Komplexe Zahlen $(Re(z) = x \, ; \, Im(z) = y)$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$; $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$\cos\varphi = \frac{x}{r}$; $\sin\varphi = \frac{y}{r}$; $\tan\varphi = \frac{y}{x}$

$z^n = (x+iy)^n = (r\cdot e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n)$

$z = \left(r e^{i(\varphi+2\pi k)}\right)^{1/n} = r^{1/n} e^{i1/n(\varphi+2\pi k)} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k)}$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$Re(e^{it}) = \cos(t)$
$Im(e^{it}) = \sin(t)$
$Re(e^{-it}) = \cos(t)$
$Im(e^{-it}) = -\sin(t)$

Vektoren

Winkel: $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|u|\cdot|v|}$; Fläche Parallelogramm $A = |u \times v|$

n Vektoren sind linear unabhängig, wenn: $\det(v_1, v_2, v_n) = 0$ im $\mathbb{R}^n$

$b \times a = -b \times a$; $\langle a | a \times b\rangle = 0$; $a \times b = 0 \longleftrightarrow a, b$ linear unabhängig

Folgen, Reihen und Grenzwerte

Harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$; geometr. Reihe: $\sum_{n=0_m}^{\infty} q^n = \frac{1 \leftarrow q^m}{1-q}$ für $|q| < 1$

Exponentialreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$; π-Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

cos-Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; sin-Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für $c > 0$; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} n^\alpha q^n = 0$ für $|q| < 1$; $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Ableitung

Prod: $\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$; Quot: $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Kett: $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$; Hessematrix $Hf = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f & \partial_{xy}f & \partial_{xz}f \\ \partial_{yx}f & \partial_{yy}f & \partial_{yz}f \\ \partial_{zx}f & \partial_{zy}f & \partial_{zz}f \end{pmatrix}$

Gradient, Divergenz, Rotation

$\operatorname{grad} f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \nabla f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\\ \partial_z f\end{pmatrix}$

$\operatorname{div} f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \partial_x f_1 + \partial_y f_2 + \partial_z f_3$; $\operatorname{div} f = 0 \to f$ Quellfrei
$\operatorname{div} f > 0 \to$ Quelle
$\operatorname{div} f < 0 \to$ Senke

2D-rot $f = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$

3D-rot $f = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}$; $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x))$

Integrale und Ableitungen Tabelle

$f(x)$	x^a	e^x	b^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\int f(x)\,dx$	$\left[\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right]$	$[e^x]$	$\left[\frac{b^x}{\ln(b)}\right]$	$[-\cos(x)]$	$[\sin(x)]$	$[\ln\lvert x\rvert]$	$[\tan(x)]$	$[\arcsin(x)]$	$\left[\ln\sqrt{\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert}\right]$

$f(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x)$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sin(x)^2}$	$\frac{1}{\cosh(x)^2}$	$\frac{1}{\sinh(x)^2}$
$\int f(x)\,dx$	$[\arctan(x)]$	$[\operatorname{arcsinh}(x)]$	$[x\ln(x) - x]$	$[\sinh(x)]$	$[-\cot(x)]$	$[\tanh(x)]$	$[-\coth(x)]$

Integrale

Partielle Integration: $\int f'(x) g(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)] - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$

Substitution: Grenzen weglassen bis Rücksubstitution

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$; $\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \left[\frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}} \arctan\left(\frac{2x+\beta}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\right)\right]$

Potential berechnen (nur bei $\operatorname{rot} f = 0$ Gebiet muss einfach zusammenhängend sein)

$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix}$

1. f_1 nach x integrieren oder f_2 nach y oder f_3 nach z
   $\int F(x) = \int \partial x\,dx = \cdots\cdots + C(y,z) = \tilde{V}$
2. $\tilde{V}$ nach y ableiten und mit f_2 vergleichen
   $C(y,z) = \cdots\cdot + C(z)$
3. $\tilde{V}$ nach z ableiten und mit f_3 vergleichen
   $C(z) = \cdots\cdot + C$
4. Alles in $\tilde{V}$ einsetzen

Kurvenintegrale

1. Art: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Rightarrow \int_c f(x)\cdot dx = \int_a^b f(c(t))\cdot c'(t)\,dt$

2. Art: $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow \int_c g(x)\cdot dx = \int_a^b g(c(t))\cdot |c'(t)|\,dt$

3. Art: $g=1$ $\int_c 1\,ds = \int_a^b |c'(t)|\,dt \to$ Länge der Kurve

4. Art: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist Gradientenfeld $\to \operatorname{rot} f = 0 \to$ Integral Wegunabh. $\Rightarrow \int_c f\,d\vec{x} = V(c(b)) - V(c($

Ausfluss: $\int_a^b g(c(t))\cdot \begin{pmatrix} c_2'(t) \\ -c_1'(t) \end{pmatrix} dt$ von g durch k

Zirkulat.: $\int_a^b g(c(t))\cdot c'(t)\,dt$

Potenzgesetze und weitere Umformungen + Trigonometrie

$a^m\cdot a^n = a^{n+m}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$; $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$; $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$; $e^{x}\cdot e^{-x} = 1$; $\sqrt{x^2} = |x|$

$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$; $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cdot\cos(x)$; $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$; $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

~~[illegible]~~ ; $\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$

$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$; $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Jacobi-Matrix: $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$

Ln-Regeln

$\ln(u^v) = v\cdot\ln(u)$; $\ln(1) = 0$; $e^{\ln(x)} = x$

$\ln(u\cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$; $\ln(e) = 1$; $\ln(e^{\pi/4}) = \frac{\pi}{4}$

Absolute Integrierbarkeit $\int_\Omega |f(x)| dx = \int_\Omega f^+(x) dx + \int_\Omega f^-(x) dx < \infty$

Fubini $X \subset \mathbb{R}^p$ und $Y \subset \mathbb{R}^q$ messbare Teilmengen und f absolut intbar

$$\int_{X \times Y} f(x,y)\, d(x,y) = \int_X \int_Y f(x,y)\, dy\, dx = \int_Y \int_X f(x,y)\, dx\, dy$$

Normalbereiche

In x-Richtung: Schnitt mit Parallele zur x-Achse muss 1 Intervall liefern

Parametrisierungen, vol

Polarkoordinaten : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} := \phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\text{Fudet}} : \det \phi' = \rho$

Zylinderkoordinaten : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} := \phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\text{Fudet}} = \rho$

Kugelkoordinaten : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \sin \phi \cos \varphi \\ \rho \sin \phi \sin \varphi \\ \rho \cos \phi \end{pmatrix} := \phi \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\text{Fudet}} = \rho^2 \sin \varphi$ Nordpol $\phi = 0$ Südpol $\phi = \pi$

Toruskoordinaten : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n + \rho \sin \phi) \cos \varphi \\ (n + \rho \sin \phi) \sin \varphi \\ \rho \cos \phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \rho \\ \phi \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\text{Fudet}} = \rho (n + \rho \sin \phi)$

$Vol_2(K) = \int_K 1\, d(x,y) = \int \underline{\rho}\, d\varphi\, d\rho = \int_\varphi \int_z |\vec{n}|\, dz\, d\varphi$

$Vol_3(K) = \int_K 1\, d(x,y,z) = \int_z \int_\rho \int_\varphi \underline{\rho}\, d\varphi\, d\rho\, dz$

Kurvenintegrale und Integralsätze in der Ebene Kurven $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ werden parametr. $\gamma : [a,b] \rightarrow \Gamma$

Kurvenlänge : $\int_\Gamma |d\Gamma| = \int |ds| := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Kurvenintegral : $\int_\Gamma g\, |d\Gamma| = \int g(s) |ds| := \int_a^b g(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\, dt$

Arbeitsintegral : $\int_\Gamma f \cdot d\Gamma = \int f(s) \cdot ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$

Flussintegral : $\int_\Gamma f \times d\Gamma = \int f(s) \times ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \times \gamma'(t)\, dt$

<u>Satz von Green :</u> $\int_{\text{Fläche}} \operatorname{rot} f(x,y)\, d(x,y) = \int f(s) \cdot ds$

Rand positiv $\rightarrow$ Fläche links von ∂D

<u>Satz von Gauß :</u> $\int_{\text{Fläche}} \operatorname{div} f(x,y)\, d(x,y) = \int f(s) \times ds$

Integralsätze im Raum

Flächeninhalt parametrisiertes Flächenstück ϕ : $vol_2 \phi = \int_{(x,y)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) \right| d(x,y)$

Flächeninhalt eines Skalarfeldes : $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: $\int g \cdot |d\phi| = \int_{(x,y)} g(\phi) \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right| d(x,y)$

Flussintegral eines Vektorfeldes : $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$: $\int f \cdot ds = \int_{(x,y)} \left\langle f(\phi) \middle| \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle d(x,y)$

Flussintegral über Fläche : $\int f(s) \cdot ds = \int_{(x,y)} f(\phi) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d(x,y)$ Fudet wenn nötig!

