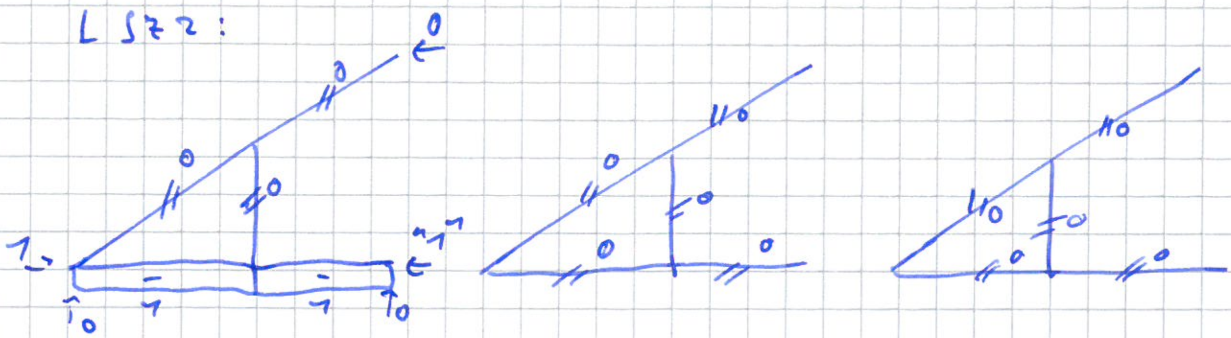


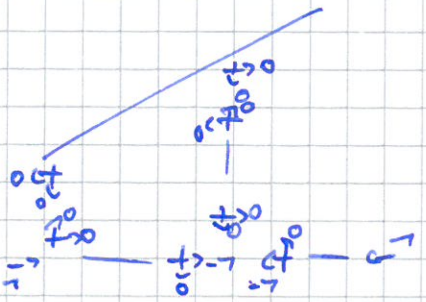
LSZ1:





LSZ2:





$$\delta_{10} = \frac{1}{EA}\left(5\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}1333\cdot(-8{,}87-14{,}87) + 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}1333\cdot(-18{,}47-24{,}47)\right) +$$

$$+\frac{1}{EI}\left(\int_0^5\left(1-\frac{1}{10}x\right)\cdot(6{,}648x-0{,}8x^2)\,dx + \int_0^5\left(\frac{1}{10}x\right)\cdot(6{,}648x-0{,}8x^2)\,dx\right)$$

$$= 4{,}236\cdot 10^{-3}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EA}(4\cdot -4{,}5\cdot -1) = 6\cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}(10\cdot 0{,}1333^2) + \frac{1}{EI}\left(10\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^2\right) = 3{,}393\cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EA}(8\cdot(-1)^2) = 2{,}667\cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

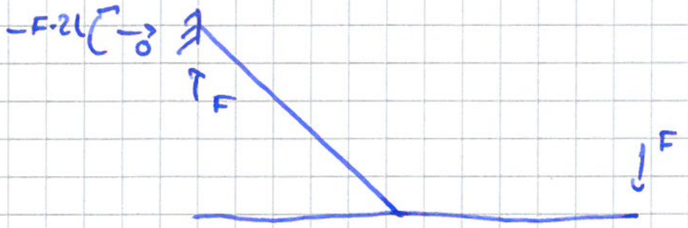
$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{bmatrix} \rightarrow \quad x_1 = -12{,}48 \qquad x_2 = -2{,}25$$

Verläufe auf Aufgabenblatt

⑥

a) $n = (4+0) - 3\cdot 1 = 1$-fach stat. unbestimmt

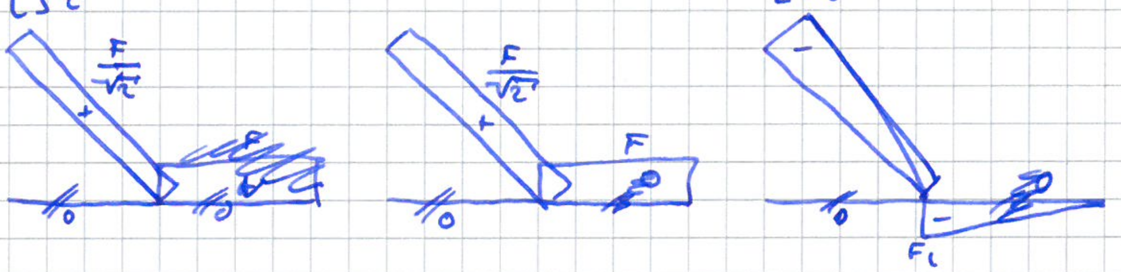
Stat. bestimmtes HS:



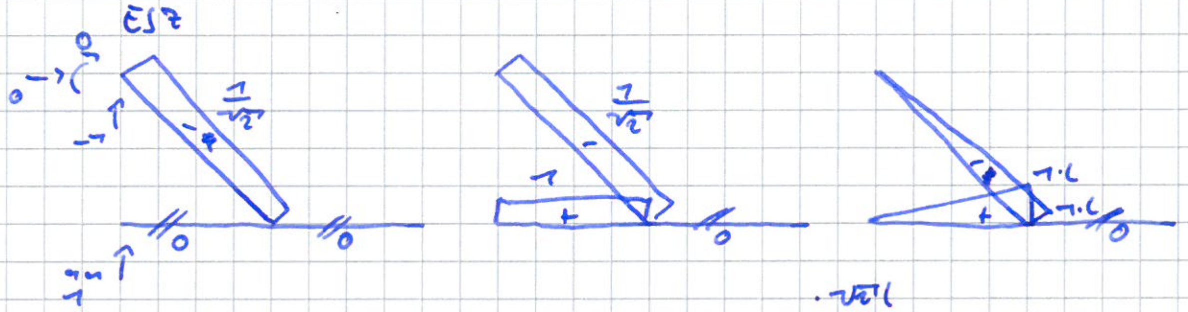
$n = (3+0) - 3\cdot 1 = 0$ ✓

kin. und stat. bestimmt.

LSZ



ESZ



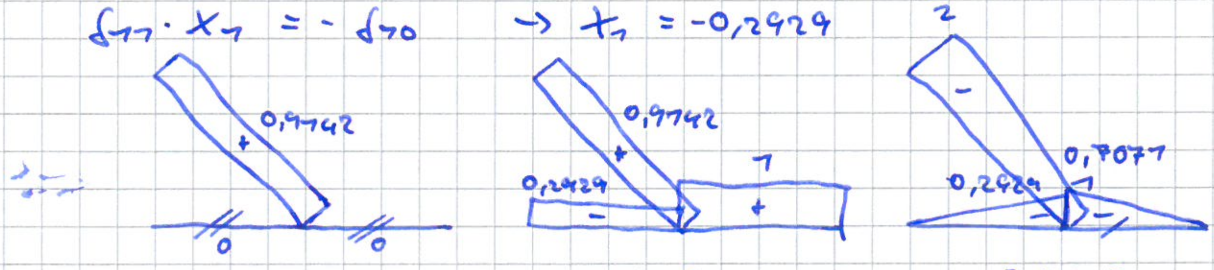
$$\delta_{10} = \frac{1}{EA}\left(-\sqrt{2}\cdot l\cdot \frac{F}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}\cdot(-1l)\cdot(2\cdot(-F\cdot l) + 2F\cdot l)\right) \quad \cdot\sqrt{2}\,l$$

$$= 0{,}7071\ \frac{Fl}{EA}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}\left(\sqrt{2}\cdot l\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + \frac{1}{EI}\left(\sqrt{2}\cdot l\cdot\frac{1}{3}\cdot(-1\cdot l)^2 + l\cdot\frac{1}{3}\cdot(1)^2\right)$$

$$= 2{,}474\ \frac{l}{EA}$$

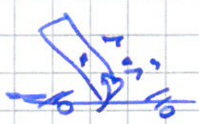
$$\delta_{11}\cdot X_1 = -\delta_{10} \quad \rightarrow \quad X_1 = -0{,}2929$$



N [F] Q [F] M [Fl]

c) $"1"\cdot w = \frac{1}{EA}\left(\sqrt{2}\,l\cdot 0{,}9742\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{EI}\left(-\sqrt{2}\cdot l\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot 1l\left((2\cdot 0{,}707 - 2) + (-2)(-0{,}707 - 4)\right)\right)\right)$

$= 2{,}086\ \frac{lF}{EA}$



$\varphi\cdot\ = -\frac{1}{EI}\left(-\sqrt{2}\,l\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot l\cdot(0{,}7077\cdot l + 2l)\right)\right)$

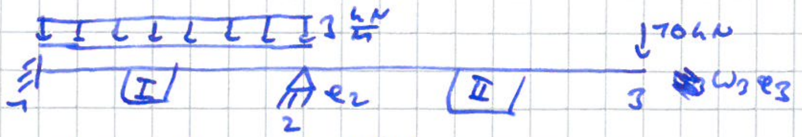
$= -4{,}067\ \frac{Fl}{EA}$

⑧

a) keine Momentenfeder weil $EI \to \infty$

keine Translationsfeder weil $EA \to \infty$

vereinfachtes System:



$$k_I^l = k_I^g = [\ ]^{6\times 6}$$

$$k_{II}^l = k_{II}^g = [\ ]^{6\times 6}$$

$$k_{red} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 6664 & 4998 & 1666 \\ 4998 & 9996 & 4998 \\ 1666 & 4998 & 3332 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_2 \\ \omega_3 \\ e_3 \end{array}$$

$$P_I^l = P_I^g = [\ ]^{6\times 1}$$

$$P_{II}^l = P_{II}^g = [\ ]^{6\times 1}$$

$$P_{red} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{red}\, V_{red} = P_{red} \quad \to \quad V_{red} = \begin{bmatrix} -2{,}926\cdot 10^{-3} \\ 6{,}928\cdot 10^{-3} \\ -8{,}929\cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

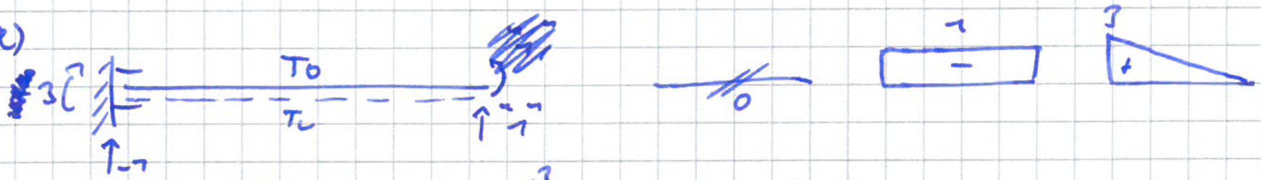
$$S_I^l = k_I^l V_I^l - P_I^l = \begin{bmatrix} 0 \\ 13{,}72 \\ -4{,}625 \\ 0 \\ -16{,}72 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$S_{II}^l = k_{II}^l V_{II}^l - P_{II}^l = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skizze auf Aufgabenblatt

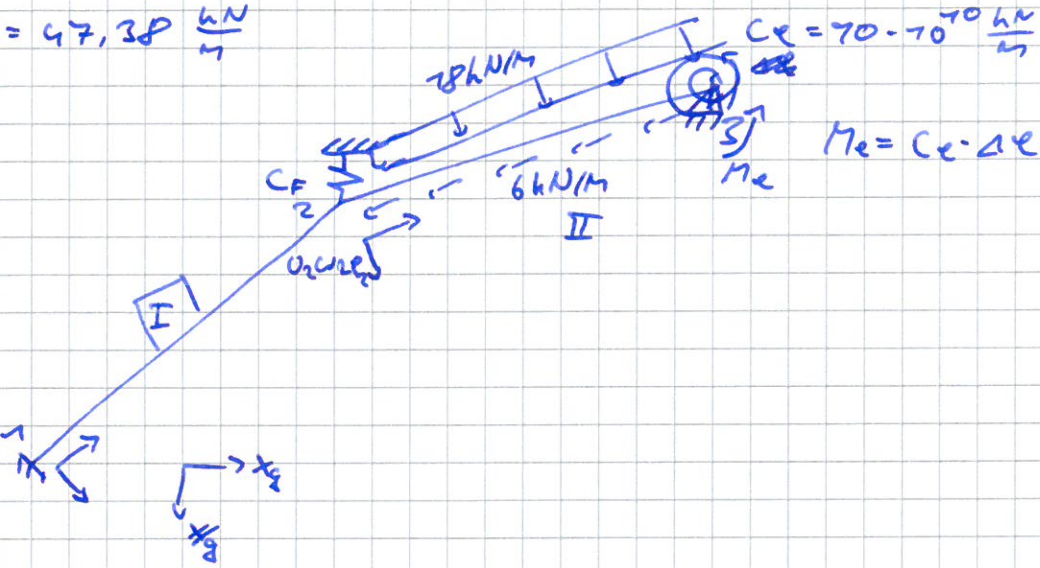
(1)

a)



$$\delta = \frac{1}{EA}\cdot 0 + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot(3)^2\right) + \int_0^3 \alpha_T \Delta T \cdot x\,dx \overset{!}{=} \frac{1}{C_F}$$

$C_F = 47,38\ \frac{kN}{m}$



$M_\varphi = C_\varphi \cdot \Delta\varphi = 2\cdot 10^{7}\ kNm$

b)

$k_I^g = T^T k_I^l T = [\ ]^{6\times 6}$

$k_{II}^g = \text{"} \quad \text{"} = [\ ]^{6\times 6}$

$$k_{red} = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cccc} 10780 & -5614 & +894,2 & -447,9 \\ -5614 & \overset{+47,38}{5485} & -102,1 & -1494 \\ +894,2 & -102,1 & 14010 & 3320 \\ -447,9 & -1494 & 3320 & \underset{+1010}{6647} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{array}$$

$P_I^g = T^T P_I^l = \cancel{[\ ]^{6\times 1}} = [0, 60, -60, 0, 60, \underset{\hookrightarrow +2\cdot 10^7}{60}]$

$$P_{red} = \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ -60 \\ 2\cdot 10^7 + 60 \end{bmatrix}$$

$$V_{red} = P_{red}\cdot k_{red}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,367\cdot 10^{-2} \\ 2,517\cdot 10^{-2} \\ -5,419\cdot 10^{-3} \\ 2\cdot 10^{-1} \end{bmatrix} \begin{array}{c} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{array}$$

$\cancel{\delta_I^{..} \; E k_{..} V_{..} - P_{..}}$ $\Big\{$

c) Siehe Aufgabenblatt

d) Mithilfe der Finite-Elemente-Methode

Bachelor of Science

Luft- und Raumfahrttechnik

Statik – PO 2019

Modulprüfung am 7. September 2021 (SS21)

Dauer: 120 min

Vorname: ____________ Nachname: ____________

Matrikelnummer: __ __ __ __ __ __ __ Unterschrift: ____________

Hilfsmittel:

- Taschenrechner (programmierbar, nicht kommunikationsfähig)
- Stifte, Papier, etc.
- Formelsammlung (ISD) mit Anmerkungen
- Integrationstabelle (ISD) mit Anmerkungen

Bearbeitungshinweise:

- Prüfen Sie die Klausur auf *Vollständigkeit*: Umschlagbogen A3, Klausuraufgaben, 4 Extrablätter
- Versehen Sie *unbedingt* jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Beginnen Sie *unbedingt* mit jeder neuen Aufgabe auch ein neues Blatt.
- Beschreiben Sie die Blätter nur *einseitig.*
- Die Verwendung *grüner* und *roter* Farbstifte ist *unzulässig.*
- Dokumentieren Sie Ihre Lösungen mit *nachvollziehbarem Rechenweg.*

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	6	7	6	6	24	14	24	13	100
erreicht									

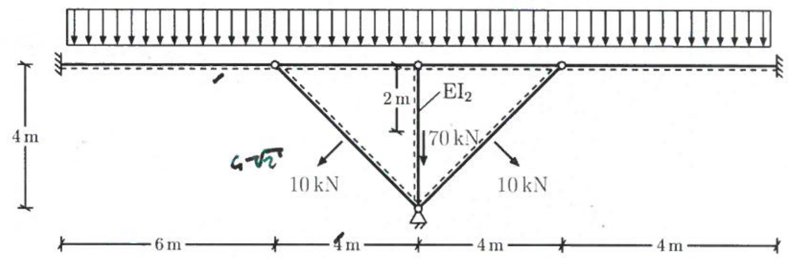
Aufgabe 5 (24 P.)

Gegeben ist eine symmetrische Struktur unter mechanischer Belastung. Die Struktur weist konstante Kennwerte EA und EI auf, lediglich für den Vertikalstab wird $EI_2 \to \infty$ angenommen. Beachten Sie, dass die Einzellasten in den schrägen Stützpfeilern jeweils mittig und senkrecht zum Balken angreifen, während die Last im vertikalen Balken um 2 m bezüglich des Gelenks nach unten versetzt ist.

a) Vereinfachen Sie die gegebene Struktur unter Ausnutzung der Symmetrie- und Antimetriebedingungen!

b) Geben Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit an (vereinfachtes System!) und konstruieren Sie ein statisch bestimmtes Hauptsystem!

c) Bestimmen Sie die Zustandslinien für Normalkraft, Querkraft und Moment und stellen Sie deren Verläufe dar! Nutzen Sie dazu den beiliegenden Vordruck.



Gegeben: $EA = 30\,000\,\text{kN}$ $EI = 10\,000\,\text{kN}\,\text{m}^2$ $EI_2 \to \infty$

Aufgabe 6

(14 P.)

Gegeben ist ein schräger Kragbalken, welcher im Punkt P mittels eines normal angebrachten Balkens der Länge l gestützt wird. Das gesamte System wird mittels einer Einzellast F belastet.

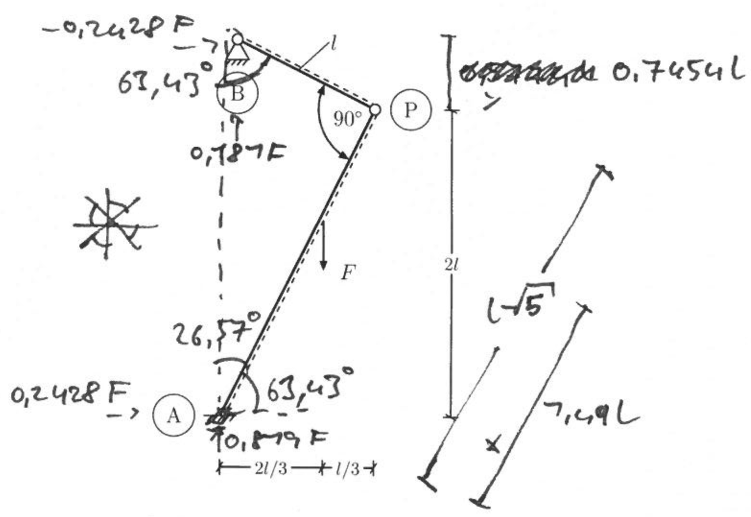
a) Bestimmen Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit und konstruieren Sie ein statisch bestimmtes Hauptsystem!

b) Geben Sie die Zustandslinien für Normalkraft, Querkraft und Moment an! Nutzen Sie dazu den beiliegenden Vordruck.

c) Bestimmen Sie die vertikale Verschiebung des Punktes P!

d) Bestimmen Sie die Längenänderung des Stabes $\overline{PB}$!

Hinweis:
Ersetzen Sie den Pendelstab durch eine Feder! Sollten Sie deren Steifigkeit nicht berechnen können, nehmen Sie $c = EI \cdot l$ an.



Gegeben: EA $\quad \mathrm{EI} = \frac{\mathrm{EA}\, l^2}{9}$ $\quad F$

Aufgabe 7

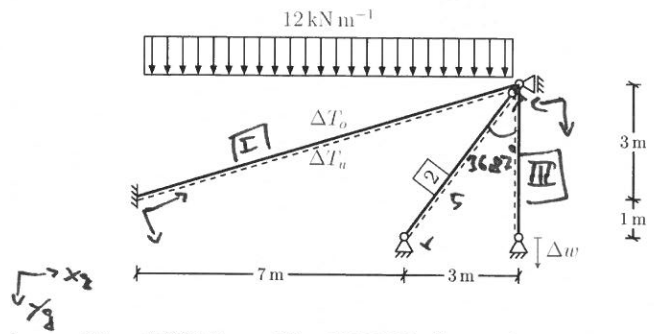
(24 P.)

Gegeben ist eine Struktur unter thermo-mechanischer Belastung sowie einer Absenkung Δw des linken Festlagers. Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben mittels des allgemeinen Weggrößenverfahrens (WGV).

a) Vereinfachen Sie das System, indem Sie Balken 2 durch eine geeignete Feder ersetzen!

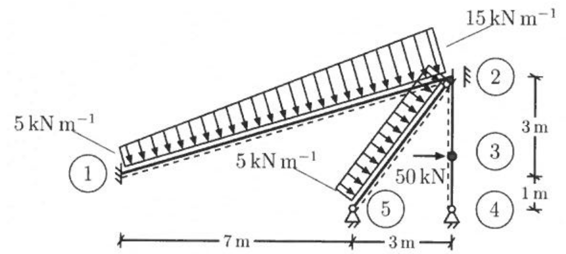
b) Bestimmen Sie alle unbekannten Verschiebungen des reduzierten Systems!

c) Bestimmen und skizzieren Sie Normalkraft, Querkraft und Moment im Balken 2!



Gegeben: $\mathrm{EA} = 45\,000\,\mathrm{kN}$ $\quad \mathrm{EI} = 10\,500\,\mathrm{kN\,m^2}$ $\quad h = 0{,}1\,\mathrm{m}$ $\quad \alpha_T = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$
$\Delta w = 0{,}015\,\mathrm{m}$ $\quad \Delta T_o = 25\,\mathrm{K}$ $\quad \Delta T_u = 5\,\mathrm{K}$

Im Rahmen einer Vorauslegung wird das obige System modifiziert. Berechnungen ergaben die nachfolgenden Schnittkräfte in den Elementen 1 bis 4.



Element	1	2	3	4
Knoten A	1	2	3	5
Knoten B	2	3	4	2

$s_1^l = [4{,}8;\ -42{,}2;\ 83{,}9;\ -4{,}8;\ -62{,}2;\ -97{,}8]^T$
$s_2^l = [43{,}5;\ 20;\ 0;\ -43{,}5;\ -20;\ -48]^T$
$s_3^l = [43{,}5;\ -35;\ 48;\ -43{,}5;\ 35;\ 0]^T$
$s_4^l = [27{,}8;\ -12{,}5;\ 0;\ -27{,}8;\ -12{,}5;\ 0]^T$

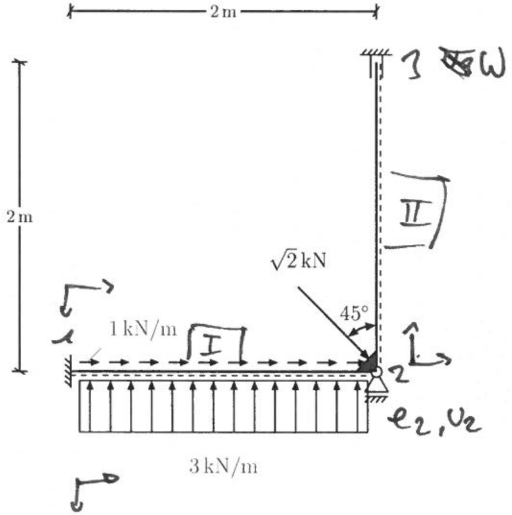
d) Stellen Sie alle Zustandslinien des Systems grafisch dar! Achten Sie auf qualitativ korrekte Verläufe und geben Sie den Funktionsgrad mit an. Nutzen Sie dazu den beiliegenden Vordruck.

e) Die gegebenen Schnittkräfte enthalten einen Fehler. Markieren Sie diesen in Ihren skizzierten Verläufen!