(oder auch : $\int \operatorname{rot} f(s) ds = \int_{(x,y)} \operatorname{rot} f(\phi) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) d(x,y)$)

Flächenintegral : $\int g(s) |ds| = \int_{(x,y)} g(\phi) \cdot \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right| d(x,y)$

<u>Satz von Gauss :</u> $\int \operatorname{div} f(v) dv = \int f(s) \cdot ds = \int f(s) \cdot n(s) |ds|$

<u>Satz von Stokes :</u> $\int \operatorname{rot} f(s) ds = \int f(s) \cdot d\Gamma = \int \operatorname{rot} f(s) \cdot n(s) |ds|$

Div : $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ Rot : $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} := \begin{pmatrix} \partial x_2 f_3 - \partial x_3 f_2 \\ \partial x_3 f_1 - \partial x_1 f_3 \\ \partial x_1 f_2 - \partial x_2 f_1 \end{pmatrix}$

Greensche Flächenformel, Guldinsche Regel für Rotationskörper

Für jedes Kompaktum $D\subset\mathbb{R}^2$ mit stückw. glatten Rand: $Vol_2(D)=\int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$

Körper entsteht durch Rotation einer ebenen Fläche A um Achse in selber Ebene: $Vol_3(K)=Vol_2(A)\cdot 2\pi\cdot d_A$

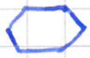
mit d_A: Abstand SP A zu Drehachse; Mantelfläche: $Vol_2(M)=Vol_1(\Gamma)\cdot 2\pi\cdot d_\Gamma$

Komplexe Wegintegrale $\int e^{ixt}\,dt = \left[\frac{1}{ix}e^{ixt}\right]$

Integral in Real- und Imaginärteil aufteilen

Holomorphe Fkt: komplex diffbar und f' stetig

Gebiete

konvex :  einf. Zusammenh. 

sternförmig :  nicht einf. Zusammenh.! 

Residuensatz

$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum res(f)$ Summe der Residuen, die im Rand liegen

Residuum ablesen: Koeffizient vor Exponent -1

Residuum einer einfachen Polstelle: f in z_0 höchstens 1-fach Pol: $\underset{z_0}{res}(f)=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$

Residuum einer mehrfachen Polstelle: f in z_0 höchstens Pol n-ter Ordnung:

$$\underset{z_0}{res}(f)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]$$

$f(z)$	res
$e^{3/z}$	3
e^3/z	e^3
e^{3x}/x^3	$9/2$
e^{2/x^2}	0
e^{2x}/x	1
$e^{1/x}\cdot x^2$	$\frac{1}{6}$

Wichtige Integrale

$\int e^{-(x^2+y^2)/2}\,d(x,y) = [2\pi]$

$\int \sin(x)^2\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\right]$

$\int_0^{2\pi} -\sin(t)^2+\cos(t)^2\,dt = 0$

$\int e^{-x^2/2}\,dx = [\sqrt{2\pi}]$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t)\,dt = \pi$

$\int \cot(x)^2 = \left[\frac{1}{2}(\cos(x)\sin(x)+x)\right]$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)e^t = \left[\frac{1}{k^2+1}\left(e^t(\sin(kt)-k\cos(kt))\right)\right]$

Gewöhnliche Differentialgleichungen ; Existenz- und Eindeutigkeitssatz

$f: \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ stetig; zu lösen DGL $y' = f(x, y)$ mit AW $y(0) = y_0$

Zu jedem Startpunkt (x_0, y_0) existieren Lösungen, jede kann beliebig bis zum Rand fortgeführt werden.

Ist $f(x,y)$ stetig diffbar nach y, so ist die Lösung durch (x_0, y_0) eindeutig bestimmt

Exakte DGL

DGL der Form $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$; $\mathrm{rot}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$

Wenn $\mathrm{rot}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \neq 0$: Integrierende Faktoren $\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\mathrm{rot}(f,g)}{g}$; $\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\mathrm{rot}(f,g)}{f}$

$\longrightarrow \mathrm{rot}\begin{pmatrix} \lambda f \\ \lambda g \end{pmatrix} = 0$

Dann Potential berechnen, nach $y(x)$ auflösen. $\phi(x,y) \overset{!}{=} 0 \to y(x) = \dots$

Lineare DGL, inhomogen

Form: $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ mit $y(x_0) = y_0 \to y(x) = e^{A(x)} \int_{t=x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\,dt + e^{A(x)} y_0$ mit $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$

DGL höherer Ordnung ; Homogene lineare DGL 2. Ordnung

Form: $\ddot{u}(t) + 2\delta \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$

charakt. Polynom $\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 \overset{!}{=} 0 \to \lambda_{1,2} \to$ Exponentialansatz : $u(t) = e^{\lambda t}$

2 Reelle Nullstellen : $u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

2 kompl. konj. Nullstellen: $u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$; $C_{1,2} \in \mathbb{C}$ (oder $C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$) ($\mathrm{Re}(\lambda_1) \to e^{\lambda_1 t}$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) \to e^{\lambda_2 t}$)

doppelte reelle Nullstelle: $u(t) = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t)$; $C_{1,2} \in \mathbb{R}$

Lineare DGL mit beliebiger rechter Seite

Form: $P(\partial) y(x) = r(x) e^{\mu x}$ mit P, r Polynomen

Ist μ eine n-fache Nullstelle (Resonanz) von P, so existiert Lösung der Form: $y_b(x) = q(x) x^k e^{\mu x}$ ($\deg q = \deg r$)

Speziell $P(\partial) y(x) = e^{\mu x} \to y_b(x) \frac{e^{\mu x} x^k}{P^{(k)}(\mu)}$

Fixpunkte $y'(t) = A(t) \cdot y(t)$

Stabil : $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle EW $\to$ Stabiler Fixpunkt : $\mathrm{Spur}(A) < 0$ und $\det(A) > 0$

instabil : $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ für einen EW

Lineare DGL Systeme

Form $y_1'(t) = a_{11}(t) + a_{12}(t) y_2(t) + \dots + a_{1n}(t) y_n(t) + b_1(t)$

$y_n'(t) = a_{n1}(t) + a_{n2}(t) y_2(t) + \dots + a_{nn}(t) y_n(t) + b_n(t)$

$\Big\}\ y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$, $y(t_0) = y_0$ $\downarrow$ EW, EV berechnen $\downarrow$ Fundamentalmatrix $Y(t) = (EV_1, tEV_2, \dots)$

Homogene Gleichung $b(t) = 0$ $\rightarrow L_0$ ist ein Vektorraum der Dimension n

Inhomogene Gleichung $\rightarrow L_b$ ist ein affiner Raum der Dimension n

Partikulärlösung $y_b(t) = \underbrace{Y(t) \int_{\tau=t_0}^{t} Y(\tau)^{-1} b(\tau)\, d\tau}_{\text{partikulär}} + \underbrace{Y(t)\, Y(t_0)^{-1}\, y_0}_{\text{homogen}}$;

Eigenvektoren und Hauptvektoren

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert

Hauptvektorkette: $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_n$ ~~[illegible] $\neq 0$~~

Besteht aus Vektoren $0 \neq v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ mit $(A-\lambda) v_n = v_{n-1}$

Lösung eines DGL-Systems durch Eigenfunktionen

Form: $y'(t) = Ay(t)$; Eigenfunktion ist Lösung der Form $y(t) = e^{\lambda t} v$

Hierzu ist $0 \xleftarrow{A-\lambda} v_1 \xleftarrow{A-\lambda} v_2 \xleftarrow{A-\lambda} \dots \xleftarrow{A-\lambda} v_n$ eine Hauptvektork., die das DGLS löst mit

$y_k(t) = \underline{e^{\lambda t}} \left[v_k + t v_{k-1} + \frac{t^2}{2} v_{k-2} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \right]$ $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots)$

$A \cdot v_2 = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 \longrightarrow e^{2t}(v_2 + t v_1)$ $[; \ Sp(A) = \Sigma \lambda]$

Eine Eigenfunktion ist eine Lösung von $y' = Ay$ der Form $y(t) = e^{\lambda t} v$ mit $v \mathrel{\hat{=}} EV$ zu λ

$\rightarrow$ Prüfen ob v ein EV von A zu λ ist: prüfen ob $Av = \lambda v$ ist.

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_{1,2} = -1$ $\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underset{\lambda}{(-1)} \underset{EV}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ oder $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Av_1 = -2v_1$; $Av_2 = 1v_1 - 2v_2$; $Av_3 = 1v_1 - 2v_3$

$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $y_1(t) = e^{-2t} v_1$; Hauptvekt. 1. Stufe | $y_2(t) = e^{-2t}(v_2 + t v_1)$ 2. Stufe | $y_3(t) = e^{-2t}[v_3 + t v_2 + \frac{t^2}{2} v_1$ 3. Stufe

$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & -8 \end{pmatrix}$; $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$Au_3 = -2u_3$ $\rightarrow$ EV $v_1 = u_3$ zu EW $\lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ $\rightarrow Sp(A) = \Sigma \lambda$ $\rightarrow \lambda = 1$

u_1 ist HV $\rightarrow v_3 = u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = (A-1)v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

v_4, sodass Basis aus Hauptvektorketten: $(A-1) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

-1
-3

Bei komplexem Vektor in Hauptvektorkette:
auch komplex-konjugierten verwenden!

Partielle Differentialgleichungen

Allgemeines: quasilineare PDE: $a(x,y,u)\partial_x u(x,y) + b(x,y,u)\partial_y u(x,y) = f(x,y,u)$

semilineare PDE: $a(x,y)\partial_x u(x,y) + b(x,y)\partial_y u(x,y) = f(x,y,u)$

lineare PDE: $a(x,y)\partial_x u(x,y) + b(x,y)\partial_y u(x,y) = c(x,y)u(x,y) + d(x,y)$

Lineare PDE 1. Ordnung – Charakteristik Methode

$a\partial_x u + b\partial_y u = f$ mit $u(x,0) = -x^2$

$x'(s) = a \qquad x(0) = x_0$

$y'(s) = b \qquad y(0) = 0$

$u'(s) = f \qquad u(0) = -x_0^2$

$\int \frac{y'(s)}{y(s)} = \ln(y(s)) = -\ln(1+s) = \int -\frac{1}{1+s}$

$x\partial_x u(x,y) + \partial_y u(x,y) = 1$ mit $u(x,0) = -x^2$

$x'(s) = x(s)$; $x(0) = x_0 \to \frac{x'(s)}{x(s)} = 1 \to x(s) = Ce^s \to C = x_0$

$y'(s) = 1$; $y(0) = 0 \to y(s) = s + c \to y(s) = s$

$u'(s) = 1$; $u(0) = -x_0^2 \to u(s) = s + C \to u(s) = s - x_0^2$

Gleichungen nach x_0, s auflösen, beides in $u(s)$ eins.

$(2x-y)\partial_x u + (2y-x)\partial_y u = x + y + 2u$ mit $u(x,0) = x^2 - x$

$$\left.\begin{aligned} x'(s) &= 2x(s) - y(s) & x(0) &= x_0 \\ y'(s) &= 2y(s) - x(s) & y(0) &= 0 \\ u'(s) &= x(s) + y(s) + 2u(s) & u(0) &= x_0^2 - x_0 \end{aligned}\right\} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

EV bestimmen: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\to z(t) = C_1 e^t v_1 + C_2 e^{2t} v_2 + C_3 e^{3t} v_3$

$x(0) = x_0 \to C_1 + C_3 = x_0$; $y(0) = 0 \to C_1 - C_3 = 0$; $u(0) = x_0^2 - x_0 \to -2C_1 + C_2 = x_0^2 - x_0$

$C_1 = \frac{x_0}{2}$; $C_2 = x_0^2$; $C_3 = \frac{x_0}{2}$

$$z(t) = \frac{x_0}{2} e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_0^2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_0}{2} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ u(s) \end{pmatrix}$$

Partielle DGL 2. Ordnung – Klassifikation

$P(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + c \to A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{21}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}$

→ elliptisch, falls $\det A > 0$; hyperbolisch, falls $\det A < 0$; parabolisch, falls $\det A = 0$

Produktansatz $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$

$\partial_x^2 u + \partial_t^2 u - 2\partial_t u + u = 0$ für alle $t > 0$ und $0 < x < \pi$; $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$; $u(0,x) = f(x)$

1) $u(t,x) = v(t)w(x)$ einsetzen: $v(t)w''(x) + v''(t)w(x) - 2v'(t)w(x) + v(t)w(x) = 0$

2) $\frac{w''(x)}{w(x)} = -\frac{v''(t)}{v(t)} + \frac{2v'(t)}{v(t)} - 1 = \lambda \in \mathbb{R}$

3) Erst $\frac{w''(x)}{w(x)}$ betrachten: $w''(x) = \lambda w(x)$

$\lambda = 0 \to w(x) = c + dx$; $\lambda = -\alpha^2 < 0 \to w(x) = c\sin(\alpha x) + d\cos(\alpha x)$

$\lambda = \alpha^2 > 0 \to w(x) = ce^{\alpha x} + de^{-\alpha x}$;

4) RB berücksichtigen $\to u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \to w(0) = w(\pi) = 0$. Nicht-triviale Lösungen existieren nur für $\lambda = -n^2 < 0$, nämlich $w_n(x) = \sin(nx)$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$

5) $-\frac{v''(t)}{v(t)} + \frac{2v'(t)}{v(t)} - 1 = \lambda = -n^2 \to v''(t) - 2v'(t) + (1-n^2)v(t) = 0$

mit allg. Lösung $v_n(t) = a_n e^{(1-n)t} + b_n e^{(1+n)t} \to$ Lsg. $u_n(t,x) = v_n(x) w_n(t)$

Fourier-Analyse

$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ mit $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-ik\omega t} f(t)\,dt$; $\omega := \frac{2\pi}{T}$

oder $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$; $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$

$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$ mit

$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T \cos(k\omega t) f(t)\,dt$; $b_k = \frac{2}{T}\int_0^T \sin(k\omega t) f(t)\,dt$; $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt$

$= 0$ falls f ungerade (Pkt sym.) ; $= 0$ falls f gerade (Achsensym.) ; $=0$ falls ungerade

Dirichlet-Bedingung

Alle vier Grenzwerte existieren: $f(x-) = \lim_{\xi \nearrow x} f(\xi)$; $f(x+) = \lim_{\xi \searrow x} f(\xi)$

$f'(x-) = \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$; $f'(x+) = \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$

Punktweise Konvergenz von Fourier-Reihen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar auf $[0, 2\pi]$ und 2π-periodisch

f erfüllt Dirichlet-Bed. in x $\to$ Fourier-Reihe $f_n(x)$ konvergiert in x gegen $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ für $n \to \infty$

a) Ist f in x sprungnormiert ($f(x) = \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$) oder stetig ($f(x\pm) = f(x)$), so gilt $f_n(x) \to f(x)$

b) Ist f stückweise stetig diffbar und überall stetig, bzw. sprungnormiert, dann konvergiert $f_n(x) \to f(x)$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$

f stetig und stückweise stetig diffbar mit $|f'| \le L$, so konvergiert $f_n(x) \to f(x)$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$