Aufgabe 8

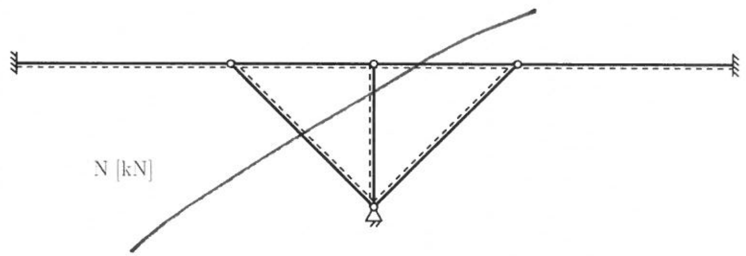
(13 P.)

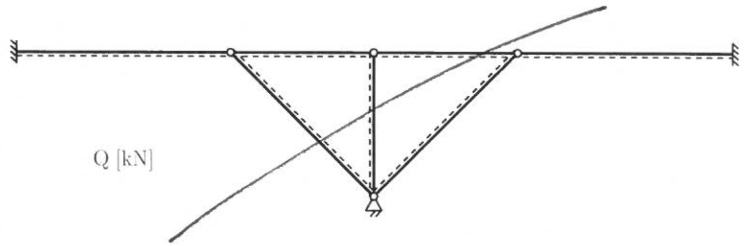
Gegeben ist das folgende statische System unter mechanischer Belastung. Berechnen Sie mit Hilfe des allgemeinen Weggrößenverfahrens (WGV) alle Zustandslinien des Systems und stellen Sie diese grafisch dar! Nutzen Sie dazu den beiliegenden Vordruck.

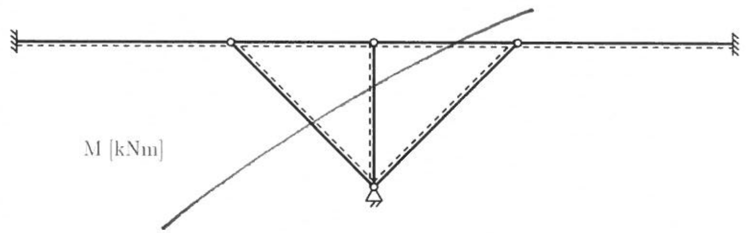


Gegeben: $EA = 4{,}25 \cdot 10^4\,\mathrm{kN}$ $\quad EI = 833\,\mathrm{kN\,m^2}$

Zustandslinien Aufgabe 5







Name: ____________________

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

Zustandslinien Aufgabe 6

N [kN]

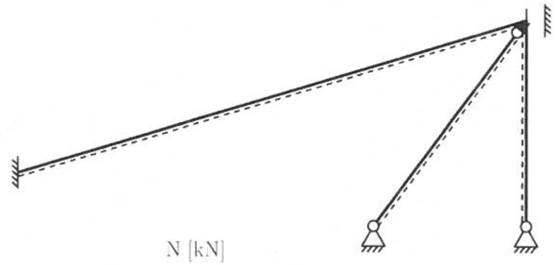
Q [kN]

M [kN m]

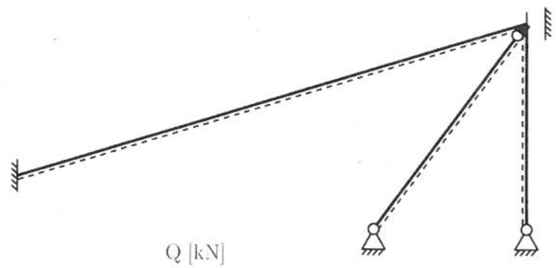
Name: ____________________

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

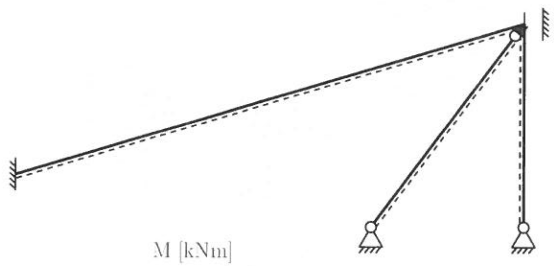
Zustandslinien Aufgabe 7



N [kN]



Q [kN]

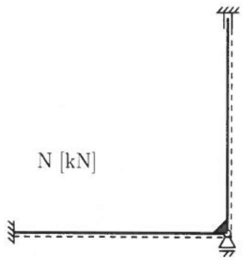


M [kNm]

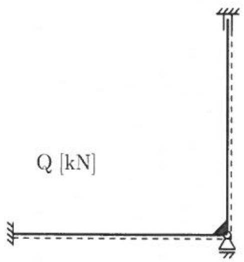
Name: ____________________
Matrikelnummer: __ __ __ __ __ __ __

Zustandslinien Aufgabe 8

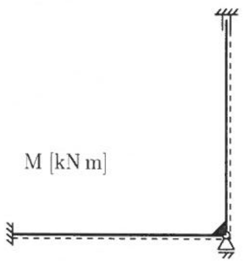
N [kN]



Q [kN]

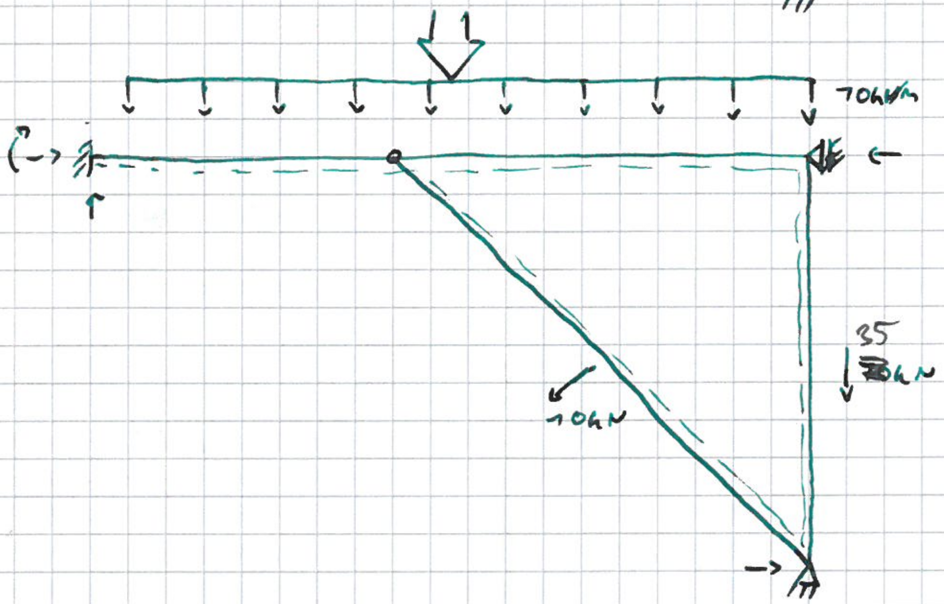


M [kN m]



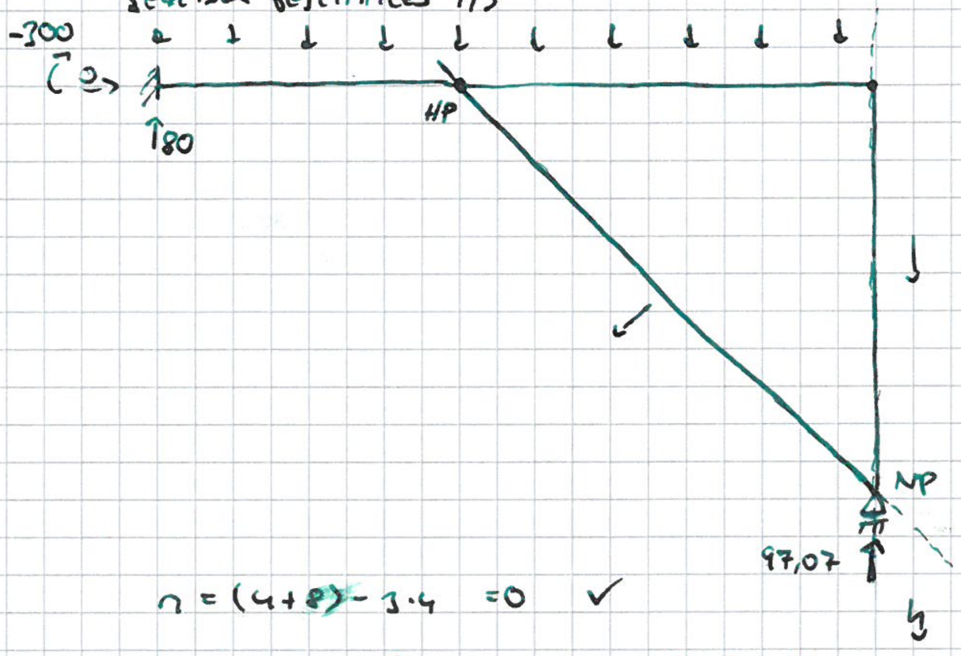
5

a) Symmetrie nutzen



b) $n = (6+8) - 3 \cdot 4 = 2$ - fach statisch unbestimmt

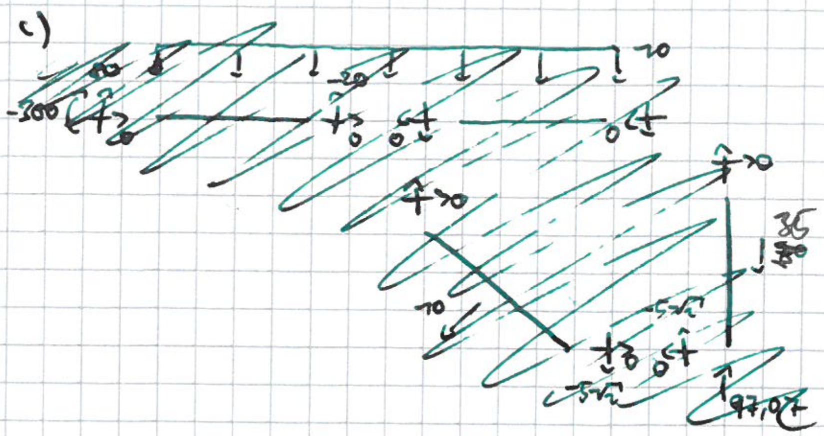
Statisch bestimmtes HS

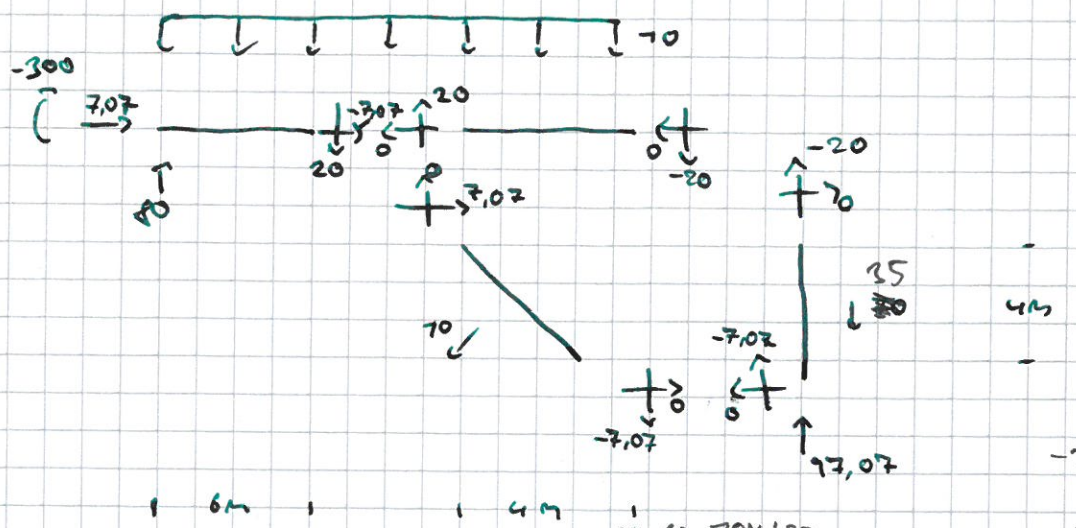


$n = (4+8) - 3 \cdot 4 = 0$ ✓

Wiederspr. im Polplan → kin. bestimmt.

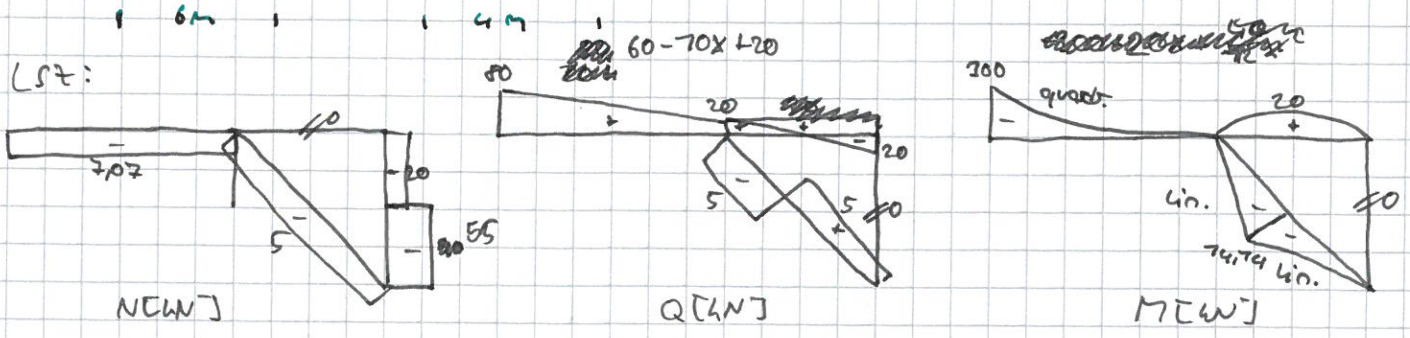
c)





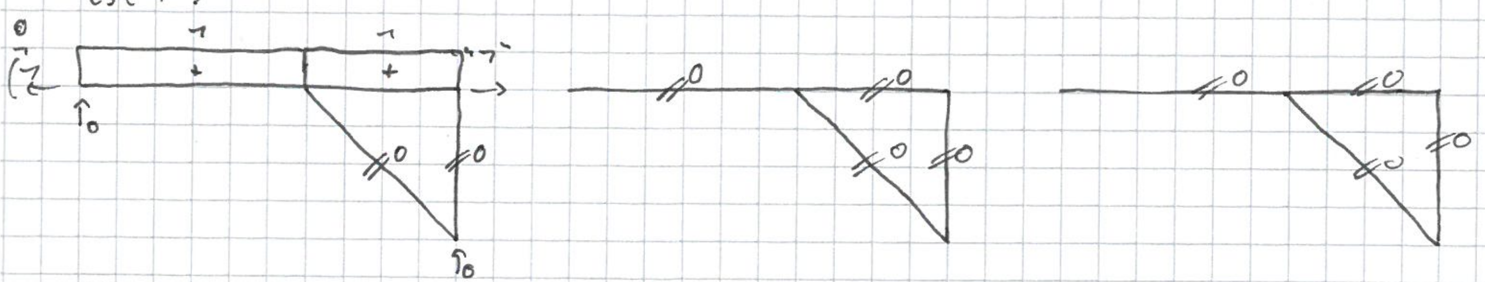
$-300+80x-5x^2$

LSZ:

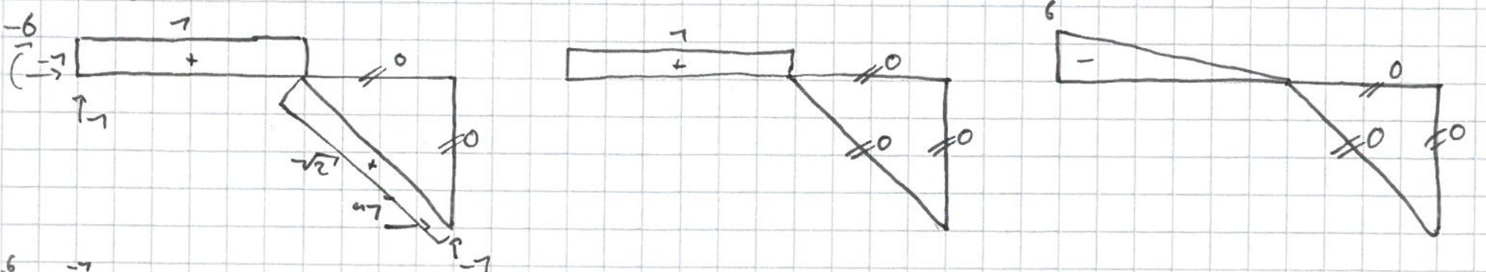


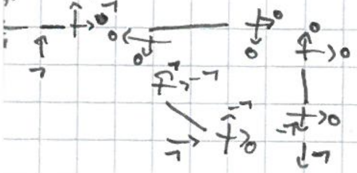
Lösung anders an vereinzelten Stellen... Fehler in Lösung?

ESZ 1:



ESZ 2:





Statik H21

$$\delta_{01} = \frac{1}{EA}\left(6\cdot(-7{,}07)\cdot 1\right) + \frac{1}{EI}\left(\int_0^6 (-300+80x-5x^2)\cdot 0\,dx\right) = -1{,}414\cdot 10^{-3}$$

$$\delta_{02} = \frac{1}{EA}\left(6\cdot(-7{,}07)\cdot 1 + 4\sqrt{2}\cdot(-5)\cdot\sqrt{2}\right) + \frac{1}{EI}\left(\int_0^6 (-300+80x-5x^2)\cdot(-6+x)\,dx\right)$$

$$= 0{,}3033$$

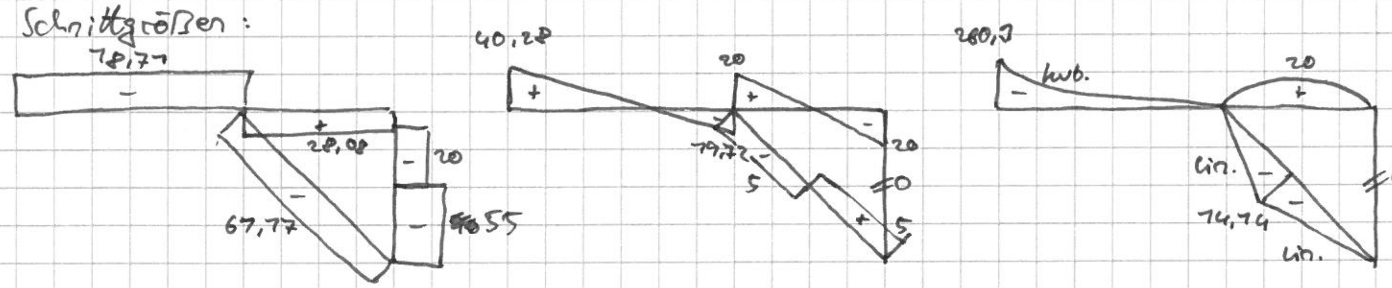
$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}\left(6\cdot 1^2 + 4\cdot 1^2\right) = 3{,}333\cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EA}\left(6\cdot 1^2 + 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}^2\right) + \frac{1}{EI}\left(6\cdot\frac{1}{3}\cdot(-6)^2\right) = 7{,}777\cdot 10^{-3}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EA}\left(6\cdot 1\cdot 1\right) = 2\cdot 10^{-4}$$

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{bmatrix} \rightarrow x_1 = 28{,}08\ ;\ x_2 = -39{,}72$$

Schnittgrößen:



N[kN] Symmetr. ergänzen

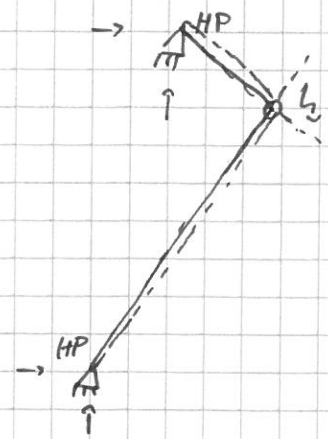
Q[kN] Antimetr. ergänzen

M[kNm] Symmetr. ergänzen

(6)

a) $n = (5+2) - 3\cdot 2 = 1$ - fach stat. unbestimmt

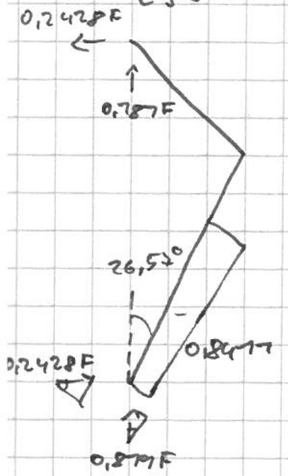
Stat. best. HS:

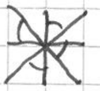


$n = (4+2) - 3\cdot 2 = 0$

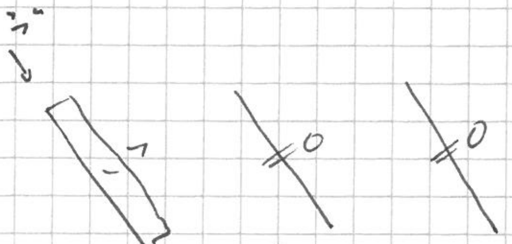
Wiedersp. in Polplan -> kin. bestimmt.

LSZ:

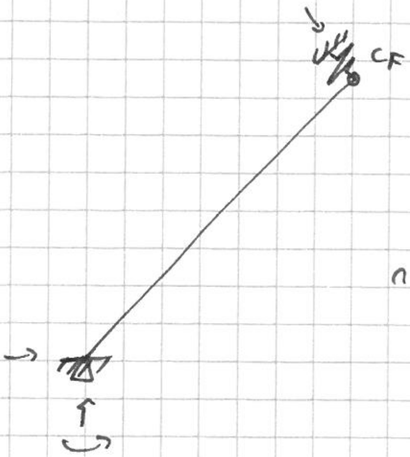




ϟ leichter zu lösen mit Momentenfeder...