Wichtiges und sonstiges Nützliches

$\cos(k\pi) = (-1)^k$; $\sin(k\pi) = 0$; $e^{ik\pi} = (-1)^k = e^{-ik\pi}$

$\cos(k \cdot 0) = 1$; $\sin(k \cdot 0) = 0$; $(-1)^k = (-1)^{-k}$

$\cos((2j+1)\frac{\pi}{2}) = 0$; $\sin((2j+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^j$; $(-1)^k \cdot (-1)^k = 1$

$\sin(k\frac{\pi}{2}) = (-1)^j$ für $k = 2j+1$; k gerade : $k = 2j$ oder $\frac{(-1)^k + 1}{2}$

$\le$, $\ge$ $[\,]$ $\to$ ● ; $<$, $>$ $]\,[$ $\to$ ○ ; k ungerade: $k = 2j+1$ oder $\frac{(-1)^k - 1}{2}$

geg: $a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi k^2} & k \text{ ungerade} \end{cases}$ Wert von $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2}$ bestimmen durch auswerten bei $x = \pi$

$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k} + b_k \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}$

$-\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k^2} (-1)^k$

$-\frac{\pi}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2j+1)^2} \underbrace{(-1)^{2j+1}}_{=-1}$

Gesuchte Summe hat den Wert $\frac{\pi^2}{8}$

Fourier-Transformierte einer Funktion

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

mit $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(y)\,dy$

Laplace-Tabelle

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Ableitungsregeln

$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$

$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sF(s)-f(0)$

$f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

$f'''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^3F(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$

$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\dots-f^{(n-1)}f(0)$

Lösen von DGL mit Laplace

$y''+2y'+y=2e^{-t}$ mit $y(0)=1$, $y'(0)=1$

$y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s)$

$y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sY(s)-y(0)$ ...

In DGL einsetzen: $Y(s)(s^2+2s+1)+s+1=\frac{1}{s+1}$

$Y(s)=\frac{2}{(s+1)^3}-\frac{1}{s+1} \bullet\!\!-\!\!\circ y(t)=t^2e^{-t}-e^{-t}$

Wahrscheinlichkeit Begrifflichkeiten

Stochastisch unabhängig, falls $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$A\subseteq B$: Wenn A eintritt, dann auch B ; $B\setminus A$: B tritt ein, A nicht

$A\cap B$: Beide treten ein ; $A\cup B$: A oder B

$A\Delta B$: Entweder A oder B ; $P(A\uplus B)=P(A)\to P(B)$

$A\uplus B$: Ereignis A oder B tritt ein, wobei $A\cap B=\emptyset$

$P(\emptyset)=0$; $P(\Omega)=1$; $P(\Omega\setminus A)=1-P(A)$; $A\subset B\to P(A)\leq P(B)$

$P(B\setminus A)=P(B)-P(B\cap A)$; $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit, Formel von Bayes, totale Wahrscheinlichkeit

Wht. von A unter der Bed. B : $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Totale Wht.: $P(A)=\sum_{h=1}^{i}P(A\cap B_h)P(B_h)$

Formel von Bayes: $P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)\cdot P(B_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{h=1}^{i}P(A\cap B_h)P(B_h)}$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$; $P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A|B)\cdot P(B)$

$P(B|A)=\frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}$; $P(A|\bar{B})=\frac{P(A)-P(A|B)\cdot P(B)}{1-P(B)}$

$P(A\cap B)=P(A|B)\cdot P(B)$; $P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$; $P(A\cap B)=0{,}1$

	B	$\bar{B}$
A	0,1	0,4
$\bar{A}$	0,3	0,2

Erwartungswert E, Varianz σ^2, Streuung σ

$E(X) = x_1 P(X=x_1) + \dots + x_n P(X=x_n)$; $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

$\sigma^2(X) = V(X) = E[(X-\mu)^2]$; $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Chebychev, Stichproben~~...~~ Mittelwert, empirischer Mittelwert

- 1) $P[|X-\mu| \geq c] \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$; 2) $P[|X-\mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$

3) $P[X \geq \mu + k\sigma] \leq \frac{1}{1+k^2}$; 4) $P[\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

5) $P[\mu - h\sigma < X < \mu + k\sigma] \geq \frac{4(hk-1)}{(k+h)^2}$

- $\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ $x_k :=$ Messwerte, $n :=$ Anzahl unabhängiger Messungen
- $\hat{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ $X_n :=$ Unabhängige Wahrscheinlichkeiten

Hypergeometrische Verteilung $H(N,K,n)(k)$

Stichprobe ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge
Gesamtgröße N, K mögliche Treffer, Stichprobengröße n

$P(k) = \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$; $\underline{E = n\frac{K}{N}}$; $V = \sigma^2 = n \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}$

Binomialverteilung $B(n,t)$

n Experimente, Trefferwahrscheinlichkeit t ändert sich nicht, k Treffer

$P(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$; $\underline{E = nt}$; $V = \sigma^2 = nt(n-t)$

Poissonverteilung $P(\lambda)(k)$

Große n, kleines t

$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ mit $\lambda = nt$; $\underline{E = \lambda}$; $V = \sigma^2 \; (= \lambda)$

Anders je nach urspr. Verteilung

Normalverteilung

$B(n,t)$ wird durch $N(\mu, \sigma^2)$ approximiert mit $\mu = nt$ und $\sigma = \sqrt{nt(1-t)}$
Fehler der Annäherung $|\delta| < \frac{|1-2t|}{10} + \frac{1}{3\sigma^2} \leq \frac{1}{6\sigma}$ für $\sigma \geq 5$
$P(a \leq X \leq b) \approx \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, dt$ mit $\alpha = \frac{1}{\sigma}(a - \frac{1}{2} - \mu)$; $\beta = \frac{1}{\sigma}(b + \frac{1}{2} - \mu)$

$\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2} + \int_0^x \varphi(t)\, dt$; $\int_\alpha^\beta \varphi(t)\, dt = \int_0^\beta \varphi(t)\, dt - \int_0^\alpha \varphi(t)\, dt$

Urnenmodell	mit Reihenfolge	ohne Reihenfolge
ohne Zurücklegen	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
mit Zurücklegen	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

	B	$\bar{B}$	ges
A	0,28	0,12	0,40
$\bar{A}$	0,42	0,18	0,60
ges	0,70	0,30	1

Ergebnisse sind stochastisch unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$;
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$; $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$
Eintreffen des Ergebnisses von A hat keinen Einfluss auf Eintreffen von B

2023 6

Bonusblatt: Probeklausur.

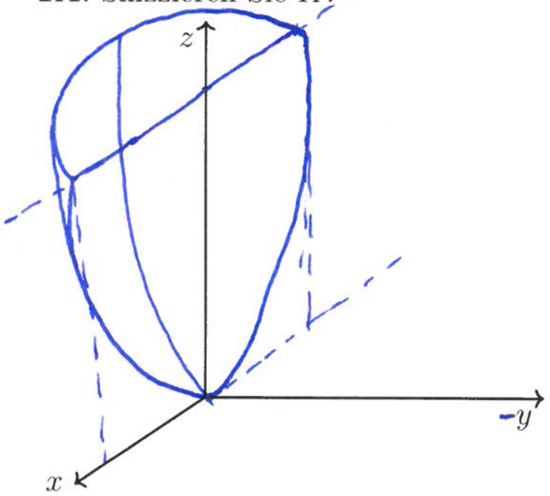
Abzugeben in den Gruppenübungen oder in ILIAS bis 2. Februar um 10:00 Uhr.

Aufgabe 1. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*10 Punkte*)

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le z \le 4 \\ x^2 + y^2 \le z \\ y \ge 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + y \\ 2x + z \\ 2y + x \end{pmatrix}.$$

1A. Skizzieren Sie K.