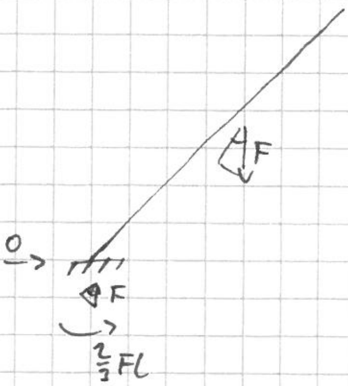


$\delta = \frac{1}{EA}\int_0^l (-1)(-1)\,dx = -\frac{l}{EA} \doteq \frac{l^2}{C_F}$



$n = (4+0) - 3\cdot 1 = 1$ -fach stat. unbestimmt

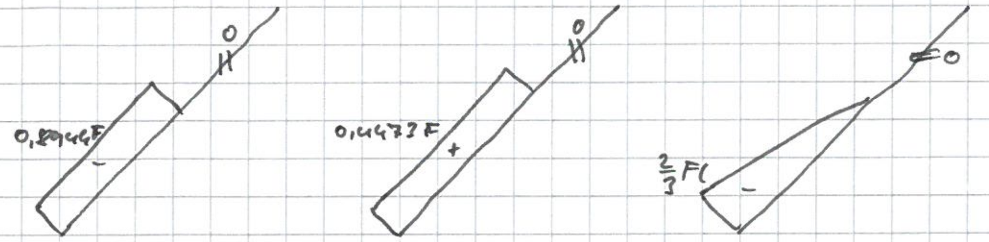
Statisch bestimmtes HS:

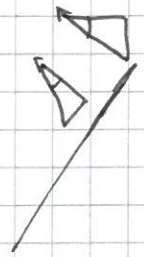


$n = (3+0) - 3\cdot 1 = 0$

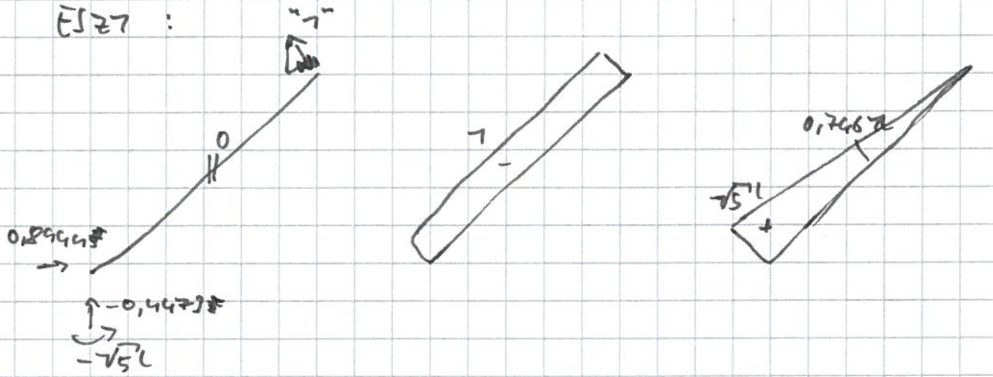
Stat. + kin. bestimmt.

LSZ :





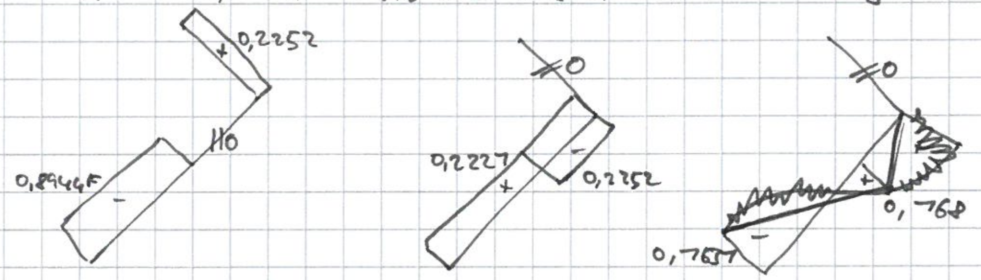
ESZ1 :



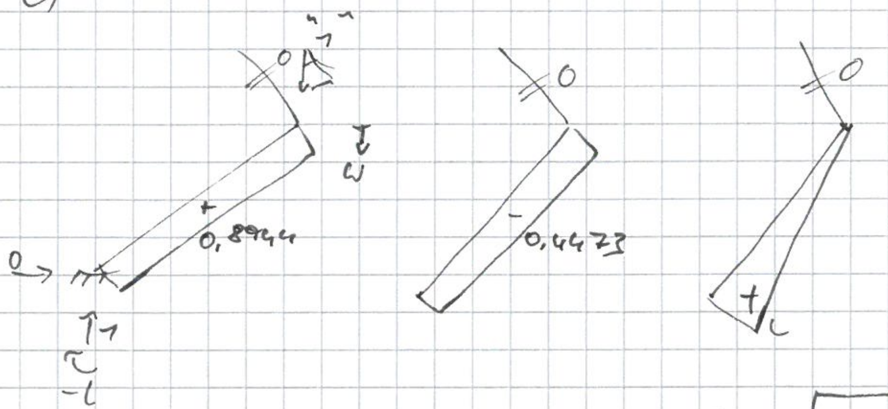
$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(1{,}49L\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}FL\left(-\sqrt{5}\cdot L + 2\cdot 0{,}7467L\right)\right)\right) = -\frac{FL}{EA}\, 5{,}535 \quad \text{(Anders als ML.)}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}(0) + \frac{1}{EI}\left(-\sqrt{5}L\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\sqrt{5}\cdot L\right)^2\right) + \frac{F^2}{C_V} = 34{,}54\,\frac{L}{EA}$$

$X = 0{,}1608 \rightarrow$ Ab hier mit $X = 0{,}2252$ weitergerechnet



c)



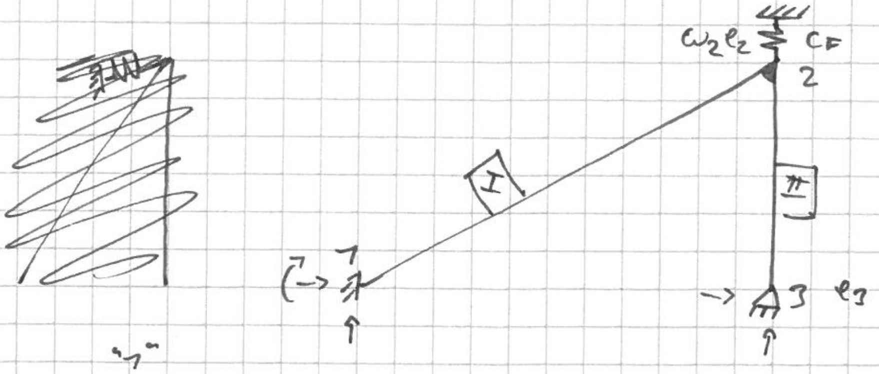
$$u = \frac{1}{EA}\left(1{,}49L\cdot(0{,}8944F)\cdot 0{,}8944\right) + \frac{1}{EI}\cdot\Big(\overbrace{-1{,}49L\cdot\frac{1}{6}\cdot 1{,}631\cdot\left(L-\left(L-\frac{1{,}49}{\sqrt{5}}L\right)\right)}^{\text{eig. als Integral}} +$$

$$+\ \frac{1}{3}\cdot\left(L-\frac{1{,}49}{\sqrt{5}}L\right)\cdot 0{,}168\Big) = -1{,}293\cdot\frac{FL}{EA}$$

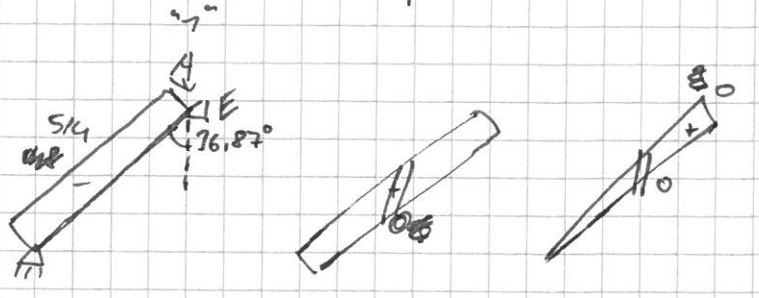
$$\Delta L = \frac{N}{C_F} = 0{,}2252\,\frac{FL}{EA}$$

⑦

a)



(In Lösung hier noch ω_3 ?!?)



$$f = \cancel{\dots} = \frac{1}{EA}\left(5\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)^2\right) \overset{!}{=} \frac{(\cancel{\dots})^2}{c_F}$$

$c_{F,1} = 5760 \frac{kN}{m}$

b)

Aufgabe übersprungen…

(8)

$k_I^l = k_{I}^g = [\;]^{6\times 6}$

$k_{II}^l = [\;]^{6\times 6} \Rightarrow k_{II}^g$ um $90°$ gedreht

$k_{red} =$

Institut für Statik und Dynamik
der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Tim Ricken

Bachelor of Science
Luft- und Raumfahrttechnik

Statik

Modulprüfung am 6. April 2021 (WS20/21)

Dauer: 120 min

Vorname: ______________ Nachname: ______________

Matrikelnummer: ______________ Unterschrift: ______________

Hilfsmittel:

- Stifte, Papier etc.
- ISD-Formelsammlungen mit Anmerkungen
- Taschenrechner

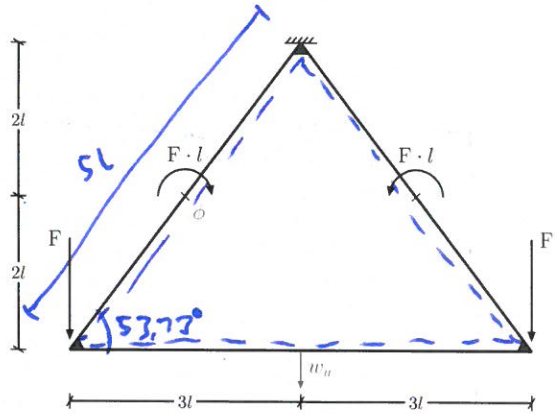
Bearbeitungshinweise:

- Versehen Sie *unbedingt* jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Beginnen Sie *unbedingt* mit jeder neuen Aufgabe auch ein neues Blatt.
- Beschreiben Sie die Blätter nur *einseitig*.
- Die Verwendung *grüner* und *roter* Farbstifte ist *unzulässig*.
- Dokumentieren Sie Ihre Lösungen mit *nachvollziehbarem Rechenweg*.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte	4	9	8	4	21.5	16	22.5	15	100
erreicht									

Aufgabe 5

(21.5 P.)



Gegeben: F, l, E, I, A

$$I = \frac{325}{432} \cdot l^2 \cdot A$$

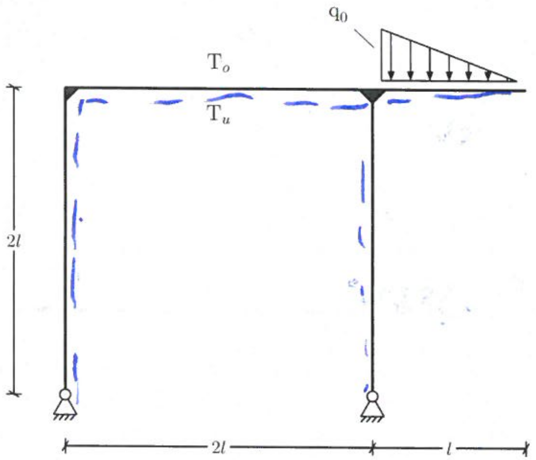
a) Berechnen Sie mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens (KGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!

b) Berechnen Sie außerdem die Absenkung unten in der Mitte w_u und die Verdrehung der Katheten in der Mitte ϕ, wo die freien Momente angreifen.

Name: ____________
Matrikelnummer: __ __ __ __ __ __ __ __

Aufgabe 6

(16 P.)



Gegeben:

$q_0 = 1\,\mathrm{kN/m}$
$l = 2\,\mathrm{m}$
$\alpha_T = 1 \times 10^{-5}\,1/\mathrm{T}$
$h = 0{,}1\,\mathrm{m}$
$T_o = 30\,\mathrm{K}$
$T_u = 10\,\mathrm{K}$
$EI = 1{,}75\,\mathrm{kNm}^2$
$EA = 2100\,\mathrm{kN}$

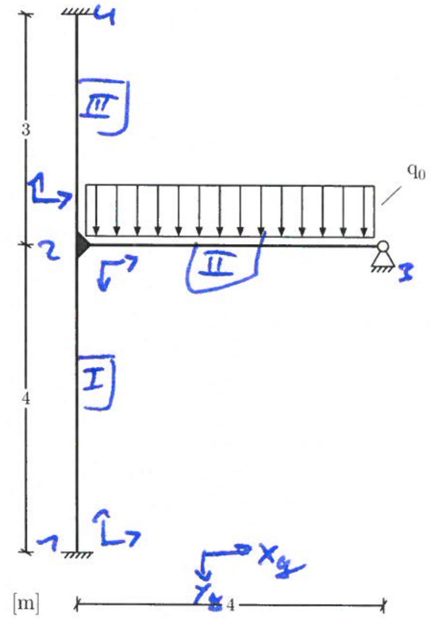
Berechnen Sie bitte mittels des Kraftgrößenverfahrens (KGV) die Zustandslinien (N, Q, M), die Lagerreaktionen und die Absenkung oben in der Mitte!

Name: ____________
Matrikelnummer: __ __ __ __ __ __ __ __

Aufgabe 7

(22.5 P.)

Gegeben ist das folgende statische System bei dem alle Balken die gleichen Materialparameter und die gleiche Querschnittgeometrie besitzen.



Gegeben:

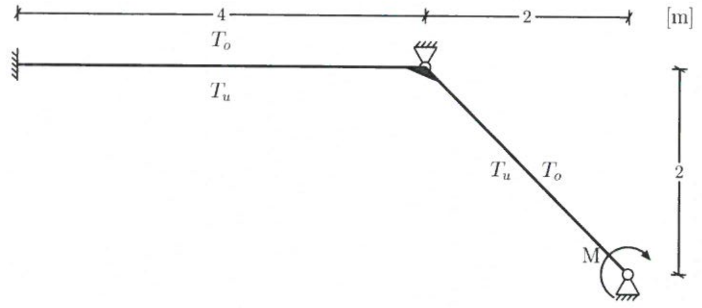
$EI = 620\,\mathrm{kNm}^2$
$EA = 7400\,\mathrm{kN}$
$q_0 = 4\,\mathrm{kN/m}$

Berechnen Sie mit Hilfe des Weggrößenverfahrens (WGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!

Aufgabe 8

(15 P.)

Gegeben ist das folgende statische System mit Temperaturbelastung im gesamten System und ein Moment im Festlager.



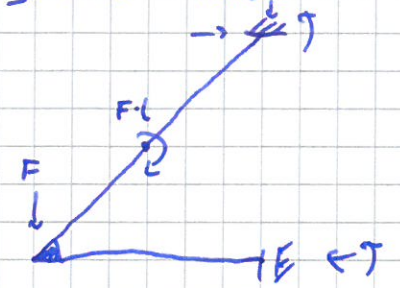
Gegeben:

$EI = 1000\,kNm^2$
$EA = 1{,}2 \times 10^4\,kN$
$T_o = 80\,K$
$T_u = 20\,K$
$h = 1\,m$
$\alpha_T = 5 \times 10^{-5}\,1/K$
$M = 5\,kNm$

Berechnen Sie mit Hilfe des Weggrößenverfahrens (WGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!

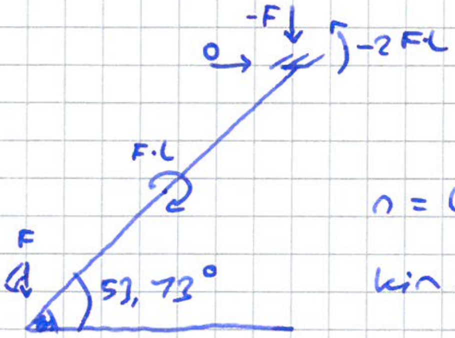
(5)

a) Symmetrie nutzen:



$n = (5+0) - 3\cdot 1) = 2$-fach stat. unbestimmt

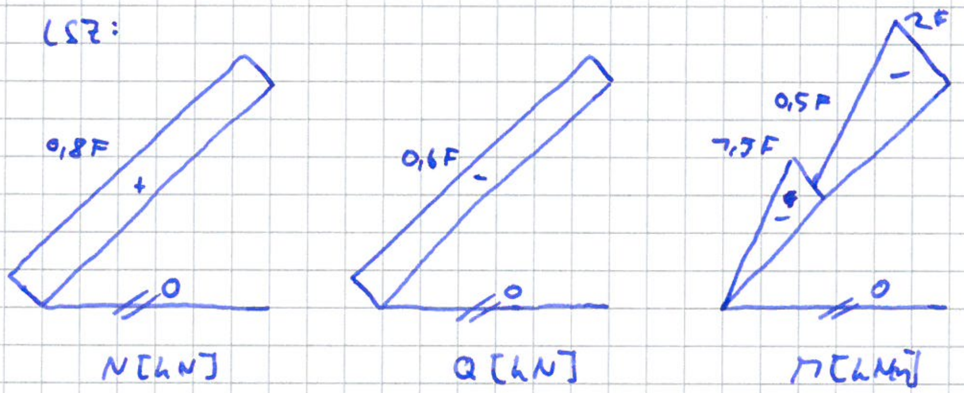
Statisch bestimmtes HS:



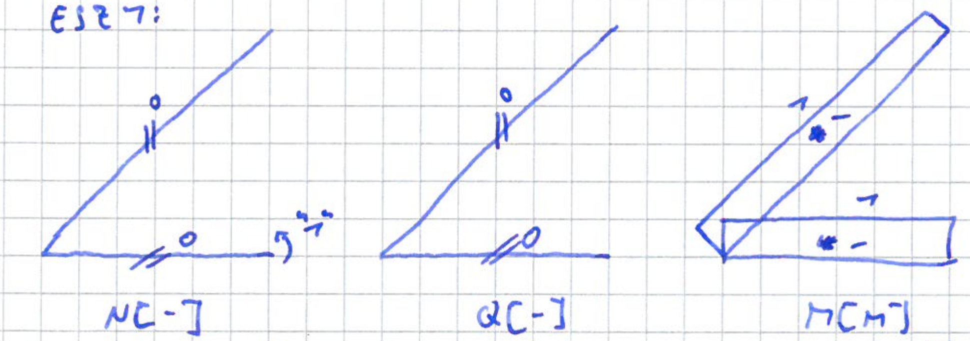
$n = (3+0) - 3\cdot 1 = 0$ ✓

kin. und stat. bestimmt.

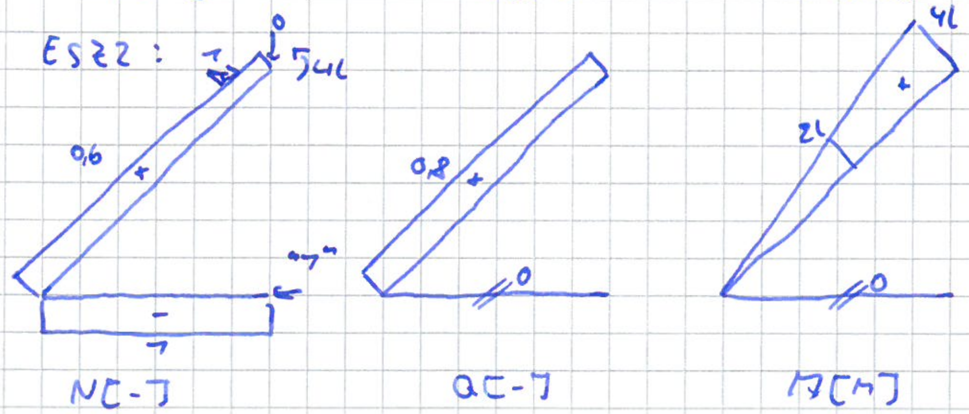
LSZ:



ESZ 1:



ESZ 2:



~~$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot(-1{,}5F)\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2(-0{,}5F + (-2F))\right) = \frac{1}{EA}\cdot 2\,(-6{,}646)$~~

~~$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\cdot(-2{,}5)\cdot 2{,}5 + \frac{1}{6}\right.$~~

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(2{,}5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1{,}5) + 2{,}5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-0{,}5-2)\right) = -\frac{1}{EA}\cdot 6{,}646$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EA}\left(5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6\right) + \frac{1}{EI}\left(2{,}5\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(-1{,}5) + 2{,}5\cdot\left(\frac{1}{6}\left(2(2\cdot(-0{,}5)-2)+4(-0{,}5+2\cdot(-4))\right)\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{EA}\cdot 14{,}22$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(5\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1\right) = \frac{1}{EA}\cdot 10{,}63$$

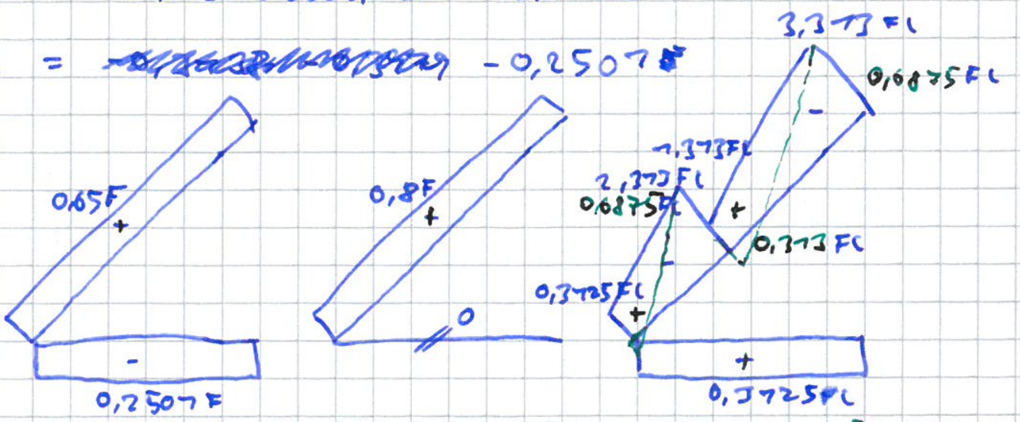
$$\delta_{22} = \frac{1}{EA}\left(5\cdot 0{,}6^2 + 3\cdot(-1)^2\right) + \frac{1}{EI}\left(\int_0^5 \left(\frac{4}{5}x\right)^2 dx\right) = \frac{1}{EA}\cdot 40{,}25$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \left(5\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\right)\frac{1}{EI} = \frac{1}{EA}\cdot 13{,}29$$

$$\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12}\\ \delta_{21} & \delta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\delta_{10}\\ \delta_{20}\end{bmatrix}$$

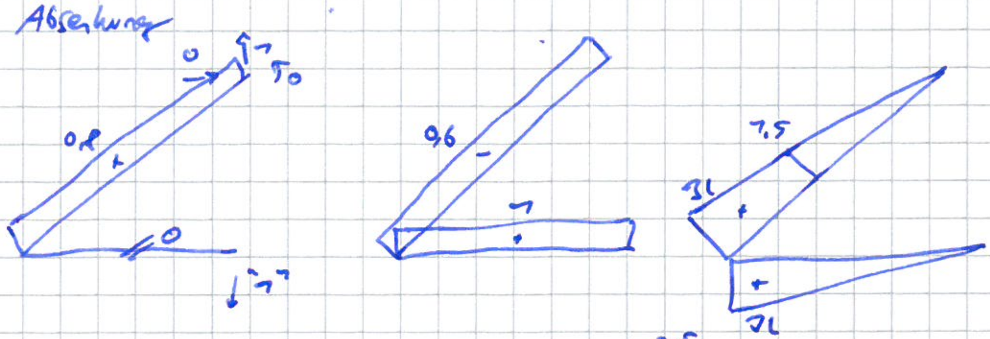
$X_1 = -0{,}3725$

$X_2 = -0{,}2507$



Vorzeichen stimmen nicht, weil δ_{10} und δ_{20} VZ übersehen, sonst richtig

Absenkung

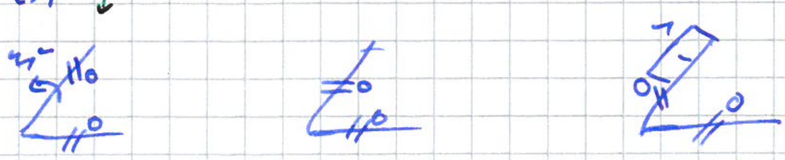


$$w_v = \frac{1}{EA}\left(5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}65F\right) + \frac{1}{EI}\cdot\left(\int_0^{2{,}5}\left(3-\frac{3}{5}x\right)\cdot\left(0{,}3725-\frac{1}{2{,}5}x\right)dx\right. +$$

$$+ \left.\int_0^{2{,}5}\left(1{,}5-\frac{3}{5}x\right)\cdot\left(0{,}313-\frac{1}{2{,}5}x\right)dx + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 3(-0{,}3725\,Fl\right)$$

$$= 3{,}432\,\frac{Fl}{EA}\ ↯$$

Verdrillung:

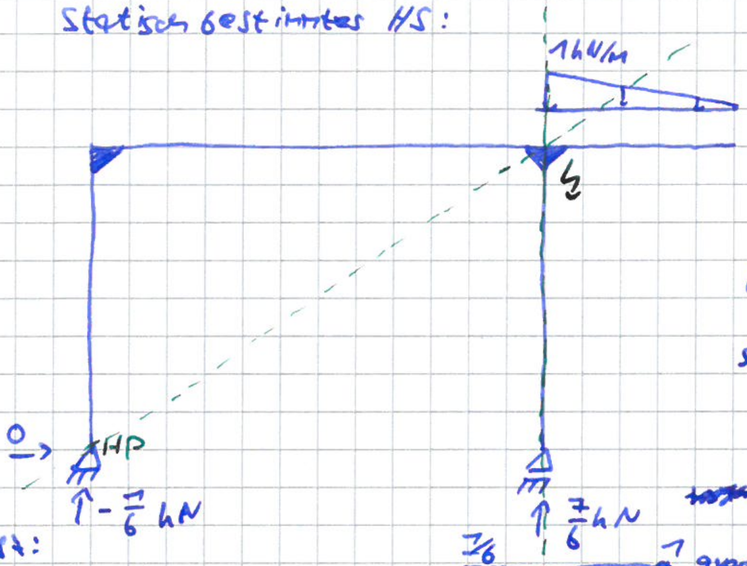


$$\varphi = \frac{1}{EI}\left(2{,}5\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(-0{,}787-0{,}6875)\right) = 1{,}453\,\frac{Fl}{EA}\ ↯$$

Vorzeichenfehler?

(6) $n = (4+0) - 3 \cdot 1 = 1$ fach stat. unbestimmt

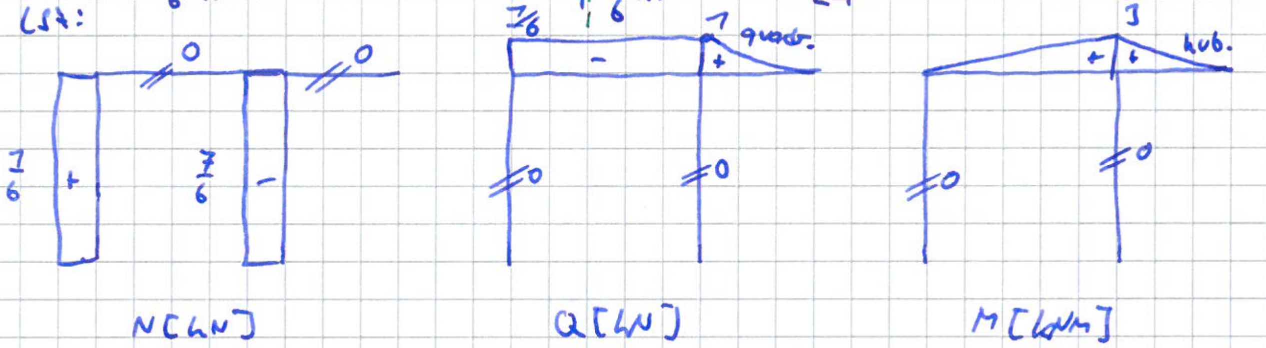
Statisch bestimmtes HS:



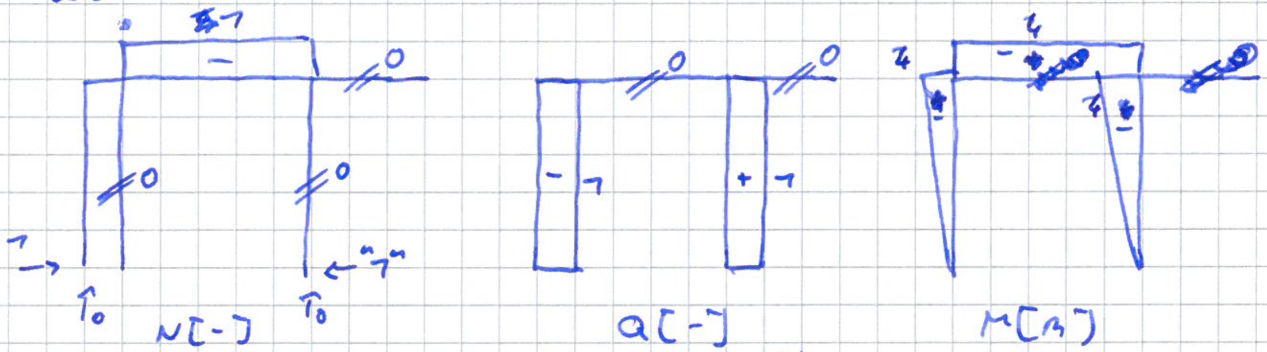
$n = (3+0) - 3 \cdot 1 = 0$

stat + kin. bestimmt ✓

LSZ:



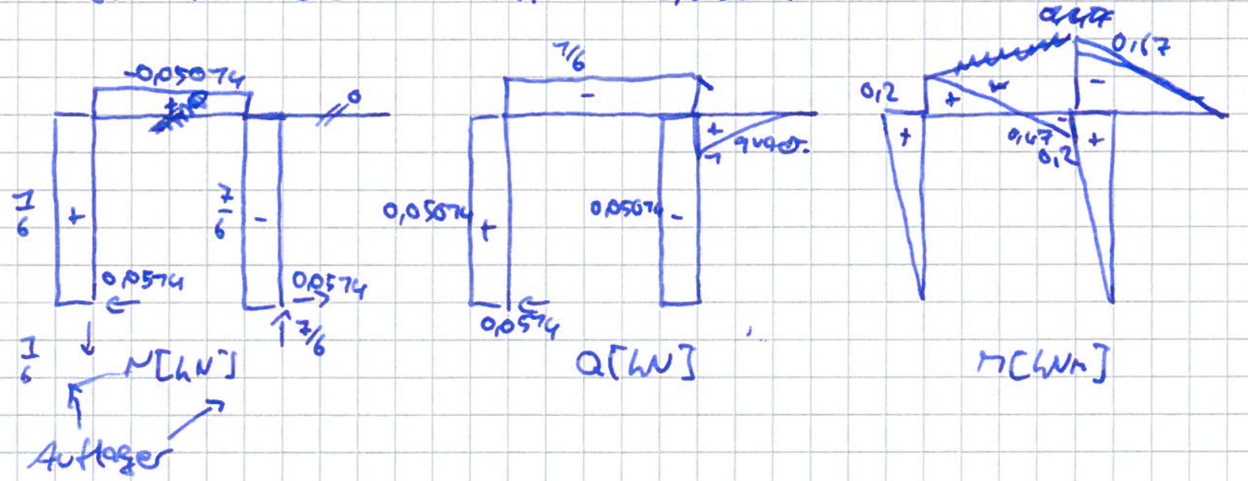
ESZ:



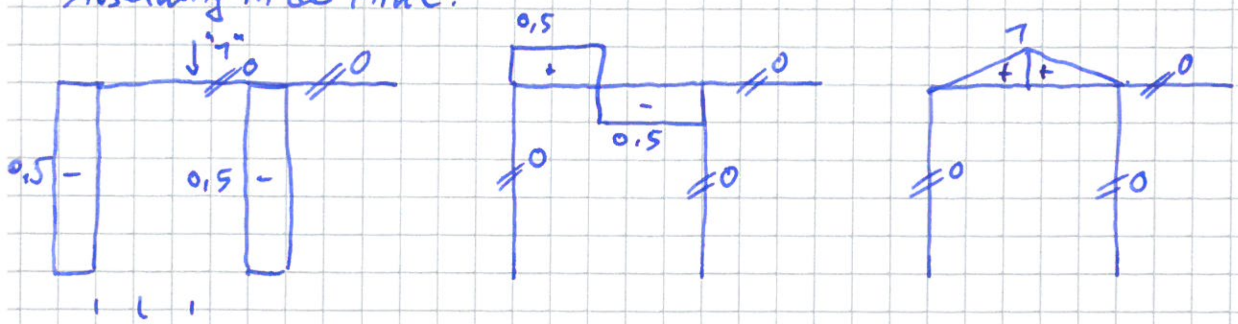
$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot \left(2 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\right) + \int_0^{2l} \alpha_T \Delta T \cdot (\cdot 1) = 3{,}056$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}\left(2 \cdot l \cdot (-1)^2\right) + \frac{1}{EI}\left(2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot (4)^2 + 2 \cdot l \cdot 4^2 + 2 \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot 4^2\right) = 60{,}95$$

$$-\delta_{11} \cdot x_1 = \delta_{10} \quad \rightarrow \quad x = -0{,}05074$$



Absenkung in der Mitte:

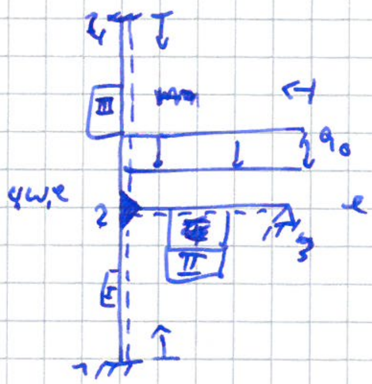


$$\omega = \frac{1}{EA}\left(4\cdot(-0{,}5)\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot(-0{,}5)\cdot\left(-\frac{7}{6}\right)\right) + \frac{1}{EI}\left(\int_0^{2}\left(\frac{1}{2}x\right)\left(0{,}2-\frac{0{,}335}{2}x\right)dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2}\left(1-\frac{1}{2}x\right)\left(-0{,}135-\frac{0{,}335}{2}x\right)dx\right)$$

$$= -0{,}1533\,m$$

(7) $n = (8+0) - 3\cdot 1 =$



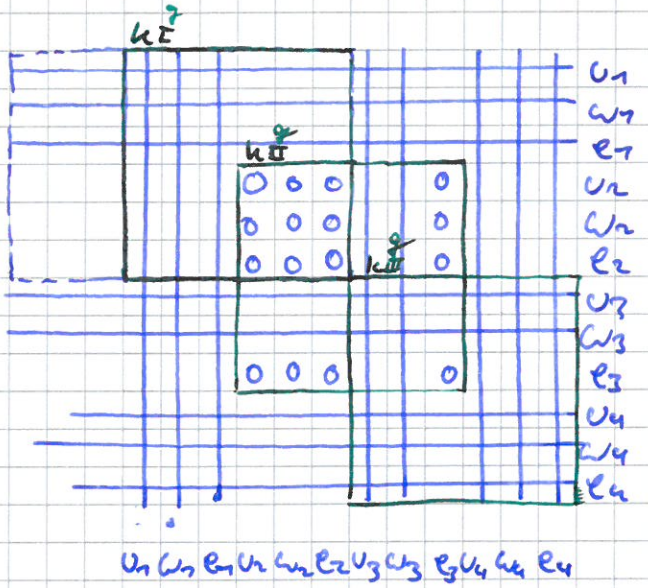
$u_{red} = (u_2, w_2, \varphi_2, \varphi_3)$

1850 + 2467

$k_I^l = k_I^g = [6\times 6]$ $\quad k_{II}^l = k_{II}^g = [6\times 6]$ $\quad k_{III}^l = k_{III}^g = [6\times 6]$

$$P_I^g = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1\\q_1\\m_1\\n_2\\q_2\\m_2 \end{matrix} \end{array} \qquad P_{II}^g = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} 0\\8\\-16/3\\0\\8\\16/3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_3\\q_3\\m_3\\n_2\\q_2\\m_2 \end{matrix} \end{array} \qquad P_{III}^g = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_4\\q_4\\m_4\\n_2\\q_2\\m_2 \end{matrix} \end{array}$$

$$k_{red} = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} 1850\cdot 2+2467 & 0 & 0 & \\ 0 & 176{,}3\cdot 2+275{,}6 & 232{,}5\cdot 2+473{,}3 & \\ 0 & 232{,}5\cdot 2+473{,}3 & 620\cdot 2+826{,}7 & \\ & & & 620 \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_2\\w_2\\\varphi_2\\\varphi_3 \end{matrix} \end{array}$$



$$k_{red} = \begin{array}{c} u_2 \\ w_2 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{bmatrix} 3700 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 232,6 & 0 & -232,5 \\ 0 & 0 & 1240 & 370 \\ 0 & -232,5 & 370 & 1446,7 \end{bmatrix}$$

Völlig anders wie in ML...

$$P_{red} = \left[0,\ 8,\ -\frac{16}{3},\ \frac{16}{3}\right]$$

$$k_{red} \cdot V_{red} = P_{red} \quad \rightarrow V_{red} = [0\ ;\ 4,729 \cdot 10^{-2}\ ;\ -1,526 \cdot 10^{-3}\ ;\ 1,29 \cdot 10^{-2}]$$

$$S_I^L = k_I^L V_I^L - P_I^L = [0\ ;\ -3,748\ ;\ 8,662\ ;\ 0\ ;\ 3,748\ ;\ 6,329]$$

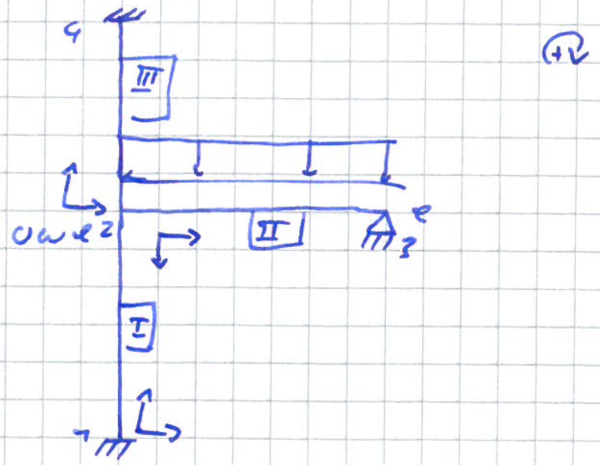
$$S_{II}^L = \text{"} \quad \text{"} = [0\ ;\ -3,752\ ;\ -6,329\ ;\ 0\ ;\ -11,25\ ;\ -10,66]$$

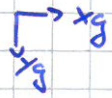
$$S_{III}^L = \text{"} \quad \text{"} = [0\ ;\ 16,14\ ;\ -25,77\ ;\ 0\ ;\ -16,14\ ;\ -22,66]$$

↯

Musterlösung und eigene Rechnung stimmen lt. Statiktool nicht...

(7)





$k_I^l \Rightarrow k_I^g = T^T k_I^l T \Rightarrow k_I^g = [\quad]^{6\times 6}$

$k_{II}^l = k_{II}^g \Rightarrow$ " " " $\Rightarrow k_{II}^g = [\quad]^{6\times 6}$

" " " " $k_{III}^g = [\quad]^{6\times 6}$

$$\begin{bmatrix} 116{,}3+1850 & 0 & 232{,}5 & 0 \\ 0 & 1850+116{,}3 & 0-232{,}5 & -232{,}5 \\ 232{,}5 & 0-232{,}5 & 620+620 & 310 \\ 0 & -232{,}5 & 310 & 620+826{,}7 \end{bmatrix} = k_{red}$$

$$k_{red} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1966 & 0 & 232{,}5 & 0 \\ 0 & 1966 & -232{,}5 & -232{,}5 \\ 232{,}5 & -232{,}5 & 1240 & 310 \\ 0 & -232{,}5 & 310 & 1447 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_2 \\ w_2 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

$P_I^l = P_I^g = [0]^{6\times 1} = P_{III}^l = P_{III}^g$

$$P_{II}^l = P_{II}^g = \begin{array}{cccccc} [0 & ;\ 8 & ;\ -\frac{16}{3} & ;\ 0 & ;\ 8 & ;\ \frac{16}{3}] \\ n_2 & q_2 & m_2 & n_3 & q_3 & m_3 \end{array}$$

$$P_{red} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -16/3 \\ 16/3 \end{bmatrix}$$

$$k_{red} \cdot V_{red} = P_{red} \quad \rightarrow \quad V_{red} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 5{,}905 \cdot 10^{-4} \\ 4{,}119 \cdot 10^{-3} \\ 4{,}994 \cdot 10^{-3} \\ 5{,}419 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_1 \\ \omega_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array}$$

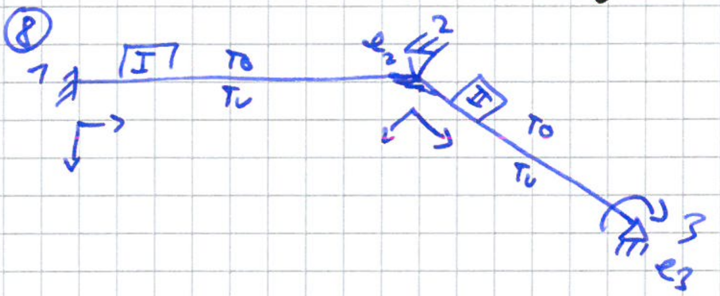
$$S_I^l = k_I^l V_I^l - P_I^l = [-1{,}1 \;;\; -1{,}6 \;;\; 2{,}5 \;;\; 1{,}1 \;;\; 1{,}6 \;;\; 4{,}1]$$

$$S_{II}^l = [1{,}1 \;;\; -9{,}9 \;;\; 9{,}2 \;;\; -1{,}1 \;;\; -6{,}1 \;;\; -1{,}4]$$

$$S_{III}^l = [1{,}5 \;;\; -9{,}3 \;;\; 2{,}4 \;;\; -1{,}5 \;;\; 9{,}3 \;;\; 3{,}6]$$

↯

8



$$k_{red} = \begin{bmatrix} 2414 & 707{,}1 \\ 707{,}1 & 1414 \end{bmatrix}$$

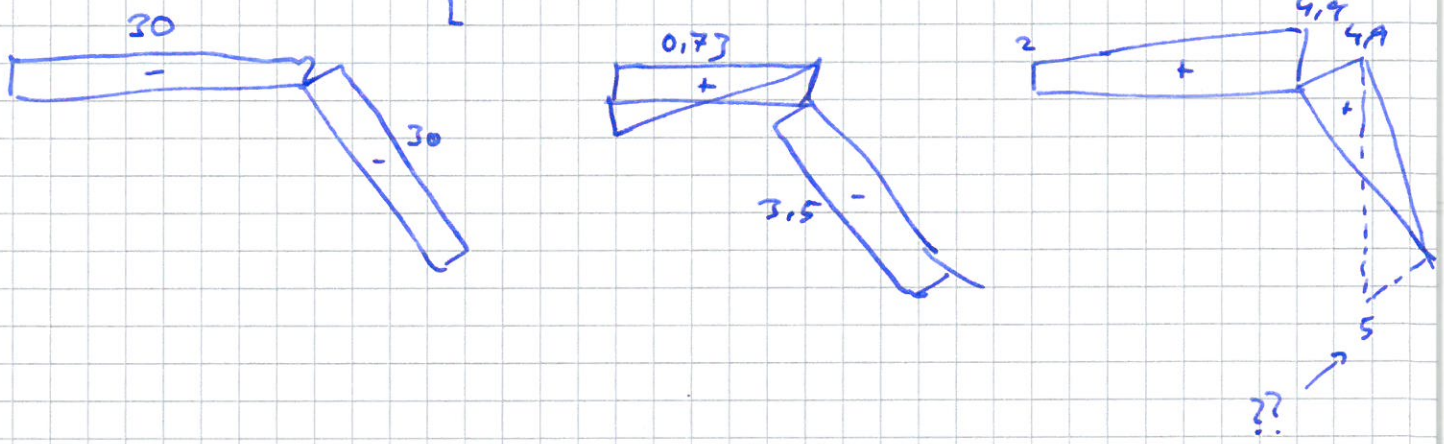
$$P_I^g = P_I^l = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 3 \\ 30 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad P_{II}^l = \begin{bmatrix} -30 \\ 0 \\ 3 \\ 30 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad P_{II}^g = \begin{bmatrix} -21{,}21 \\ -21{,}21 \\ 3 \\ 21{,}21 \\ 21{,}21 \\ -8 \end{bmatrix}$$

mit Moment

$$P_{red} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$k_{red} \cdot V_{red} = P_{red} \quad \rightarrow \quad V_{red} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 1{,}942 \cdot 10^{-3} \\ -6{,}629 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} & \begin{matrix} e_2 \\ e_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$S_I^l = k_I^l V_I^l - P_I^l = \begin{bmatrix} 30 \\ -0{,}73 \\ -2 \\ -30 \\ +0{,}73 \\ 4{,}9 \end{bmatrix} \qquad S_{II}^l = \begin{bmatrix} 30 \\ 3{,}5 \\ -4{,}9 \\ -30 \\ -3{,}5 \\ -0 \end{bmatrix}$$



UNIVERSITÄT STUTTGART

Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen

Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing. T. Ricken

Bachelor of Science Luft- und Raumfahrttechnik
Modulprüfung Statik (VL Ricken/Bartel)
– Kernmodul –

Herbst 2020 – Grundlagen- und Aufgabenteil –

Zeit: 120 Minuten
Hilfsmittel: programmierbarer Taschenrechner, Ilias-Formelsammlungen

Punkteverteilung	
Aufgaben 1–2	
Aufgaben 3–4	
Aufgabe 5	
Aufgabe 6	
Total	

Bearbeitungshinweise – v.a. für die Aufgaben 5 und 6:

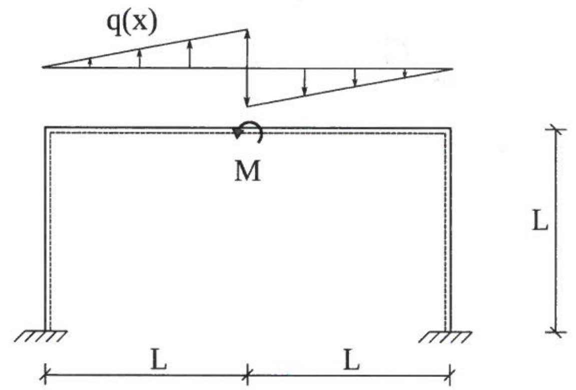
- Versehen Sie **unbedingt** jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Beginnen Sie **unbedingt** mit jeder neuen Aufgabe auch ein neues Blatt.
- Beschreiben Sie die Blätter nur **einseitig**.
- Nummerieren Sie die Blätter.
- Die Verwendung von **grünen** Farbstiften ist **unzulässig**.