1

Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \boxed{\pi} \\ 0 \le z \le 4 \\ 0 \le \rho \le \boxed{\sqrt{z}} \end{cases}$$

2

1B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen des Körpers K:

$$\mathrm{Vol}_3(K) = \int_0^{\pi} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^4 \frac{1}{2} z \, dz \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \cdot 16 \, d\varphi$$

$$= 4\pi$$

$\mathrm{vol}_3(K) = 4\pi$

$\overline{\quad}$
2

1C. Die Randfläche ∂K setzt sich aus drei Teilen zusammen und zwar dem Deckel D (mit $z = 4$), der Paraboloidfläche P (mit $z = x^2 + y^2$) und dem Schnitt T mit der xz-Ebene (mit $y = 0$).

Wir parametrisieren P und T durch

$$\Phi_P : [0,2] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \Phi_T : \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2,\ x^2 \le z \le 4\} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit}$$

$$\Phi_P \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \rho^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi_P}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi_P}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2\rho^2\cos\varphi \\ -2\rho^2\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix}}$$

$\cos\varphi \quad -\rho\sin\varphi$
$\sin\varphi \quad \rho\cos\varphi$

$$\Phi_T \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi_T}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi_T}{\partial z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$1 \quad 0$
$0 \quad 0$

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Fluss von $F = \operatorname{rot}(f)$ durch P und T nach außen.

$$\int_P F \cdot dS = \int_P F(\phi_P(t)) \cdot n_P \, dt = \int_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\rho^2\cos\varphi \\ -2\rho^2\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix} d(\rho,\varphi)$$
$$= \int_0^\pi \int_0^2 -2\rho^2\cos\varphi - 2\rho^2\sin\varphi + \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^\pi -\frac{2}{3} \cancel{\pi}2^3(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2}\cancel{\pi}2^2 \, d\varphi$$
$$= \int_0^\pi -\frac{16}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi) + 2 \, d\varphi = -\frac{16}{3}(+1) + 2\pi + \frac{16}{3}(-1) + 0$$
$+\sin \quad -\cos$
$$= -\frac{32}{3} + 2\pi$$

$$\int_T F \cdot dS = \int_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \, d(x,z) = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} -1 \, dz \, dx = \int_{-2}^{2} -4 + x^2 \, dx$$
$$= \left[-4x + \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \left(-8 + \frac{8}{3}\right) - \left(8 - \frac{1}{3}\cdot 8\right) = -16 + \frac{16}{3}$$
$$= -\frac{32}{3}$$

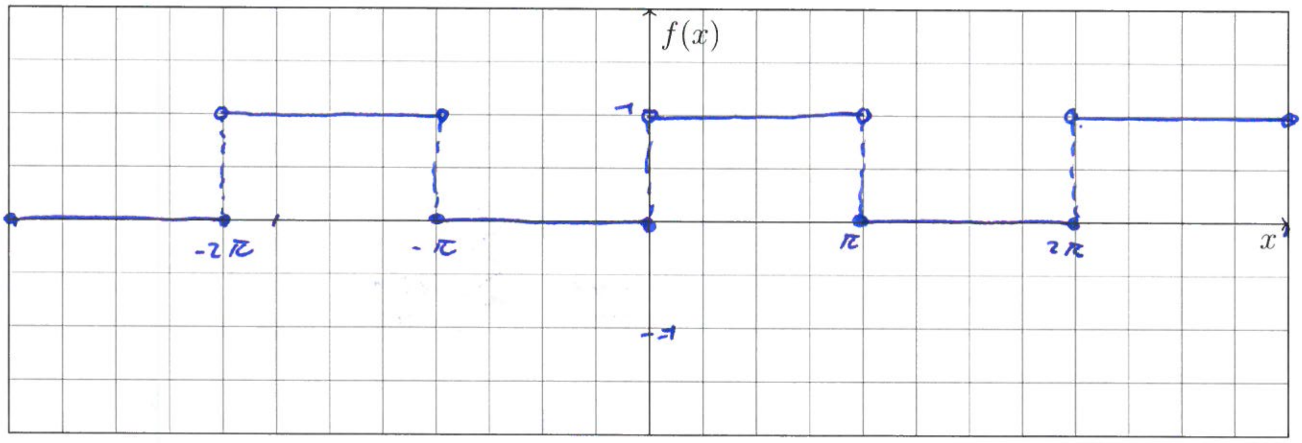
Sei $\Gamma = \partial D$ orientiert gegen den Uhrzeigersinn. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f \cdot d\Gamma$.

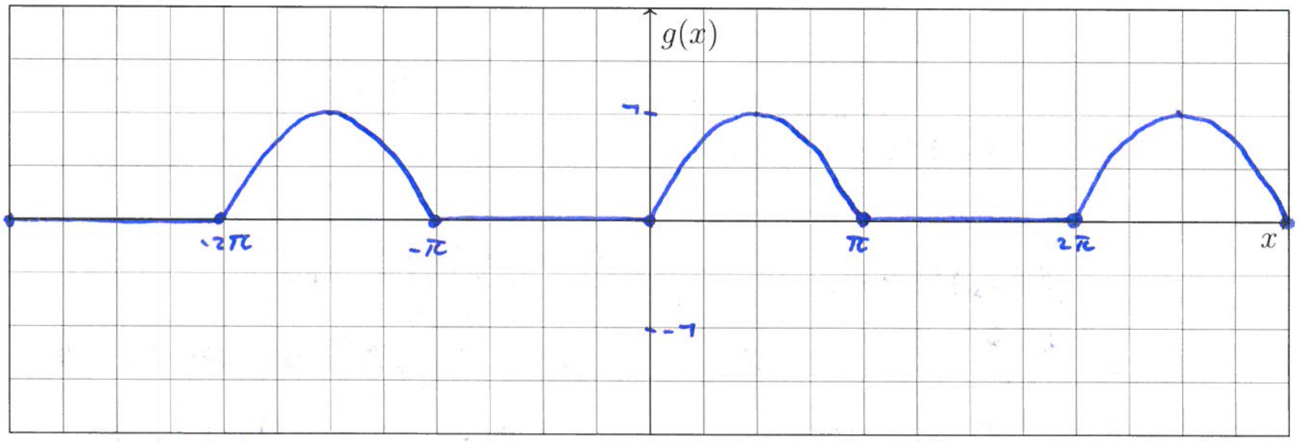
$$\int_\Gamma f \cdot d\Gamma = \int f(s) \cdot ds = \int_{\text{Fläche}} \operatorname{rot} f(x,y) \, d(x,y) =$$
$$= \int_P F \cdot dS + \int_D F \cdot dS = -2\pi$$
$+$

Aufgabe 2. *Fourier-Reihen (10 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion definiert durch $f(x) = 1$ für $0 < x < \pi$ und $f(x) = 0$ für $\pi \leq x \leq 2\pi$.

2A. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x)$ und $g(x) = f(x)\sin(x)$ auf dem Interval $[-3\pi, 3\pi]$.





2

2B. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier-Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f im Punkt $x = 0$.

$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{\frac{1}{2}}$

1

2C. Berechnen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k = 0, \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade}, \\ -\frac{i}{\pi k} & \text{für } k \neq 0 \text{ gerade}. \end{cases}$$

upsi...