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe 5a: (20 Punkte) (KGV)

Die Struktur, bestehend aus Balken gleichen Materials und Querschnitts, wird wie angezeigt belastet.



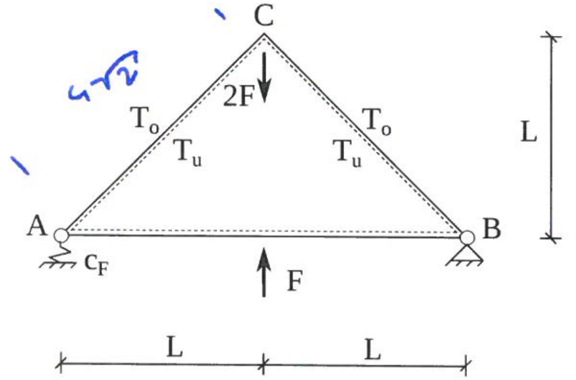
Gegeben:
EI ist konstant,
$EA = GA = GI_T \to \infty$,
L = 3 m,
q(x) = -10/3*x kN/m für x $\leq$ 3 m (Rest entsprechend),
M = 20 kNm

- Berechnen Sie mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens (KGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!
- Wie groß ist die tatsächliche Querkraft in der Mitte des horizontalen Trägers? Und in welche Richtung wirkt sie?
- Berechnen Sie bitte außerdem die Verdrehungen am linken oberen Eck und oben in der Mitte. Wie groß ist die Absenkung oben in der Mitte?

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaften aus!

Aufgabe 5b: (17,5 Punkte) (KGV)

Das folgende statische System, bei dem alle Balken die gleichen Materialparameter und die gleiche Querschnittsgeometrie besitzen, soll berechnet werden.



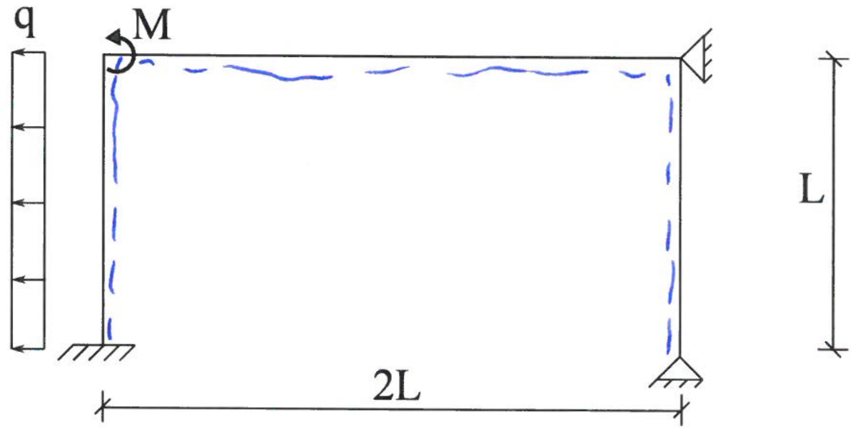
Gegeben:
$EI = 10\,000\,kNm^2$,
$EA = GA = GI_T \to \infty$,
$L = 4\,m$,
$F = 20\,kN$,
$c_F = 50\,000\,kN/m$,
$T_u - T_o = 30\,K$,
$h = 0,1\,m$,
$\alpha_T = 10^{-5}\,1/K$

Berechnen Sie mit Hilfe des Reduktionssatzes die Absenkung der Spitze und die Einfederung im Lager A.

Hinweis: Hier genügt es nur Momentenverläufe zu bestimmen.

Aufgabe 6a: (20 Punkte) (WGV)

Gegeben ist das folgende statische System, bei dem alle Balken die gleichen Materialparameter und die gleiche Querschnittsgeometrie besitzen.

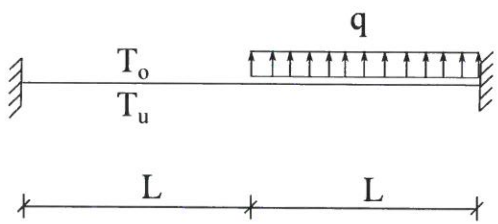


Gegeben:
$EI = 1000\,kNm^2$,
$EA \to \infty$,
$L = 2\,m$,
$q = 10\,kN/m$,
$M = 20\,kNm$

Berechnen Sie mit Hilfe des Weggrößenverfahrens (WGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!

Aufgabe 6b: (17,5 Punkte) (WGV)

Gegeben ist das folgende statische System mit Temperaturbelastung im Bereich $[0, 5]$ und einer Streckenlast q in der anderen Hälfte der Struktur.

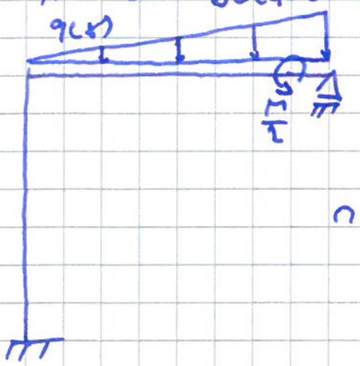


Gegeben:
$L = 5\,m$,
$EI = 10^5\,kNm^2$,
$EA = 10^4\,kN$,
$q = 10\,kN/m$,
$T_o = 90\,K$,
$T_u = 60\,K$,
$h = 0,1\,m$,
$\alpha_T = 10^{-4}\,1/K$

Berechnen Sie mit Hilfe des Weggrößenverfahrens (WGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!

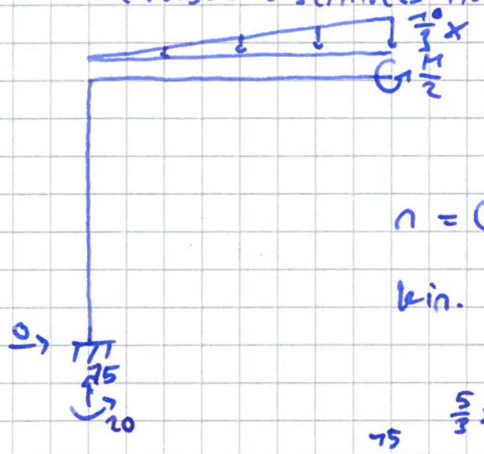
(5)

a) Antimetr. Belastung, Symmetr. System



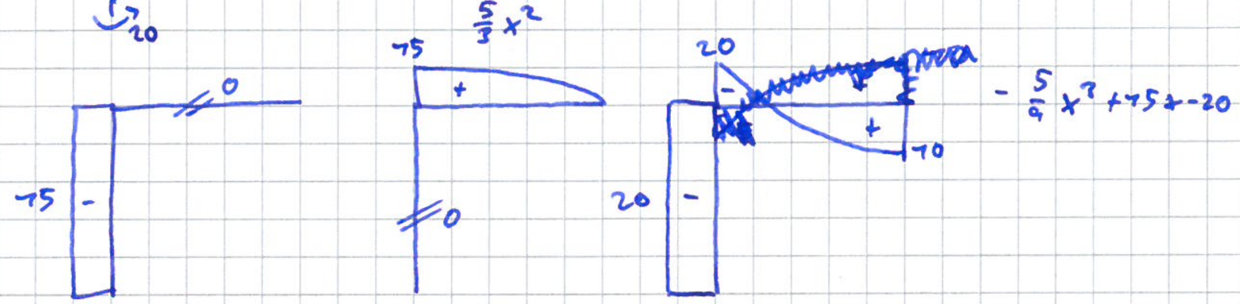
$n = (4+0) - 3 \cdot 1 = 1$-fach stat. unbestimmt

Statisch bestimmtes HS:

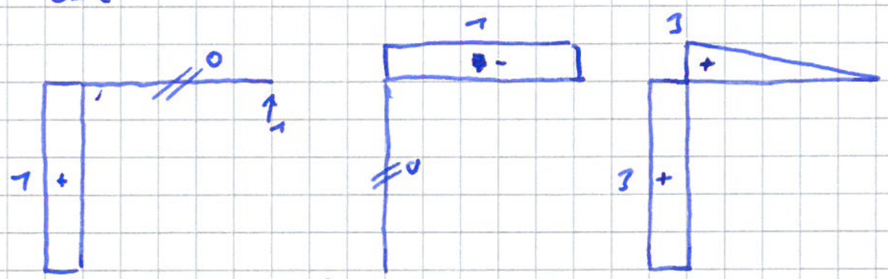


$n = (3+0) - 3 \cdot 1 = 0$ ✓

kin. bestimmt



ESZ



$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(\int_0^3 \left(-\frac{5}{9}x^3 + 15x - 20\right) \cdot (3 - x)\, dx + 3 \cdot 20 \cdot (-3) \right)$$

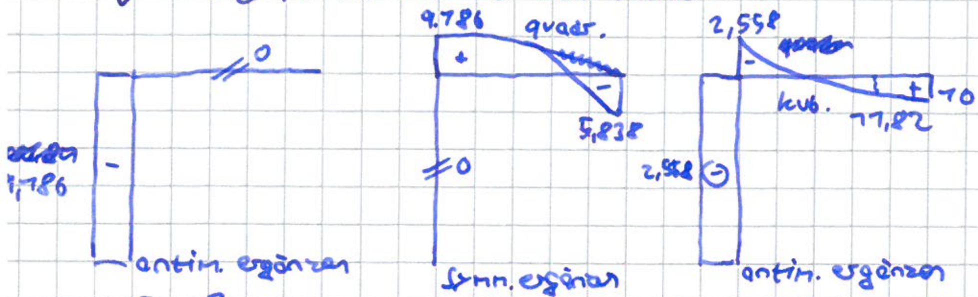
$$= \frac{1}{EI} \cdot (-209{,}3)$$

$$\delta_{11} = \left(\frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 3\right) \cdot \frac{1}{EI}$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot (36)$$

$$\delta_{10} = -\delta_{11} \cdot X \quad \rightarrow \quad X = 5{,}813$$

4) Verläufe in M stimmen nicht



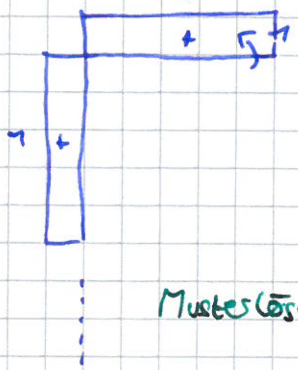
$-\frac{5}{9}x^3 + 15x - 20 + (5{,}873 \cdot (3 - x)) = f(x)$

$f'(x) = 9{,}787 - 1{,}667x^2$

$f'(x) = 0$ bei $x = 2{,}348$ -> dort max. Belastung

$f(x = 2{,}348) = 11{,}82\ kN$

Querkraftverlauf wird symmetr. ergänzt -> Querkraft in Mitte des Balkens beträgt $-5{,}828\ kN$ (nach oben)

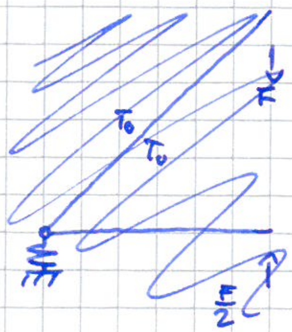


$$\varphi = \frac{1}{EI}\left(\int_0^3 (-\frac{5}{9}x^2 + 15x - 20) \cdot 1\,dx + 3 \cdot 1 \cdot (-2{,}558)\right)$$
$(+5{,}873(3-x))$

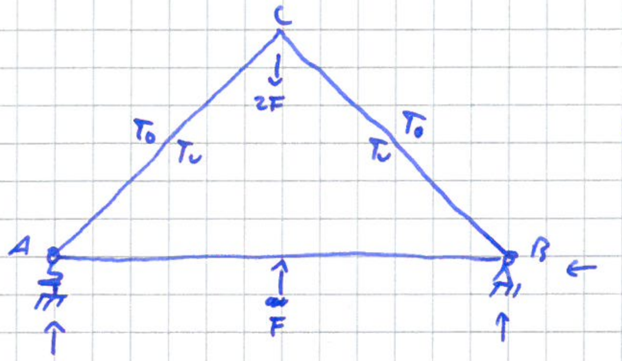
$= \frac{1}{EI} \cdot 14{,}73$

Musterlösung hier nicht mehr brauchbar

~~b)2 Symmetrie ansetzen:~~

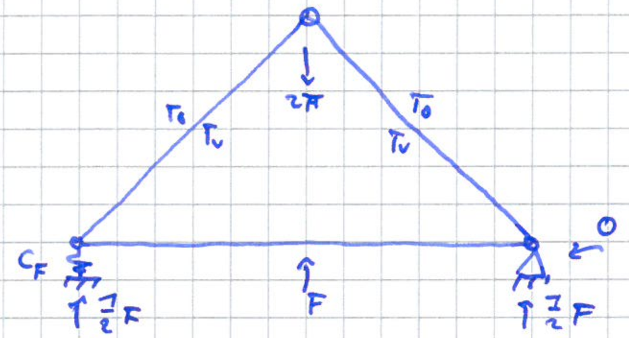


6)



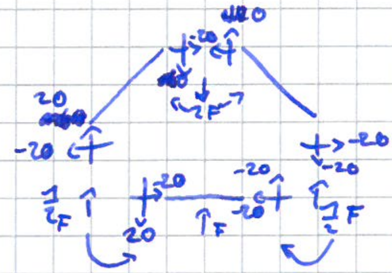
$n = (3+4) - 3\cdot 2 = 1$-fach stat. unbest.

Stat. bestimmtes HS:

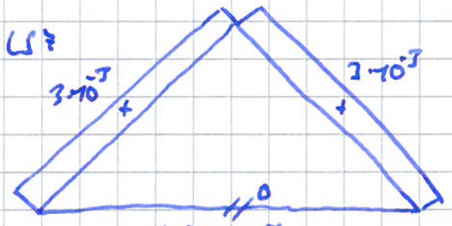


$n = (3+6) - 3\cdot 3 = 0$ ✓

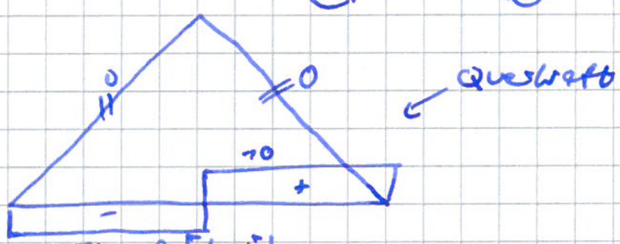
kin. bestimmt. ✓



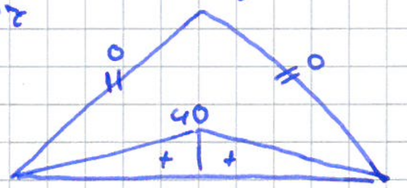
Momentenverlauf durch Temp. konst.



M[kNm]

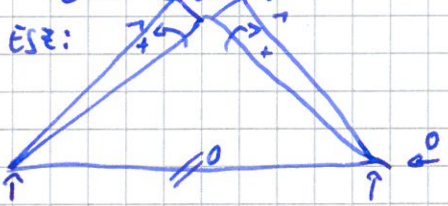


Q[kN]



M[kNm]

ESZ:

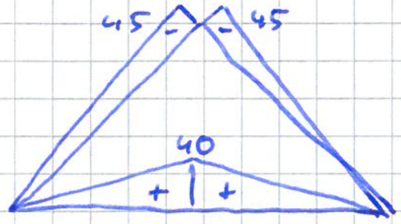


$$\delta_{10} = \int_0^{4\sqrt{2}} \alpha_T \Delta T \cdot \left(1 - \frac{x}{4\sqrt{2}}\right) dx \cdot 2 = 1{,}697\cdot 10^{-2}$$

$3\cdot 10^{-3}$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^2 + 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^2\right) = 3{,}771\cdot 10^{-4}$$

$$\delta_{10} = -X\cdot\delta_{11} \quad \rightarrow \quad X = -45$$

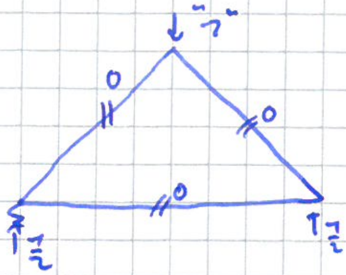


M_{ges} [kNm]

Federung in A: $F = c_F \cdot w_A$ mit $F = A_v = 10\,kN$

$w_A = 0{,}2\,mm$

Absenkung Spitze:



keine Momente

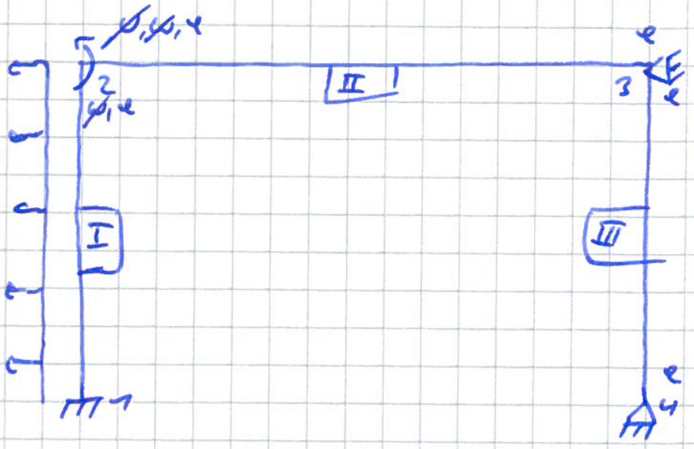
$w_c = 0 +$ Absenkung durch Feder

$F \bar{F} = c_F \cdot w_c$

$w_c = 0{,}1\,mm$

6

a) $n = (7+10) - 3 \cdot 1 = 4$-fach stat. unbestimmt



~~$k_{I\,red} = k_{II\,red}$~~ $\quad k_I^L = k_I^Z = [\quad]^{6\times6}$

$k_{ges,\,red} = \frac{12}{L^3}$

$$k_{ges,red} = EI \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L}+\frac{2}{L} & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{2}{L}+\frac{4}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & \frac{2}{L} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cancel{w_2} \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

$$P_{ges,red} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10/3 + 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} q_2 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}$$

Statik H20

~~Kred~~ $k_{red} \cdot V_{red} = P_{red}$

$$~~V_{red} = \begin{bmatrix} 4{,}1023 \\ -0{,}8046 \\ 0{,}4027 \end{bmatrix}\frac{L}{EI}~~$$

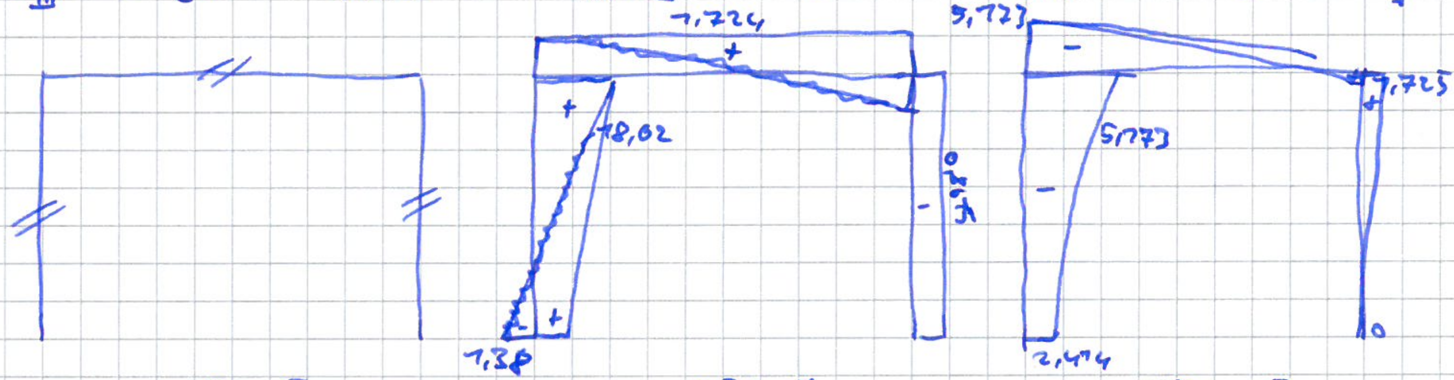
$$V_{red} = \begin{bmatrix} 5{,}747 \cdot 10^{-3} \\ -1{,}749 \cdot 10^{-3} \\ 5{,}747 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{matrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix}$$

$$s_I^L = k_I^L V_I^L - P_I^L$$

$$= [0 \quad 1{,}38 \quad 2{,}474 \quad 0 \quad 18{,}62 \quad -5{,}773]$$

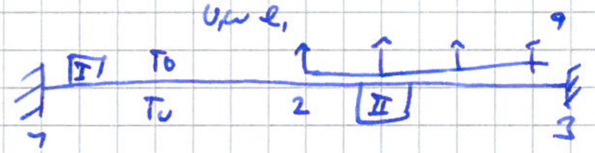
$$s_{II}^L = [0 \quad -1{,}724 \quad 5{,}773 \quad 0 \quad 1{,}724 \quad 1{,}725]$$

$$s_{III}^L = [0 \quad 0{,}8675 \quad -1{,}723 \quad 0 \quad -0{,}8675 \quad 0]$$



N[kN] Q[kN] M[kNm]

6)



$$k_I^L = k_I^g \Rightarrow [k]^{6\times6}$$

$$k_{II}^L = k_{II}^g = [\;]^{6\times6}$$

$$k_{red} = \begin{bmatrix} 4000 & 0 & 0 \\ 0 & 19200 & 0 \\ 0 & 0 & 160\,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ w_2 \\ e_2 \end{matrix}$$

$$P_I^L = P_I^g = [-75 \quad 0 \quad 3000 \quad 75 \quad 0 \quad -3000]$$

$$P_{II}^L = P_{II}^g = [0 \quad -25 \quad \tfrac{125}{6} \quad 0 \quad -25 \quad -\tfrac{125}{6}]$$

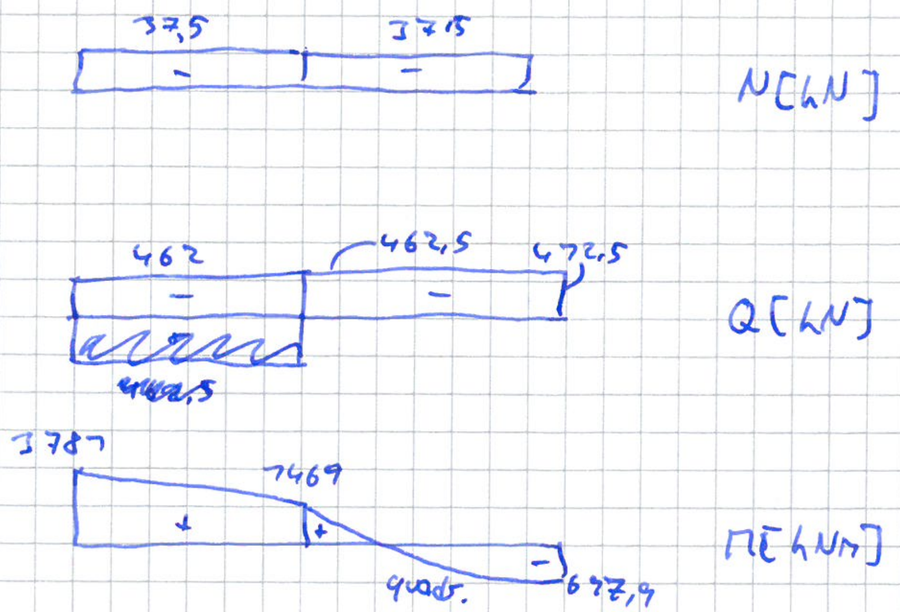
$$P_{red} = \begin{bmatrix} 75 \\ -25 \\ -2979 \end{bmatrix}$$

$$k_{red} \cdot V_{red} = P_{red}$$

$$V_{red} = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1{,}875 \cdot 10^{-2} \\ -1{,}102 \cdot 10^{-3} \\ -1{,}875 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} u_2 \\ \omega_2 \\ e_2 \end{matrix} \end{array}$$

$$S_I^{\,l} = k_I^{\,l}\, V_I^{\,l} - P_I^{\,l} = [\,37{,}5 \quad 462{,}5 \quad -3787 \quad -37{,}5 \quad -462{,}5 \quad 1469\,]$$

$$S_{II}^{\,l} = k_{II}^{\,l}\, V_{II}^{\,l} - P_{II}^{\,l} = [\,37{,}5 \quad 462{,}5 \quad -1490 \quad -37{,}5 \quad -472{,}5 \quad -697{,}9\,]$$



UNIVERSITÄT STUTTGART

Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen

Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing. T. Ricken

Bachelor of Science Luft- und Raumfahrttechnik
Modulprüfung Statik (VL Ricken/Bartel)
– Kernmodul –

Herbst 2019 – Grundlagen- und Aufgabenteil –

Zeit: 120 Minuten
Hilfsmittel: programmierbarer Taschenrechner, ilias-Formelsammlungen

Punkteverteilung	
Aufgaben 1–2	
Aufgaben 3–4	
Aufgabe 5	
Aufgabe 6	
Total	

Bearbeitungshinweise – v.a. für die Aufgaben 5 und 6:

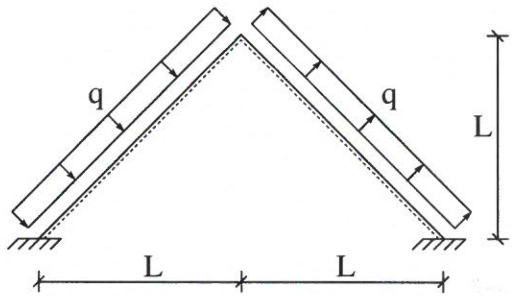
- Versehen Sie **unbedingt** jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Beginnen Sie **unbedingt** mit jeder neuen Aufgabe auch ein neues Blatt.
- Beschreiben Sie die Blätter nur **einseitig**.
- Nummerieren Sie die Blätter.
- Lassen Sie rechts ca. 2 cm Korrekturrand unbeschrieben.
- Die Verwendung von **grünen** Farbstiften ist **unzulässig**.

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe 5a: (17,5 Punkte) (KGV)

Gegeben ist das folgende statische System bei dem alle Balken die gleichen Materialparameter und die gleiche Querschnittsgeometrie besitzen.



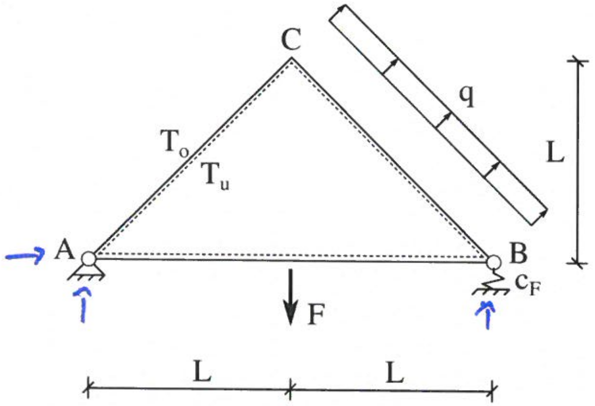
Gegeben:
EI ist konstant,
$EA = GA = GI_T \to \infty$

Berechnen Sie mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens (KGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaften aus!

Aufgabe 5b: (20 Punkte) (KGV)

Gegeben ist das folgende statische System bei dem alle Balken die gleichen Materialparameter und die gleiche Querschnittsgeometrie besitzen.



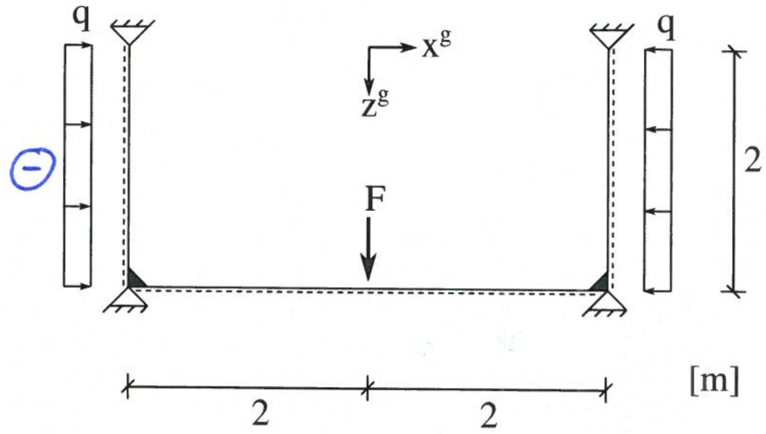
Gegeben:
$EI = 10000\,kNm^2$,
$EA = GA = GI_T \to \infty$,
$L = 2\,m$,
$q = 10\,kN/m$,
$F = 10\,kN$,
$c_F = 20000\,kN/m$,
$T_u - T_o = 10\,K$,
$h = 0{,}1\,m$,
$\alpha_T = 10^{-5}\,1/K$

Berechnen Sie mit Hilfe des Reduktionssatztes die gegenseitige Verdrehung der Stäbe in den Punkten A und B und zudem die vertikale Verschiebung am Auflager B!

Hinweis: Hier genügt es nur Momentenverläufe zu bestimmen.

Aufgabe ~~6a~~: (22 Punkte) (WGV)

Gegeben ist das folgende statische System bei dem alle Balken die gleichen Materialparameter und die gleiche Querschnittsgeometrie besitzen.



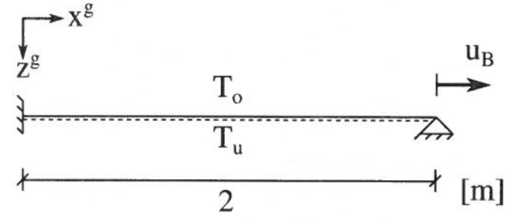
Gegeben:
$EI = 7680\,kNm^2$,
$EA \to \infty$,
$q = 12\,kN/m$,
$F = 20\,kN$

Berechnen Sie mit Hilfe des Weggrößenverfahrens (WGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar.!

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaften aus!

Aufgabe 6b: (15,5 Punkte) (WGV)

Gegeben ist das folgende statische System mit Temperaturbelastung und vorgegebener Auflagerverschiebung.



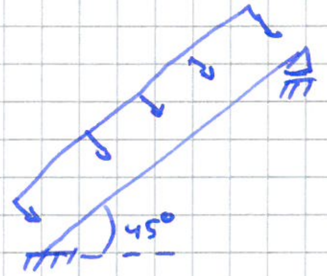
Gegeben:
$EI = 10^4\,kNm^2$,
$EA = 10^3\,kN$,
$u_B = 1\,cm$,
$T_o = 40\,K$,
$T_u = 60\,K$,
$h = 0,2\,m$,
$\alpha_T = 10^{-4}\,1/K$

Berechnen Sie mit Hilfe des Weggrößenverfahrens (WGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!

5

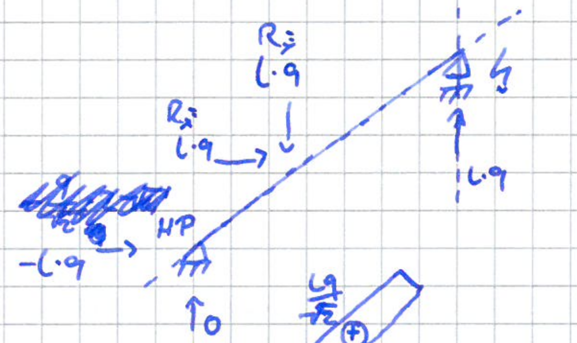
a) $n = (6+0) - 3\cdot 1 = 3$fach statisch unbestimmt

Symmetrie nutzen (Symmetr. System mit Antimetr. Belastung)



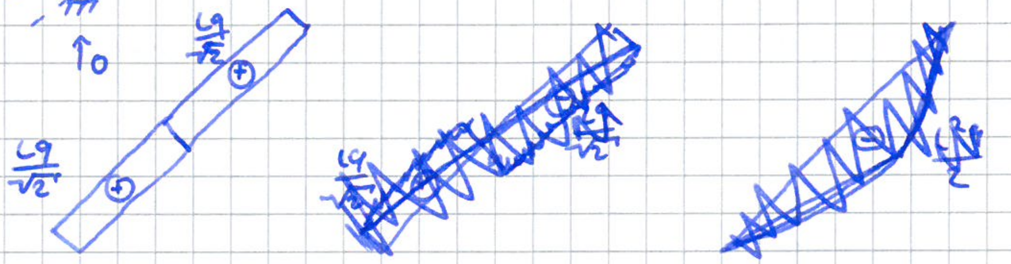
$n = (4+0) - 3\cdot 1) \to 1$ fach stat. unbestimmt

Statisch bestimmtes HS:

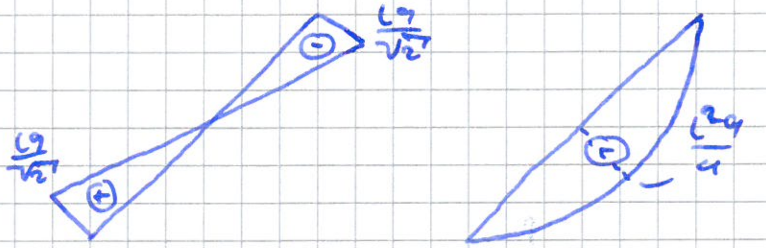


$n = (3+0) - 3\cdot 1) = 0 \to$ stat. bestimmt

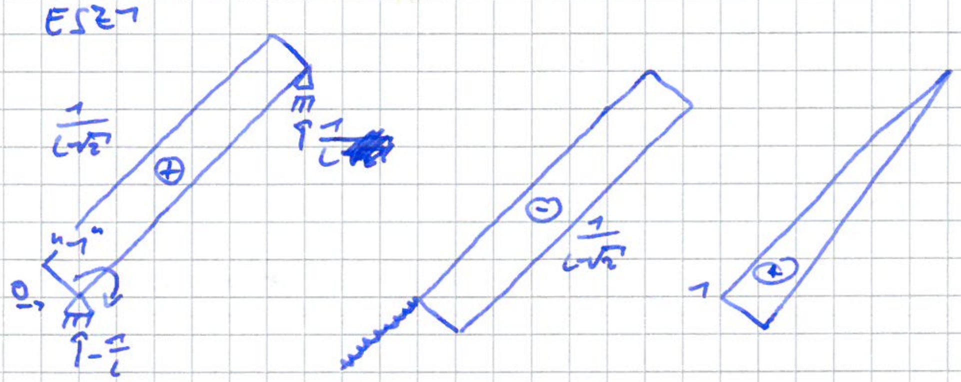
Wiederspruch in Polplan -> kin. bestimmt



N[kN] Q[kN] M[kNm]



ESZ1



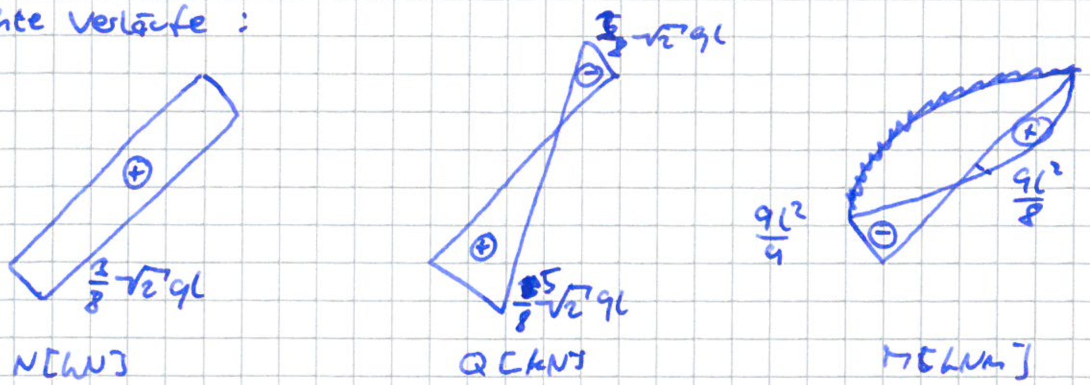
N[-] Q [-] M [m]

$"1" \cdot \delta_{10} = \frac{1}{1} \cdot \frac{ql^2}{4} \cdot 1 \cdot \sqrt{l^2+l^2} = \frac{\sqrt{2}}{12} l^2 q \cdot \frac{1}{EI}$

$\delta_{11} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sqrt{l^2+l^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} l \cdot \frac{1}{EI}$

$\delta_{10} = -x \delta_{11} \rightarrow x = -\frac{l^2 q}{84}$

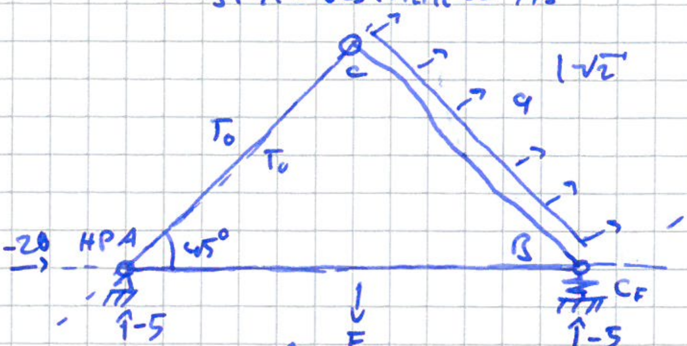
Echte Verläufe:



b) ~~[illegible]~~

$n = (3+4) - 3 \cdot 2) = 1$-fach stat. unbestimmt.

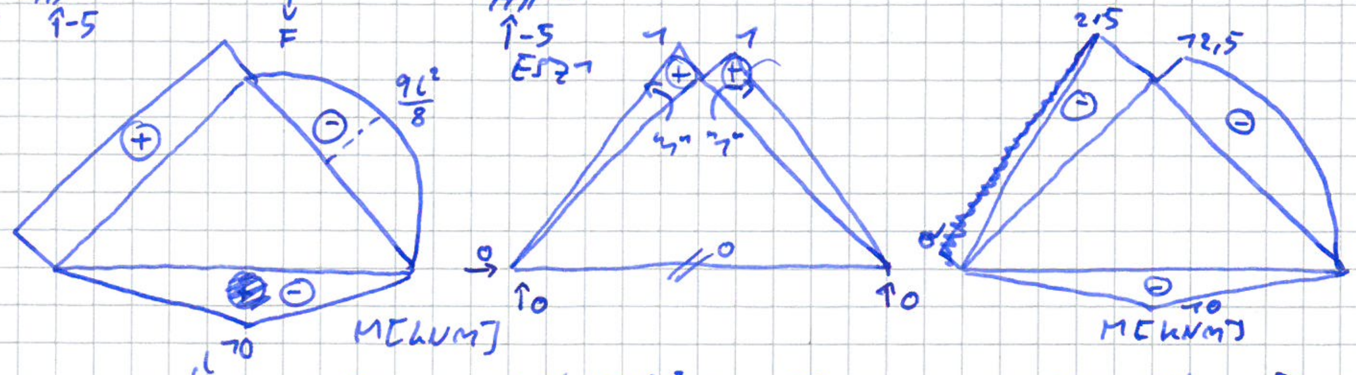
$\rightarrow$ stat. bestimmtes HS:



$n = (3+6) - 3 \cdot 3 = 0$ ✓ stat. Bestimmt

kin. Bestimmt ???

$T_u - T_0 = 10 k \rightarrow$ Biegung konst. nach außen



$\delta_{10} = \int_0^l \alpha_T \Delta T \bar{N} dx + \frac{1}{EI} \oint \left(\frac{1}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(\sqrt{2})\right)\right)$

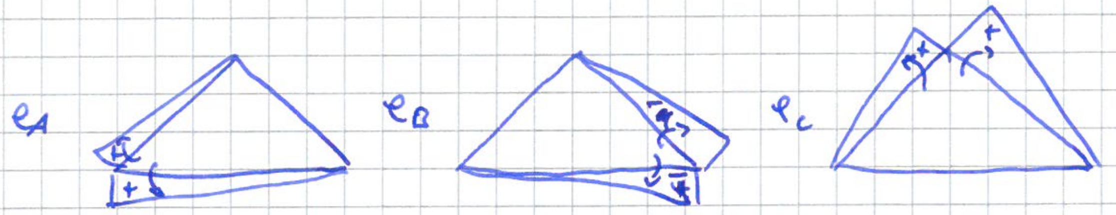
$= 4{,}714 \cdot 10^{-4}$

$\delta_{11} = \left(\frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 2\sqrt{2} + \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 2\sqrt{2}\right) \cdot \frac{1}{EI}$

$= 1{,}886 \cdot 10^{-4} \rightarrow \delta_{10} = -x \cdot \delta_{11} \rightarrow x = -2{,}5$

$F_c = c_F \cdot w_B = B_V \rightarrow w_B = 0{,}25\,mm$

φ_A φ_B φ_C



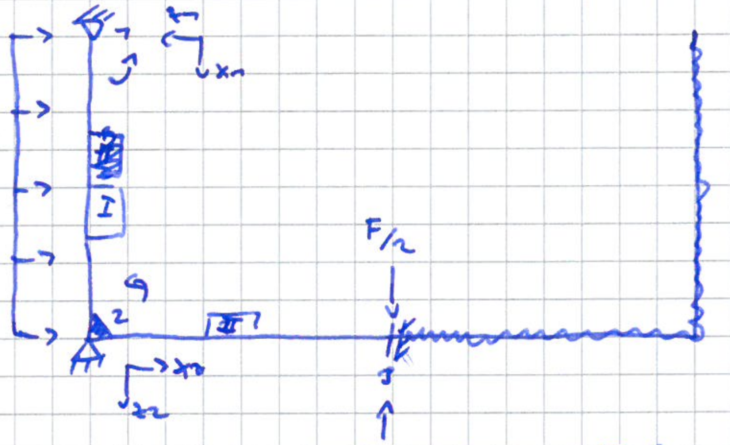
hier ·100 für gleiches Ergebnis wie H.

$$\varphi_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(-2{,}5)\cdot 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}\cdot 1\cdot(-10)\cdot 4\right) + \int_0^{2\sqrt{2}} \left(10^{-5}\cdot 100\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}x\right)\right)dx$$

$$= 2{,}964\cdot 10^{-4}\ \text{rad}$$

$\varphi_C = 0$ (biegesteife Ecke)

(6) Symmetrie Nutzen:



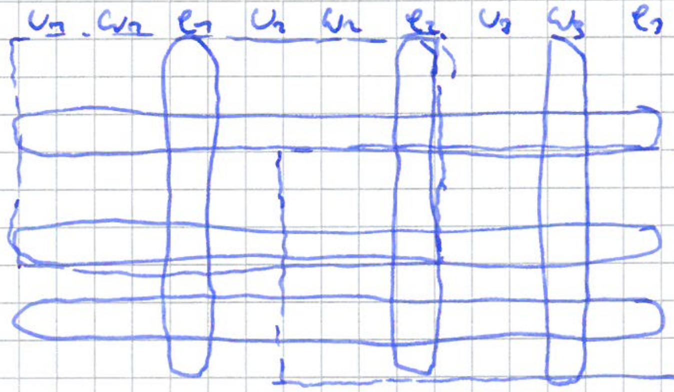
$n = (6+0)-3\cdot 1) = 3$ -fach stat. unbestimmt

$$k_I^l = \frac{EI}{l}\begin{array}{c c}\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} & \begin{matrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{matrix}\\ \begin{matrix}\varphi_1 & \varphi_2\end{matrix} & \end{array} = k_I^g$$

$$k_{II}^l = \frac{EI}{l}\begin{array}{c c}\begin{bmatrix}4 & 6/l\\ 6/l & 12/l^2\end{bmatrix} & \begin{matrix}\varphi_2\\ w_3\end{matrix}\\ \begin{matrix}\varphi_2 & w_3\end{matrix} & \end{array} = k_{II}^g$$

Gesamtsteifigkeitsmatrix:

u_1 w_1 φ_1 u_2 w_2 φ_2 u_3 w_3 φ_3



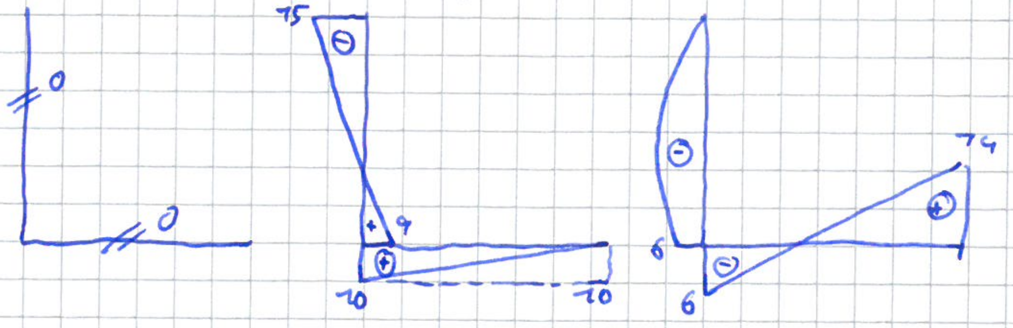
u_1	0		n_1
w_1	12		q_1
φ_1	+4		M_1
u_2	0	0	n_2
w_2	12	0	q_2
φ_2	-4	0	M_2
u_3		0	n_3
w_3		0+10	q_3
φ_3		0	M_3

$$k_{ges,red} = \begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 8 & 6/l\\ 0 & 6/l & 12/l^2\end{bmatrix}\begin{matrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ w_3\end{matrix}\cdot\frac{EI}{l} \qquad P_{red} = \begin{bmatrix}+4\\ -4\\ 10\end{bmatrix}$$