/3

2D. Folgern Sie die Koeffizienten γ_k der komplexen Fourier-Reihe $g(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

Erinnerung: Dank der Euler-Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ gilt

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

$$\gamma_k = \begin{cases} & \text{für } k = 1. = -\frac{i}{4} \\ +\frac{i}{4} & \text{für } k = -1. \\ -\frac{i}{2}\left(-\frac{i}{\pi(k-1)} + \frac{i}{\pi(k+1)}\right) \quad \frac{1}{(k^2-1)\pi} & \text{für } k \text{ gerade}, \\ 0 & \text{für } k \neq \pm 1 \text{ ungerade}. \end{cases}$$

/4

Aufgabe 3. *Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (10 Punkte)*

3A. Betrachten Sie die folgende homogene lineare Differentialgleichung:

$$y^{(4)}(t) = y(t).$$

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$$p(x) = \boxed{x^4 - 1 = (x^2-1)^2(x+1)^2 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)}\,.$$

/3

3B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der oben genannten Differentialgleichung.

$$y(t) = \boxed{c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{it} + c_4 e^{-it}}\,.$$

/1

3C. Betrachten Sie nun die folgende lineare Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - y(t) = 4\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Benutzen Sie den richtigen Ansatz, um eine partikuläre Lösung zu finden

$$\text{Ansatz: } y(t) = \boxed{c_5\, t e^{-t}}\,.$$

/2

$$\text{Partikuläre Lösung: } y(t) = \boxed{-te^{-t}}\,.$$

/2

3D. Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y^{(4)}(t) - y(t) = 4\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{mit} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 3, y'''(0) = -2.$$

$$y(t) = \boxed{-te^{-t} + e^{t}}\,.$$

/2

Aufgabe 4. *Charakteristikmethode (10 Punkte)*

Gesucht werden Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$y\partial_x u(x,y) + x\partial_y u(x,y) = 4xyu \qquad \text{mit} \quad u(0,y) = \exp(y^2).$$

4A. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

$$x'(t) = \boxed{y(t)}\,, \qquad x(0) = 0,$$

$$y'(t) = \boxed{x(t)}\,, \qquad y(0) = y_0,$$

$$z'(t) = \boxed{4\,x(t)\,y(t)\,z(t)}\,, \qquad z(0) = \boxed{\exp(y_0^2)}\,.$$

/2

4B. Betrachten Sie erst mal $x(t)$ und $y(t)$. Sie haben ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem in der Form $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gefunden.

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{4} \end{pmatrix}$

$\lambda^2 - 1$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwert $\lambda_1 = \boxed{1}$ mit Eigenvektor $v = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$,

Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{-1}$ mit Eigenvektor $w = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}}$,

2

4C. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (abhängig von y_0) für das homogene lineare Differentialgleichungssystem in $(x(t), y(t))$, das Sie gefunden haben.

$x(t) = \boxed{\frac{1}{2} y_0 e^t - \frac{1}{2} y_0 e^{-t} \quad = y_0 \sinh(t)}$,

$y(t) = \boxed{\frac{1}{2} y_0 e^t + \frac{1}{2} y_0 e^{-t} \quad = y_0 \cosh(t)}$.

2

4D. Nach Einsetzen von $x(t)$ und $y(t)$ sieht die Differentialgleichung für $z(t)$ folgendermaßen aus:

$$z'(t) = y_0^2(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t})z(t)$$

$\int \frac{z'(t)}{z(t)}\,dt = \int y_0^2(e^{2t} - e^{-2t})\,dt \rightarrow \ln(z(t)) = \frac{1}{2} y_0^2 (e^{2t} + e^{-2t})$

$z(t) = e^{\frac{1}{2} y_0^2 (e^{2t} + e^{-2t})}$

Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems für $z(t)$:

$z(t) = \boxed{\exp\left(\frac{1}{2} y_0^2 (e^{2t} + e^{-2t})\right)}$.

2

4E. Bestimmen Sie eine explizite Lösung (nur von x und y abhängig) der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung:

$u(x, y) = \boxed{\exp\left(\frac{1}{2}(y^2 - x^2)\left(\left(\frac{y+x}{y-x}\right) + \left(\frac{y-x}{y+x}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}((x+y)^2 + (x-y)^2)\right) = \exp(x^2 + y^2)}$. ✓

2

~~$x(t) = \ldots \rightarrow y_0 = \frac{x}{\sinh(t)}$~~

~~$y(t) = y_0 \cosh(t) \rightarrow y(t) = \frac{x \cosh(t)}{\sinh(t)} = \frac{x(e^t + e^{-t})}{2(e^t - e^{-t})}$~~ ...

Aufgabe 5. *Wahrscheinlichkeitsteorie (10 Punkte)*

$k\backslash\mu$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
0	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025
1	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337	0.0225	0.0149
2	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842	0.0618	0.0446
3	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404	0.1133	0.0892
4	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755	0.1558	0.1339
5	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755	0.1714	0.1606
6	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462	0.1571	0.1606
7	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044	0.1234	0.1377
8	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653	0.0849	0.1033
9	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363	0.0519	0.0688

Tabelle 1: Werte der Poisson-Dichtefunktion $p_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu}$.

C_1 C_2 C_3

5A. Eine Wandervogelgattung überwintert in Ägypten (25%), Algerien (35%), Äthiopien (40%). Im Sommer kommen die Vögel nach Europa. 9% der Vögel aus Ägypten, 13% der Vögel aus Algerien und 8% der Vögel aus Äthiopien verbringen den Sommer in Belgien.

Berechnen Sie den Prozentsatz der Vögel dieser Gattung, die in Belgien übersommert.

$$P(B) = P(C_1)\cdot P(B|C_1) + P(C_2)\cdot P(B|C_2) + P(C_3)\cdot P(B|C_3)$$
$$= 0{,}25 \cdot 0{,}09 + 0{,}35 \cdot 0{,}13 + 0{,}4 \cdot 0{,}08$$
$$= 0{,}0225 + 0{,}0455 + 0{,}032$$
$$= 0{,}100 \to 10\%$$

$,0225$
$,0465$
$+\cancel{,022}$
$,100$

2

Ein Ornithologe forscht in Belgien. Er fängt einen Vogel dieser Gattung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Vogel *nicht* aus Ägypten kommt.

$$\bar{P}(C_1|B) = 1 - \frac{P(B|C_1)\,P(C_1)}{P(B)}$$
$$= 1 - \frac{0{,}09\cdot 0{,}25}{0{,}1}$$
$$= 1 - 0{,}225$$
$$= 77{,}5\%$$

2

5B. Auf der Welt gibt es geschätzt 10 Millionen Vögel dieser Gattung. Die meisten Vögel haben einen schwarzen Schnabel, aber 0.2% davon haben einen gelben Schnabel. Ein Ornithologenteam fängt nun zufällig 1500 Vögel.

Was ist die erwartete Anzahl gefangener Vögel mit *schwarzem* Schnabel? $\boxed{1497}$.

/2

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Forscher genau zwei Vögel mit *gelbem* Schnabel gefangen haben? (Geben Sie nur die Formel für den exakten Wert an, ohne den Wert auszurechnen.)

Hypogeometr. Verteilung keine Tinte mehr :)

$$P(2) = \frac{\binom{20\,000}{2}\binom{10\,980\,000}{1498}}{\binom{10\,000\,000}{1500}}$$

/2

Berechnen Sie explizit mithilfe der Tabelle 1 eine geschickte Approximation von dieser Wahrscheinlichkeit.

Poisson Verteilung: $P(2) = \frac{3^2}{2!} e^{-2}$ $\mu = 3,\ k = 2$

$= 0{,}2240$

$\Rightarrow 22{,}4\%$

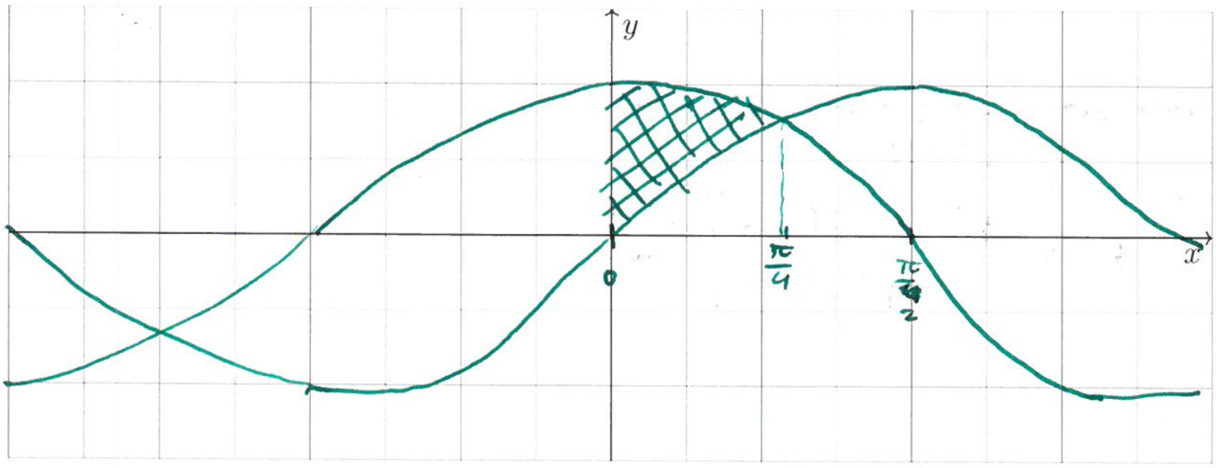
/2

Aufgabe 6. *Integration (10 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi/4}\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

6A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der xy-Ebene.