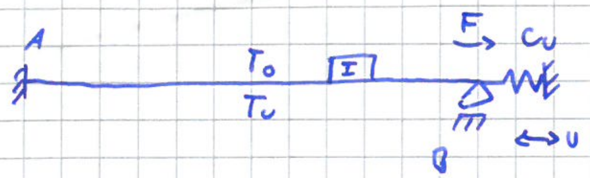
$$k_{red}\cdot V_{red} = P_{red} \rightarrow V_{red} = \begin{bmatrix}7{,}873\cdot 10^{-4}\\ -1{,}042\cdot 10^{-3}\\ 1{,}91\cdot 10^{-3}\end{bmatrix}\begin{matrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ w_3\end{matrix}$$

$$s_I^i = k_I^i v_I^i - p_I^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ -10 \\ 0 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$S_{II}^i = k_{II}^i v_{II}^i - p_{II}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$$



b)



$F = \underbrace{c_u}_{=10^{10}} \cdot u_B = 10^8 \, kN$

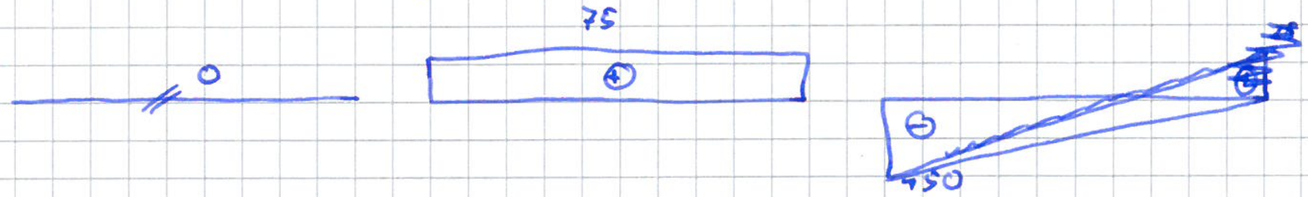
$$k_I^L = k_I^g \Rightarrow k_{I,red} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 500+10^{10} & 0 \\ 0 & 20000 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \end{array}$$

$$P_I^L = P_I^g \Rightarrow P_{I,red} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^8 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Hier in mL $3 \cdot 10^8$???

$$k_{red} \cdot V_{red} = P_{red} \rightarrow V_{red} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-2} \\ 5 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \end{array}$$

$$S_I^L = k_I^L v_I^L - P_I^L = \begin{bmatrix} 0 \\ -75 \\ 150 \\ 0 \\ 75 \\ 0 \end{bmatrix}$$



UNIVERSITÄT STUTTGART

Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen

Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing. T. Ricken

Bachelor of Science Luft- und Raumfahrttechnik
Modulprüfung Statik (VL Ricken/Keller)
– Kernmodul –

Frühjahr 2019 – Grundlagen- und Aufgabenteil –

Zeit: 120 Minuten
Hilfsmittel: programmierbarer Taschenrechner, ilias-Formelsammlungen

Punkteverteilung	
Aufgaben 1–2	
Aufgaben 3–4	
Aufgabe 5	
Aufgabe 6	
Total	

Bearbeitungshinweise – v.a. für die Aufgaben 5 und 6:

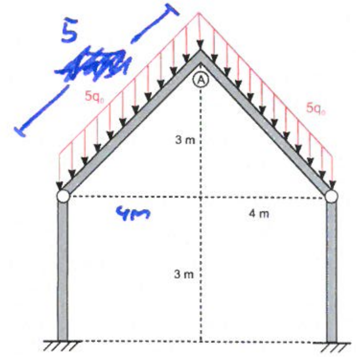
- Versehen Sie **unbedingt** jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Beginnen Sie **unbedingt** mit jeder neuen Aufgabe auch ein neues Blatt.
- Beschreiben Sie die Blätter nur **einseitig**.
- Nummerieren Sie die Blätter.
- Lassen Sie rechts ca. 3 cm Korrekturrand unbeschrieben.
- Die Verwendung von **Bleistiften** oder **roten** Farbstiften ist **unzulässig**.

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe 5: (37,5 Punkte) (KGV)

Gegeben ist das vereinfachte zweidimensionale Modell eines Hauses entsprechend der Abbildung. Alle Stabbalken haben dieselben Werte für E, A und I. Die angenommenen Streckenlasten sind in der Abbildung skizziert. Es sollen die Weggrößen am Punkt A bestimmt werden.



Aufgaben:

a) Wievielfach statisch unbestimmt ist die gegebene Struktur?

b) Ermitteln Sie alle Schnittgrößen und zeichnen Sie dann die erforderlichen Zustandslinien.

c) Bestimmen Sie nun die Weggrößen am Punkt A mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens, wo erforderlich. u_A w_A φ_A

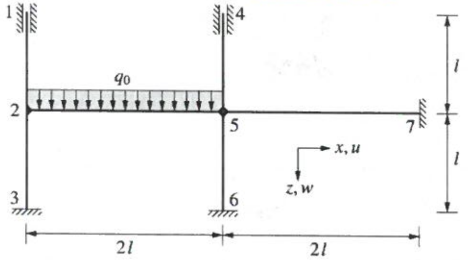
d) Nehmen wir an, die Lasten am Dach wären unsymmetrisch (in vertikaler Richtung, links nach unten, rechts nach oben, gleicher Betrag wie zuvor). Wie sieht es nun mit den Weggrößen am Giebel im Punkt A aus? (unabhängig lösbar)

Gehen Sie für die Berechnung davon aus, dass nur die Beiträge der Biegemomente zu berücksichtigen sind.

Nur Momente

Aufgabe 6: (37,5 Punkte) (WGV)

Gegeben ist das folgende Rahmentragwerk bei dem alle Balken die Querschnittsfläche $A = \infty$ und den Elastizitätsmodul E besitzen. Die vertikalen Balken haben eine Länge l und ein Flächenträgheitsmoment I. Die horizontalen Balken haben eine Länge $2l$ und ein Flächenträgheitsmoment $3I$. Die Markierungen an den Knoten 2 und 5 stellen Verschweißungen dar.



Aufgaben:

a) Ermitteln Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit des Rahmentragwerkes.

b) Zeichnen Sie alle quantitativen Momentenverläufe für Einheitsverdrehungen der Knoten 2 und 5 (der andere Knoten wird jeweils festgehalten). Tipp: Verwenden Sie hierbei tatsächlich Einheitsverdrehungen und nicht die normierte Einheitsverdrehung.
Zeichnen Sie außerdem den quantitativen Momentenverlauf für die Streckenlast q_0, wenn Knoten 2 und 5 festgehalten sind.

c) Berechnen Sie die Balkenendschnittkräfte und -momente an sämtlichen Lagern und Knoten. Sollten Sie aus b) die benötigten Momente für die Einheitsverdrehungen um die Knoten 2 und 5 nicht ermittelt haben, verwenden Sie bitte für $M_2 = 7\frac{EI}{l}$ und für $M_5 = 10\frac{EI}{l}$.

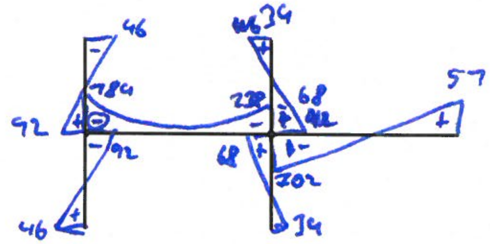
d) Geben Sie den Verlauf der Normal- und Querkräfte, sowie den Momentenverlauf innerhalb des gesamten Systems an (qualitativ, nur an den berechneten Stellen quantitativ).

e) Zeichnen Sie den qualitativen Verformungsverlauf des Systems.
Hinweis: Diese Teilaufgabe ist auch unabhängig von den vorherigen lösbar!

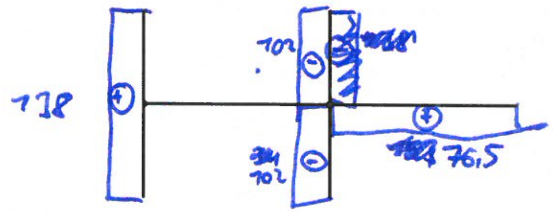
Hinweise:

- Für die Inverse der 2×2-Matrix gilt
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$
- Sie können für die Zeichnung die vorgefertigten Systembilder verwenden. Beschriften Sie diese bitte! *Es sind mehr Systembilder abgedruckt, als für diese Aufgabe benötigt werden. Stellen Sie sicher, dass eindeutig klar ist, welches der Bilder für welche Aufgabe und Größe gewertet werden soll.*

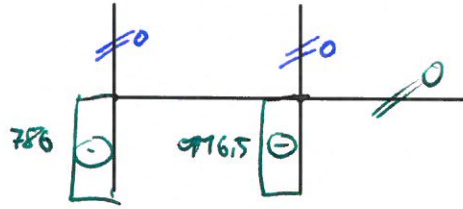
c)



M $\left[\frac{q_0 l^2}{873}\right]$

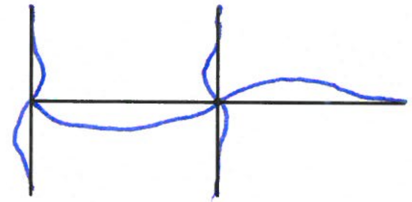


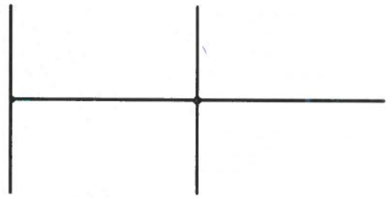
Q $\left[\frac{l q_0}{873}\right]$



N $\left[\frac{l q_0}{873}\right]$

e)





UNIVERSITÄT STUTTGART

Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen

Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing. T. Ricken

Bachelor of Science Luft- und Raumfahrttechnik
Modulprüfung Statik (VL Ricken/Bartel)
– Kernmodul –

Frühjahr 2020 – Grundlagen- und Aufgabenteil –

Zeit: 120 Minuten
Hilfsmittel: programmierbarer Taschenrechner, Ilias-Formelsammlungen

Punkteverteilung	
Aufgaben 1–2	
Aufgaben 3–4	
Aufgabe 5	
Aufgabe 6	
Total	

Bearbeitungshinweise – v.a. für die Aufgaben 5 und 6:

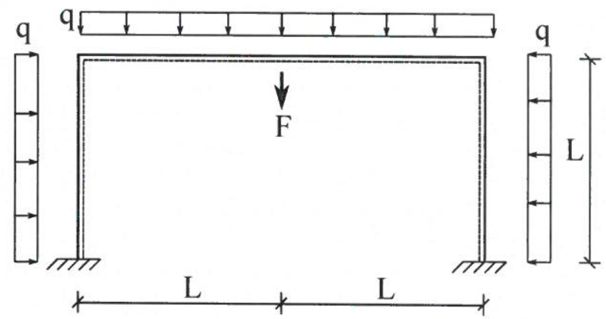
- Versehen Sie **unbedingt** jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Beginnen Sie **unbedingt** mit jeder neuen Aufgabe auch ein neues Blatt.
- Beschreiben Sie die Blätter nur **einseitig**.
- Nummerieren Sie die Blätter.
- Die Verwendung von **grünen** Farbstiften ist **unzulässig**.

Name: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe 5a: (17,5 Punkte) (KGV)

Gegeben ist das folgende statische System bei dem alle Balken die gleichen Materialparameter und die gleiche Querschnittsgeometrie besitzen.



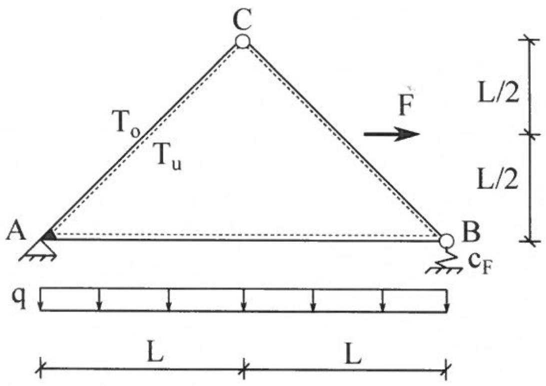
Gegeben:
L = 1m,
q = 10 KN/m,
F = 1/2*qL,
EI ist konstant,
$EA = GA = GI_T \to \infty$

Berechnen Sie mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens (KGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaften aus!

Aufgabe 5b: (20 Punkte) (KGV)

Gegeben ist das folgende statische System bei dem alle Balken die gleichen Materialparameter und die gleiche Querschnittsgeometrie besitzen.



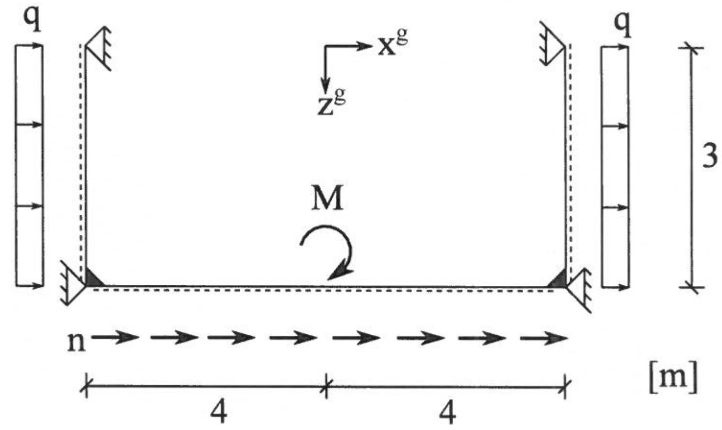
Gegeben:
$EI = 10000\,kNm^2$,
$EA = GA = GI_T \to \infty$,
$L = 2\,m$,
$q = 10\,kN/m$,
$F = 10\,kN$,
$c_F = 20000\,kN/m$,
$T_u - T_o = 10\,K$,
$h = 0,1\,m$,
$\alpha_T = 10^{-5}\,1/K$

Berechnen Sie mit Hilfe des Reduktionssatzes die gegenseitige Verdrehung der Stäbe in den Punkten A und C und zudem die vertikale Verschiebung am Auflager B!

Hinweis: Hier genügt es nur Momentenverläufe zu bestimmen.

Aufgabe 6a: (22 Punkte) (WGV)

Gegeben ist das folgende statische System bei dem alle Balken die gleichen Materialparameter und die gleiche Querschnittsgeometrie besitzen.



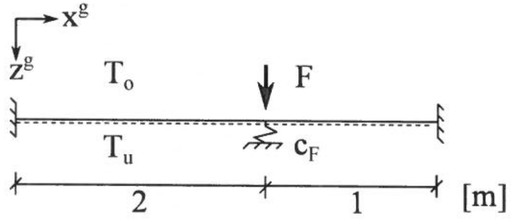
Gegeben:
$EI = 7680\,kNm^2$,
$EA \to \infty$,
$q = 12\,kN/m$,
$M = 20\,kNm$,
$n = 5kN/m$

Berechnen Sie mit Hilfe des Weggrößenverfahrens (WGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaften aus!

Aufgabe 6b: (15,5 Punkte) (WGV)

Gegeben ist das folgende statische System mit Temperaturbelastung im Bereich $[0, 2]$ und einer Einzellast F.



Gegeben:
$EI = 10^4\,kNm^2$,
$EA = 10^3\,kN$,
$c_F = 3 * EI$,
$T_o = 40\,K$,
$T_u = 60\,K$,
$h = 0,2\,m$,
$\alpha_T = 10^{-4}\,1/K$

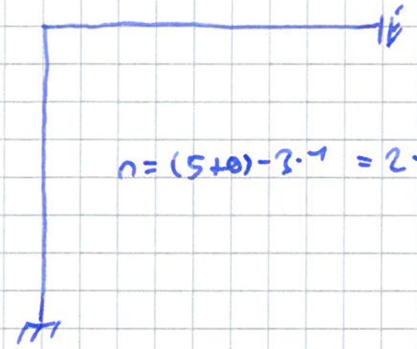
Berechnen Sie mit Hilfe des Weggrößenverfahrens (WGV) die Schnittgrößen (N, Q, M) und stellen Sie diese grafisch dar!

Statik F20 G1

(5)

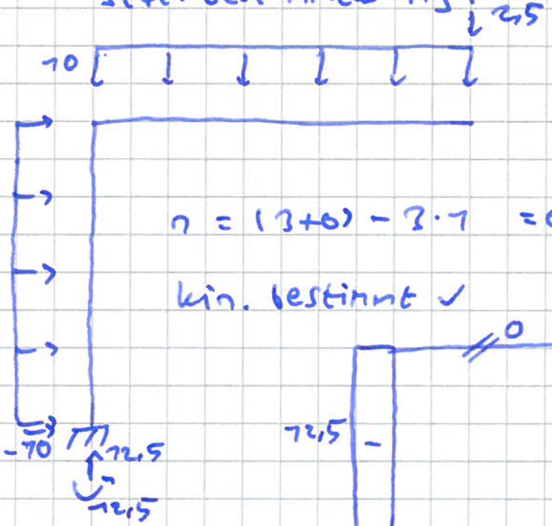
a) $n = (6+0) - 3 \cdot 1 = 3$-fach stat. unbestimmt

Symmetrie nutzen:



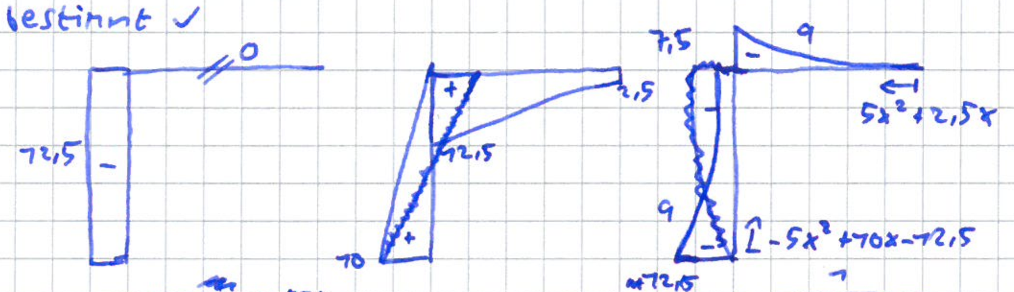
$n = (5+0) - 3 \cdot 1 = 2$-fach stat. unbestimmt

stat. bestimmtes HS:

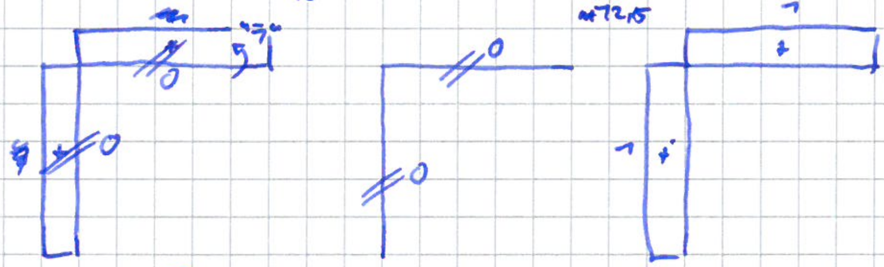


$n = (3+0) - 3 \cdot 1 = 0$ ✓ stat. bestimmt ✓

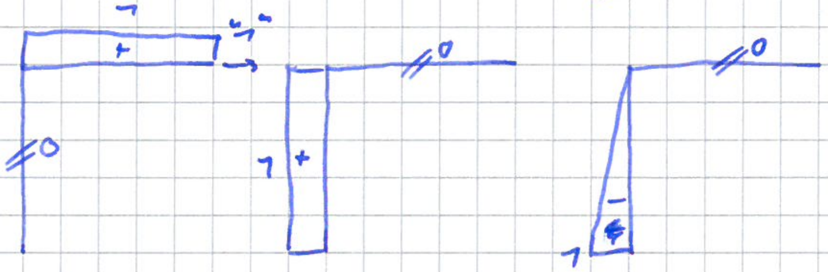
kin. bestimmt ✓



ESZ 1



ESZ 2



$$\delta_{10} = \Big(l \cdot \tfrac{1}{3} \cdot (-7,5) \cdot 1 + \cancel{\ldots} + \int_0^l -5x^2 + 10x - 12,5 \, dx \Big) \cdot \frac{1}{EI}$$

$= -\frac{1}{EI} \cdot 12,08$ In Lösung $-\frac{1}{EI} \cdot 7,083$???