/2

6B. Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in y-Richtung:

$\boxed{\sin(x)} \le y \le \boxed{\cos(x)}$ und $\boxed{0} \le x \le \boxed{\frac{\pi}{4}}$

/4

6C. Bestimmen Sie das Integral.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sin x}^{\cos x} xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_{\sin x}^{\cos x} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(-\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x - x\sin^2 x\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\left(\tfrac{1}{2}(1+\cos(2x)) - \tfrac{1}{2}(1-\cos(2x))\right)dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x) - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)\right)dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x\cos(2x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\left[\tfrac{1}{4}(2x\sin(2x) + \cos(2x))\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{\pi}{2} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{\pi - 2}{16}$$

/4

(2)

c) $$c_k = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-ikt}\cdot 1\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \underbrace{e^{-ikt}\cdot 0}_{=0}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(e^{-ik\pi}-1\right)\frac{1}{-ik}$$

$$= -\frac{i}{2\pi k}\left(e^{-ik\pi}-1\right)$$

$$= -\frac{i(-1)^k}{2\pi k} + \frac{i}{2\pi k}$$

d) $$\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{2i}e^{-ikt}\cdot(e^{it}-e^{-it})\right)dt$$

$$= \frac{1}{4i\pi}\left(\int_0^{2\pi} e^{-ikt}e^{it}\,dt - \int_0^{2\pi} e^{-ikt}e^{-it}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{4i\pi}\left(\int_0^{2\pi} e^{it(1-k)}\,dt - \int_0^{2\pi} e^{it(-1-k)}\,dt\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}} \qquad \underbrace{e^{-ik(k-1)}}_{c_{k-1}} \qquad \underbrace{e^{-it(k+1)}}_{c_{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(c_{k-1}-c_{k+1}\right)$$

$$= +\frac{1}{2i}\left(c_{k-1}-c_{k+1}\right)$$

$$= -\frac{i}{2}\left(c_{k-1}-c_{k+1}\right)$$

NR: $-\frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{\pi k}}^{0}\right)$

$= -\frac{i}{4} + \cancel{\frac{1}{2\pi k}}^{0}$

$= -\frac{i}{4} + \cancel{\frac{2}{\pi}}^{0}$

(3)

c) $$y(t) = cte^{-t}$$

$$y'(t) = -cte^{-t} + ce^{-t}$$

$$y''(t) = -ce^{-t} + cte^{-t} - ce^{-t} = -2ce^{-t} + cte^{-t}$$

$$y'''(t) = 2ce^{-t} + ce^{-t} - cte^{-t} = 3ce^{-t} - cte^{-t}$$

$$y''''(t) = \quad " \quad " \quad = -4ce^{-t} + cte^{-t}$$

$$-4ce^{-t} + cte^{-t} - cte^{-t} = 4e^{-t} \to c = -1$$

d) $$y(t) = -te^{-t} + c_1e^{t} + c_2e^{-t} + c_3e^{it} + c_4e^{-it}$$

$y(0) = 1$ $\qquad y'(t) = te^{-t} - e^{-t} + c_1e^{t} - c_2e^{-t} + ic_3e^{it} - ic_4e^{-it}$

$y'(0) = 0$ $\qquad y''(t) = 2e^{-t} - te^{-t} + c_1e^{t} + c_2e^{-t} - c_3e^{it} + c_4e^{-it}$

$y''(0) = 1$ $\qquad y'''(t) = -3e^{-t} + te^{-t} + c_1e^{t} - c_2e^{-t} - ic_3e^{it} - ic_4e^{-it}$

$y'''(0) = -2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & -i & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid -Z_2 \\ \mid -Z_4 \\ \mid \\ \mid -Z_3 \end{array}$$

$c_2 = 0 \quad c_1 = 1$

$c_3 = 0 \; ; \; c_4 = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -2i+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -i+1 & i-1 & 0 \end{array}\right) \leftarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1-i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & i+1 & -i-1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid +Z_4 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(4)

c) $z(t) = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad C_1 - C_2 = 0 \qquad C_1 = C_2$

$\qquad C_1 + C_2 = y_0 \qquad C_1 = \frac{1}{2} y_0$

e) $y(t) = y_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{t} + e^{-t})$

$y(t) = \frac{1}{x}(e^{t} - e^{-t}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{t} + e^{-t})$

$y(t) = \frac{1}{2x}(e^{t2} - e^{-t\cdot 2}) = \frac{1}{x} \sinh(2t)$

$t = \frac{1}{2} \sinh^{-1}(xy)$

$\cancel{\exp(\frac{1}{2}(\frac{x}{\sinh(t)})^2 (\exp(2\sinh^{-1}(xy)) + \exp(2\sinh^{-1}(xy))))}$

$y + x = y_0 e^{t} \qquad \rightarrow y_0 = e^{-t}(x+y)$

$y - x = y_0 e^{-t} \qquad \rightarrow y - x = e^{-t}(x+y)e^{-t}$

$y - x = e^{-2t}(x+y)$

$\frac{y-x}{x+y} = e^{-2t}$

$\ln\left(\frac{y-x}{x+y}\right) = -2t$

$t = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y-x}{y+x}\right)$

$y_0 = e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y-x}{y+x}\right)}(x+y)$

$= \sqrt{\frac{y-x}{y+x}}(x+y)$

$= \sqrt{\frac{y-x}{y+x}(x+y)^2}$

$= \sqrt{(y-x)(y+y)}$

$= \sqrt{y^2 - x^2}$

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4, eigenhandgeschrieben.
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Sofern nicht anders angegeben, ist nur das Endergebnis einzutragen. Andernfalls sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Als **Bonus** ausgewiesene Aufgaben können bearbeitet werden, um Bonuspunkte zu sammeln. Diese sind möglicherweise etwas kniffliger und zählen nicht zur Maximalpunktzahl.
- Neben den Ergebnissen aus der Vorlesung und den Übungen können Sie folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte ohne Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	$\sin(x)\cos(x)+x$	$x-\sin(x)\cos(x)$	$\sin(x)^2$
$f'(x)$	$2\cos(x)^2$	$2\sin(x)^2$	$2\sin(x)\cos(x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (Integrierender Faktor — 4 Punkte)
Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung $f(x,y) + g(x,y)y' = 0$ mit $f(x,y) = y^2 + y\sinh(x)$ und $g(x,y) = xy$.

1. Bestimmen Sie die Rotation $\mathrm{rot}(f,g)$.

$$\mathrm{rot}(f,g) = \boxed{y - 2y - \sinh(x)}.$$
$$= -y - \sinh(x)$$

2. Finden Sie einen integrierenden Faktor λ für obige DGL.

$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\mathrm{rot}(f,g)}{f}$ ↯ $\frac{-y-\sinh(x)}{y^2+y\sinh(x)}$

$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{-\mathrm{rot}(f,g)}{g} = \frac{1}{x} + \frac{\sinh(x)}{xy}$ ↯

$$\lambda(x,y) = \boxed{\frac{1}{y}}. \quad ; c = 1$$

3. Geben Sie ein Potential Φ der Differentialgleichung an.

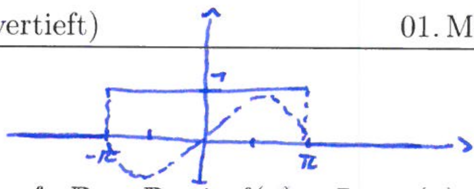
$$\Phi(x,y) = \boxed{xy + \cosh(x) + c}.$$

4. Geben Sie alle Lösungen $y :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ der DGL an.

$$y(x) = \boxed{\frac{c - \cosh(x)}{x}}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

5. (Bonus, 1 Punkt) Geben Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ der DGL an.

$$y(x) = \begin{cases} \frac{c_1 - \cosh(x)}{x} & \text{für } x > 0 \\ \frac{c_2 - \cosh(x)}{x} & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



Aufgabe 2 (Fourier–Transformation — 3 Punkte)

1. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathbf{I}_{[-\pi,\pi]}(x)\sin(x)$.