$\delta_{20} = \frac{1}{EI} \cdot 5$ In Lösung $\frac{1}{EI} \cdot 3,75$

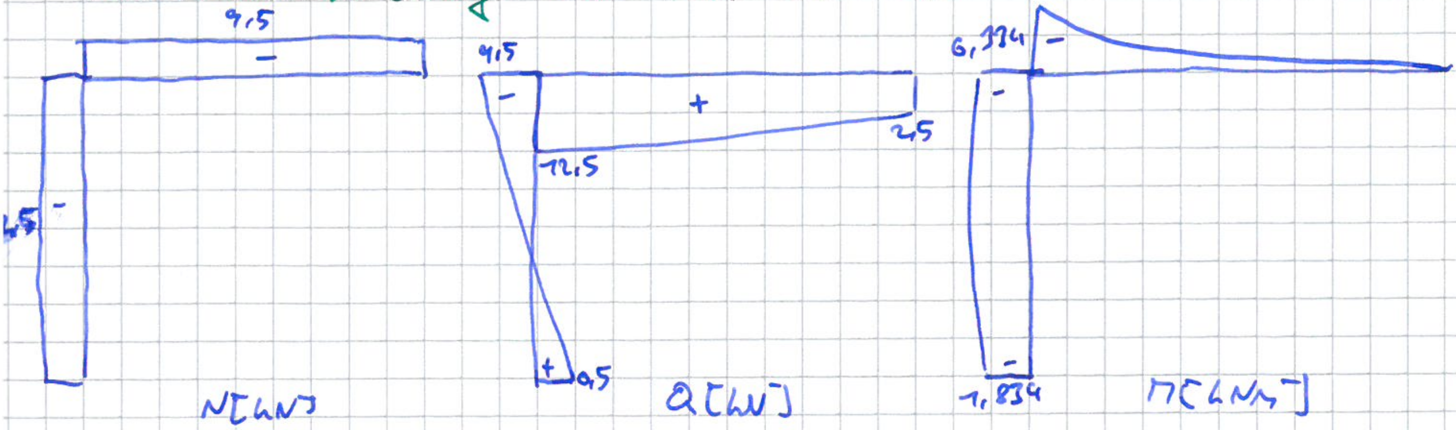
$$\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EI}$$

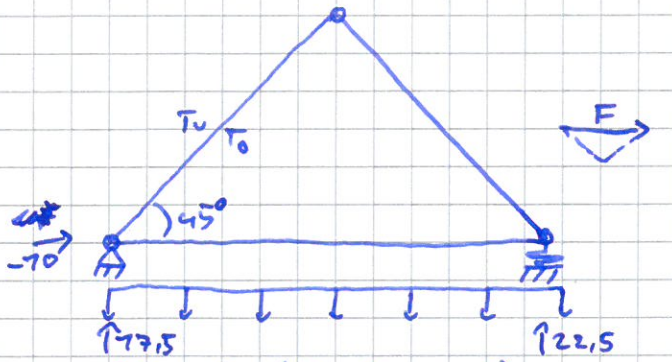
$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix}$$

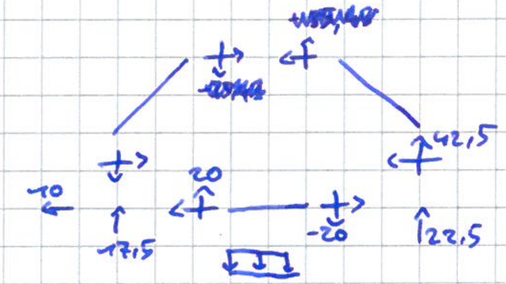
Falsche Werte aus Lösung: $X_1 = 1{,}766 \quad X_2 = -4{,}5$



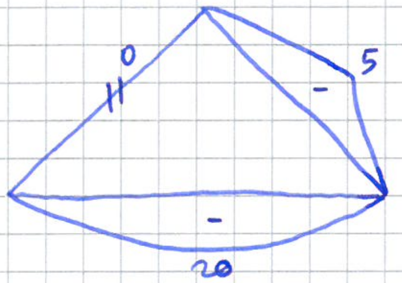
b) $n = (3+4) - 3 \cdot 2 = 1$-fach statisch unbestimmt

Stat.-bestimmtes System



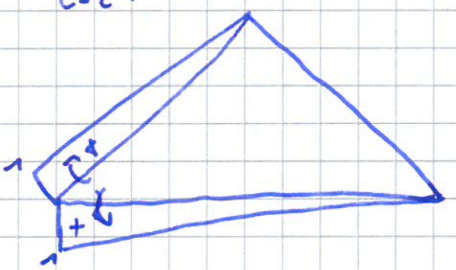


ESZ: (Nur Momente)



$\alpha_T \Delta T = 10^{-3}$

ESZ 1



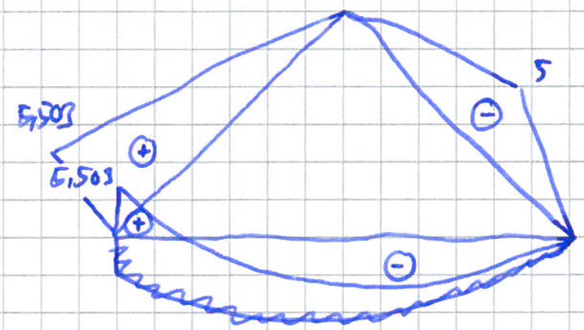
$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot(-20)\cdot 1\cdot 4\right) + \frac{1}{2}\cdot \alpha_T \Delta T \cdot 2\sqrt{2}$$

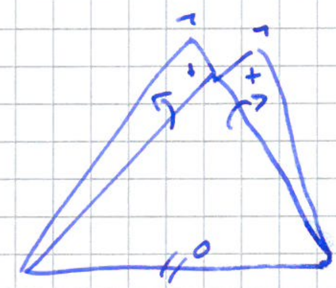
$$= -1{,}252 \cdot 10^{-3}$$

$$\delta_{11} = \left(\frac{1}{3}\cdot 1^2 \cdot 2\sqrt{2} + \frac{1}{3}\cdot 1^2 \cdot 4\right)\frac{1}{EI}$$

$$= 2{,}276 \cdot 10^{-4}$$

$\delta_{11} \cdot x = -\delta_{10} \rightarrow x = 5{,}503$





$B_V = c_F \cdot w_B \rightarrow w_B = 1{,}125\,\text{mm}$

Verdrehung an A: Biegesteife Ecke $\rightarrow = 0$

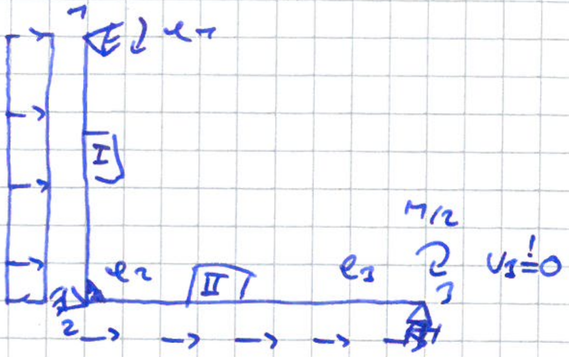
Verdrehung an C:

$$\varphi_c = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{4}\cdot(-5)\cdot 1\right) + \int_0^{2\sqrt{2}} \alpha_T \Delta T \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}\, x \, dx$$

$$-1{,}067 \cdot 10^{-3}\ \text{rad}$$

⑥

a) Antimetrisches System:



$$k^l_{I\,red} = k^g_{I\,red} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{4}{3}EI & \frac{2}{3}EI \\ \frac{2}{3}EI & \frac{4}{3}EI \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

$$k^l_{II\,red} = k^g_{II\,red} = \begin{bmatrix} EI & \frac{1}{2}EI \\ \frac{1}{2}EI & EI \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_2 \\ e_3 \end{array}$$

$$P^l_{I\,red} = P^g_{I\,red} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix} \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \end{array}$$

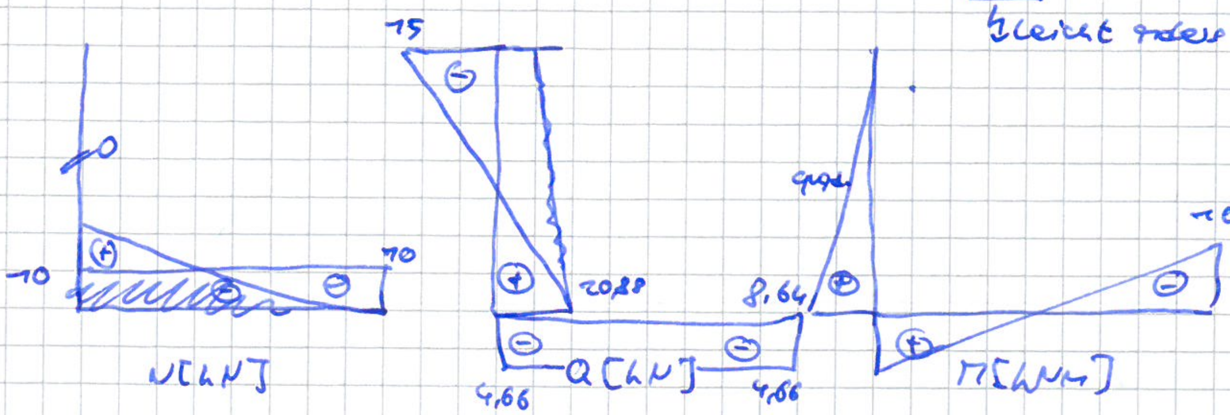
$$P^l_{II\,red} = P^g_{II\,red} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0-10 \end{bmatrix} \begin{array}{c} M_2 \\ M_3 \end{array}$$

$$k_{red} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 2/3 & 7/3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot EI \qquad P_{red} = \begin{bmatrix} 9 \\ -9 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$k_{red} \cdot V_{red} = P_{red} \quad \rightarrow \quad V_{red} = \begin{bmatrix} 1{,}795 \cdot 10^{-3} \\ -6{,}324 \cdot 10^{-4} \\ -4{,}859 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

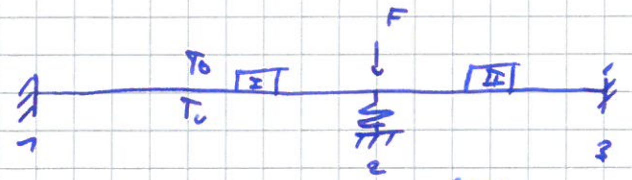
$$S^l_I = k^l_I \, V^l_I - P^l_I = [0 ; -15{,}12 ; 0 ; 0 ; 20{,}88 ; 8{,}643]$$

$$S^l_{II} = [-10 ; 4{,}667 ; -8{,}643 ; \underbrace{-10}_{\text{gleicht andere wie M.}} ; -4{,}667 ; -10]$$



Antimetr. ergänzen   Symmetr. ergänzen   Antimetr. ergänzen

6)



$$k_I^l = k_I^g = \left[\quad\right]^{6\times 6} \qquad k_{II}^l = k_{II}^g = \left[\quad\right]^{6\times 6}$$

$$k_{ges} = \left[\quad\right]^{9\times 9}$$

$$P_I^l = P_I^g = \begin{bmatrix} 0-5 \\ 0 \\ 0-100 \\ 0+5 \\ 10 \\ 0+100 \end{bmatrix} \qquad P_{II}^l = P_{II}^g = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{P_{ges} = \left[\quad\right]^{9\times 1}}$$

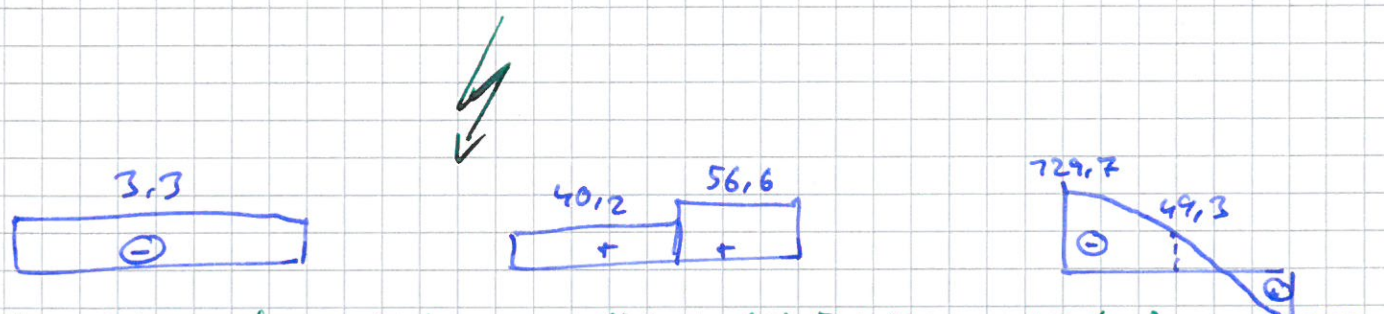
$$k_{red} = \begin{bmatrix} 1500 & 0 & 0 \\ 0 & 1950000 & -45000 \\ 0 & -45000 & 60000 \end{bmatrix}$$

$$P_{red} = \begin{bmatrix} 5 \\ 20 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$V_{red} = k_{red}^{-1} \cdot P_{red} = \begin{bmatrix} 3{,}333 \cdot 10^{-3} \\ 5{,}894 \cdot 10^{-4} \\ 2{,}109 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{matrix}$$

$$S_I^l = k_I^l V_I^l - P_I^l = \cancel{[3{,}3242, \ldots]}$$
$$= [3{,}3 \; ; -40{,}5 \; ; 130 \; ; -3{,}3 \; ; 48{,}7 \; ; -49]$$

$$S_{II}^l = [3{,}3 \; ; -48{,}2 \; ; 49 \; ; -3{,}3 \; ; 55{,}9 \; ; 6{,}83]$$



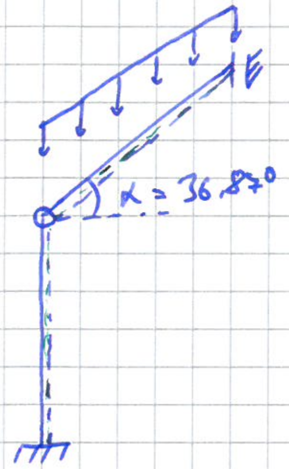
Irgendwi nur fast richtig... vielleicht bei Matrizen vertippt...?

Statik F19

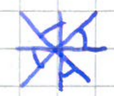
5

a) $n = (a+v) - 3p = (6+4) - 3\cdot 3 = 1$-fach stat. unbestimmt

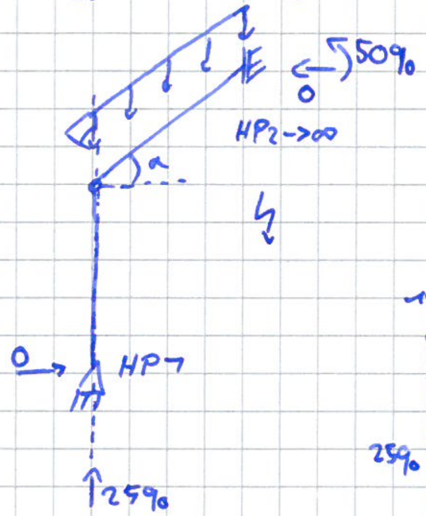
Symmetrie Nutzen:



$n = (5+2) - 3\cdot 2) = 1$-fach stat. unbestimmt

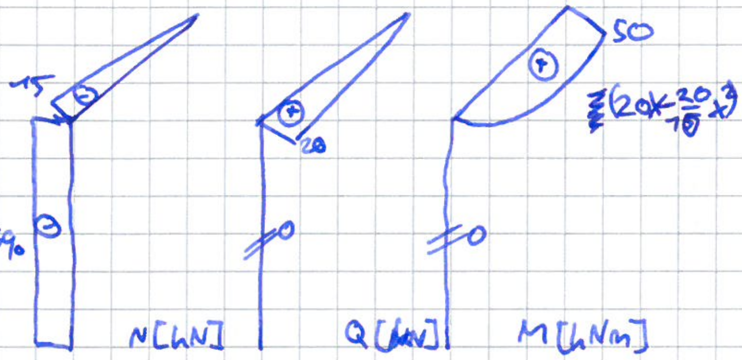


b) Statisch bestimmtes HS

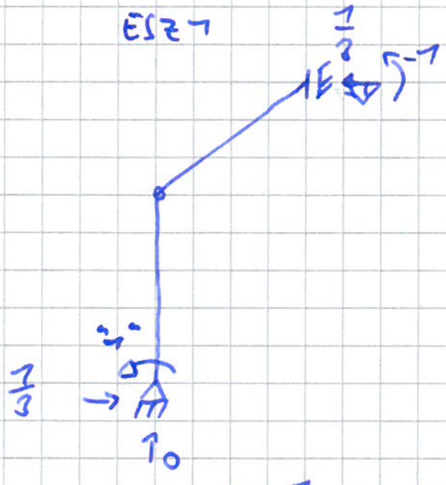


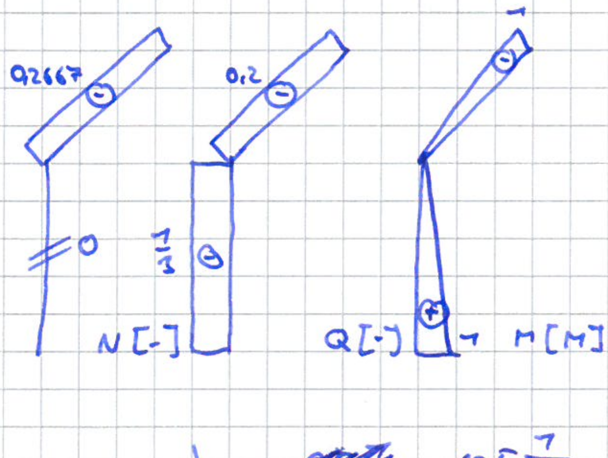
$n = (4+2) - 3\cdot 2) = 0$ ✓

Widerspr. im Polplan, kin. bestimmt ✓



ESZ1



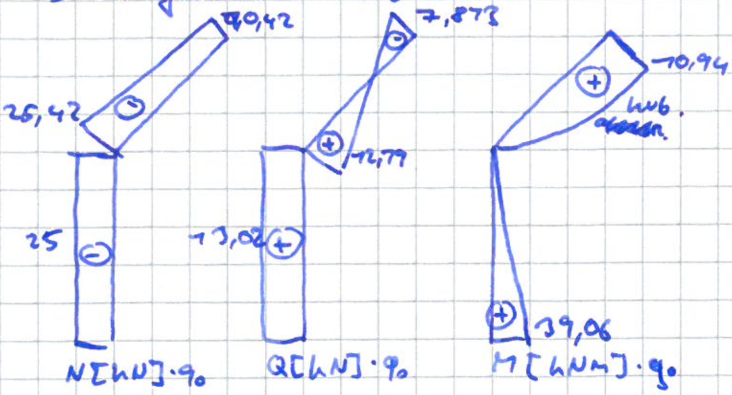


$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(5\cdot\frac{5}{12}\cdot 50\cdot(-1)+0\right) = -\frac{625}{6}\,\frac{1}{EI}$

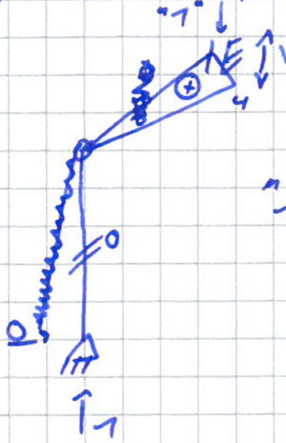
$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}(-1)^2\cdot 5 + \frac{1}{3}(-1)^2\cdot 3\right) = \frac{8}{3}\,\frac{1}{EI}$

$\delta_{10} = -X_1\cdot\delta_{11} \longrightarrow X_1 = \frac{625}{16}$

Schnittgrößen Gesamt:



c) $U_A \stackrel{!}{=} 0$, $\varphi_A \stackrel{!}{=} 0$ (wegen Auflager bei A)

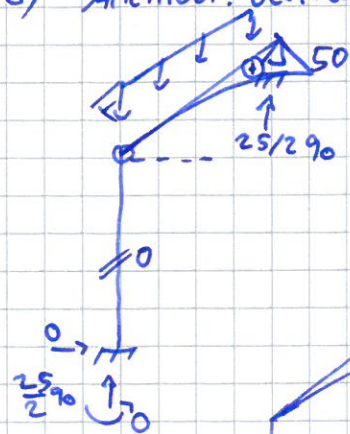


$V_A = ? \Leftarrow 0 \uparrow 4$

$"1" \cdot V_A = \cancel{\frac{1}{EI}(\ldots)}$

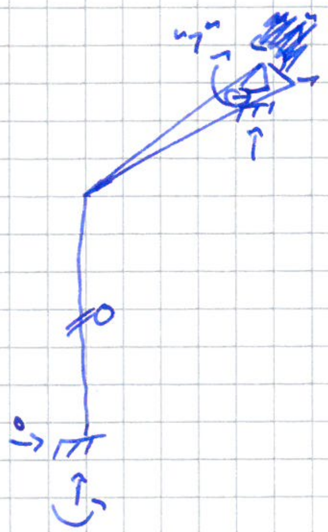
$$V_A = \int_0^5 \frac{195}{16}x - 2x^2 \cdot \frac{4}{5}x \, dx \cdot \frac{1}{EI} = \frac{1}{EI} \frac{625}{4} q_0$$

d) Antimetr. Belastung:



Neues reduziertes System

$V_A \stackrel{!}{=} 0$ (Auflager) $U_A \stackrel{!}{=} 0$ (Feste Einsp.) $\varphi_A \neq 0$

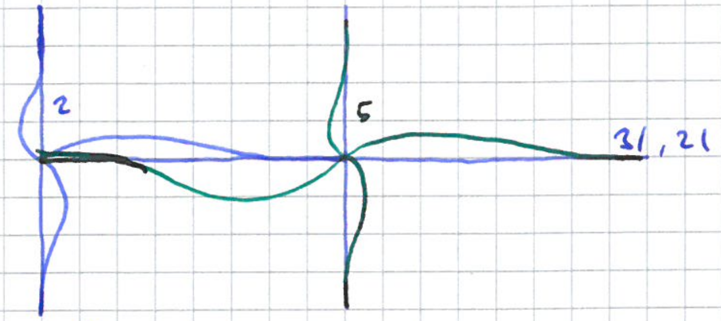


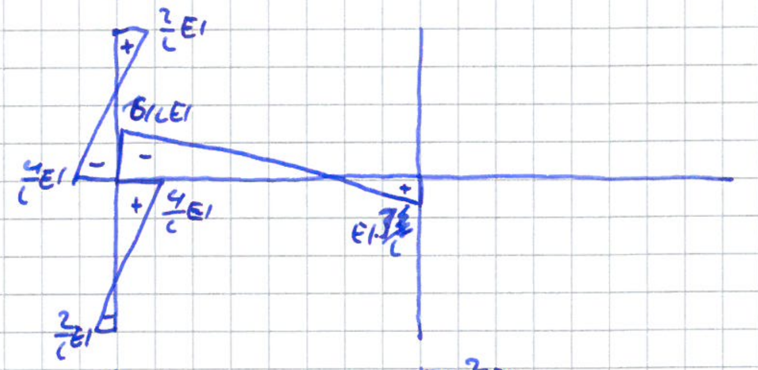
$$"1" \cdot \varphi_A = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 50 \cdot 1 \cdot \frac{1}{EI} q_0 = \frac{125}{2} \frac{q_0}{EI} \;\lightning\; \frac{125}{6} \text{ in ML...}$$

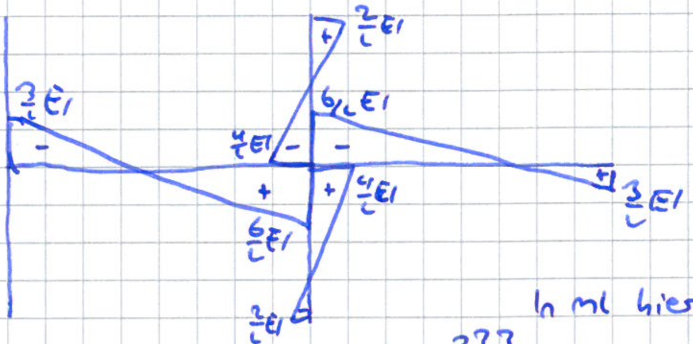
6

a) $n = (13+0) - 3\cdot 1 = 10$ - fach statisch unbestimmt.

$l_1' = \frac{l_1}{EI} \quad l_2' = \frac{2l}{3EI}$

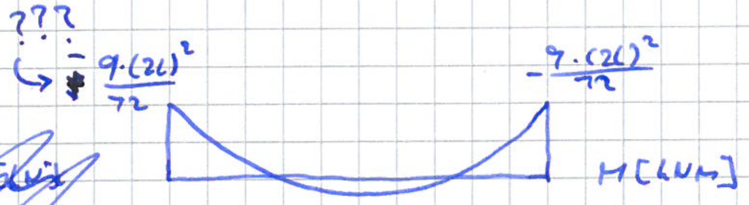






In ml hier "–", aber später dann doch "+" ???

Lösen mit Tabelle:



Benötigte Momente für Einheitsverdrehung: $M_{2a} = 14\frac{EI}{l}$ $\quad M_{5,a} = 3\frac{EI}{l}$

$M_{2b} = 3\frac{EI}{l} \quad M_{5,b} = \frac{8}{20}\frac{EI}{l}$

$$\begin{bmatrix} M_{1,a} & M_{1,b} \\ M_{2,a} & M_{2,b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} M_{0,a} \\ M_{0,b} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{-231^3 q_0}{873\,EI} \qquad x_2 = \frac{171 l^3 q_0}{873\,EI}$$

Skizze auf Aufgabenblatt

d) Querkräfte über Ableitung

$$\frac{d}{dx}\left(-46/873 + \frac{29+46}{873\cdot l}\cdot x\right) = \frac{46}{277\cdot l}\cdot l^3 q_0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-92}{873} + \frac{92+46}{873\cdot l}\cdot x\right) = \frac{46}{277 l}\cdot l^3 q_0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{68}{873} - \frac{68+34}{873\cdot l}\cdot x\right) = \frac{-34}{873\cdot l}\, l^3 q_0$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{102}{873} + \frac{-102+57}{873\cdot l}\, x\right) = \frac{57}{277 l}\, l^3 q_0$$

e) Siehe Aufgabenblatt