Begründete Antwort:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\xi x} \sin(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\xi x}\frac{e^{ix}}{2i}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\xi x}\frac{e^{-ix}}{2i}\,dx\right)$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(1-\xi)}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix(1+\xi)}\,dx\right)$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{1}{\underbrace{i-i\xi}_{i(1-\xi)}} e^{ix(1-\xi)}\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{1}{\underbrace{-i-i\xi}_{-i(1+\xi)}} e^{-ix(1+\xi)}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{i(1-\xi)}\left(e^{i\pi(1-\xi)} - e^{i\pi(1-\xi)}\right) + \frac{1}{i(1+\xi)}\left(e^{-i\pi(1+\xi)} - e^{i\pi(1+\xi)}\right)\right)$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{\xi-1}\left(\frac{\overbrace{e^{i\pi}}^{=-1}}{e^{i\pi\xi}} - \frac{e^{i\pi\xi}}{\underbrace{e^{i\pi}}_{=-1}}\right) + \frac{i}{\xi+1}\left(\overbrace{e^{i\pi}}^{=-1} e^{-i\pi\xi} - \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} e^{i\pi\xi}\right)\right)$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{\xi-1}\underbrace{\left(-e^{-i\pi\xi} + e^{i\pi\xi}\right)}_{\sin(\pi\xi)} - \frac{i}{\xi+1}\underbrace{\left(e^{i\pi\xi} - e^{-i\pi\xi}\right)}_{\sin(\pi\xi)}\right)$$

$$= \frac{\sin(\pi\xi)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{\xi-1} - \frac{i}{\xi+1}\right) = \frac{i\sin(\pi\xi)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\xi+1-(\xi-1)}{(\xi-1)(\xi+1)}\right)$$

$$= \frac{i\sin(\pi\xi)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{\xi^2-1}\right) = \frac{2i\sin(\pi\xi)}{\sqrt{2\pi}(\xi^2-1)}$$

2. (Bonus, 1 Punkt) Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals:

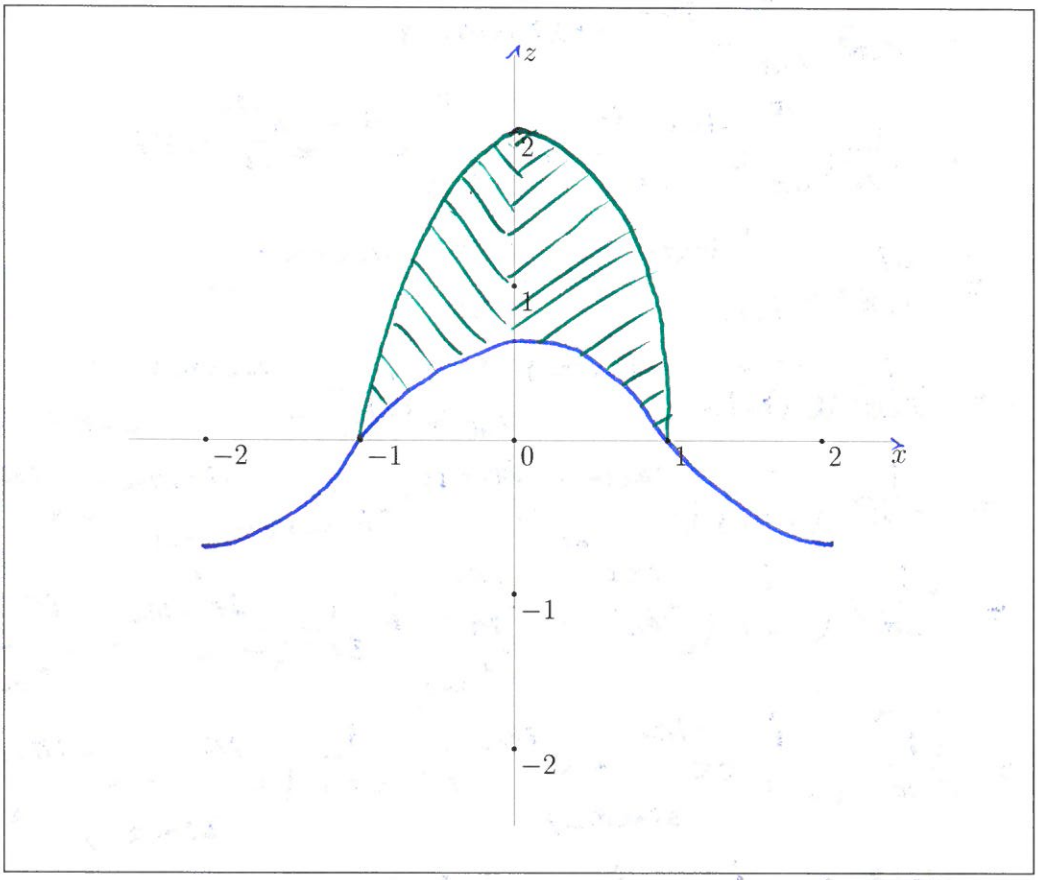
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi^2}{2} \quad ???}.$$

Aufgabe 3 (Integration im Raum — 12 Punkte)
Der Rotationskörper K sei definiert durch

$2-2(x^2+y^2)$

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) \le z \le 2 - 2x^2 - 2y^2 \right\}.$$

1. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der Ebene $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, z \in \mathbb{R}\}$.



2. Parametrisieren Sie K durch Zylinderkoordinaten $\Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$:

$$K = \left\{ \Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in [0, 2\pi], \quad \boxed{0} \le r \le \boxed{1}, \quad \boxed{\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2} r)} \le z \le \boxed{2-2r^2} \right\}.$$

3. Berechnen Sie das Volumen von K.
Hinweis: Es gilt $\int_0^{\pi/2} u\cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} - 1$.

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}r)}^{2-2r^2} r\,dz\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r-2r^3-\frac{r}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2}r)\,dr\,d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 1-\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)d\varphi$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi^2}\right)$$

$$= \pi - 2 + \frac{4}{\pi}$$

Nebenrechnung:

Begründete Antwort:

$$\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]$$

$$\left(\tfrac{1}{2}(2-2r^2)\right)^2-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{\pi}{2}r)\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(4-8r^2+4r^4)-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}\cos(\tfrac{\pi}{2}r)^2\right)$$

$$= 2-4r^2+2r^4-\tfrac{1}{8}\cos(\tfrac{\pi}{2}r)^2$$

$$\int \cos(u)\,du \qquad u=\tfrac{\pi r}{2} \quad \tfrac{du}{dr}=\tfrac{\pi}{2} \to dr = \tfrac{2\,du}{\pi}$$

$$\tfrac{r\pi}{2\pi} \to \tfrac{u}{\pi}\cdot\tfrac{2}{\pi}$$

$$= \tfrac{2}{\pi^2}\left(\tfrac{\pi}{2}-1\right)$$

4. Durch $\Psi(\varphi, r) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 2-2r^2)$ wird eine Teilfläche M des Randes von K parametrisiert. Berechnen Sie die Jacobi–Matrix Ψ' und das Kreuzprodukt $\partial_\varphi\Psi \times \partial_r\Psi$.

$$\Psi'(\varphi, r) = \cancel{\begin{pmatrix} -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & -4r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$$\partial_\varphi\Psi \times \partial_r\Psi = \begin{pmatrix} -4r^2\cos\varphi \\ -4r^2\sin\varphi \\ -r \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -4r \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cancel{-r\sin\varphi} & \cancel{\cos\varphi} \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -4r \\ -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \\ \cancel{0} & \cancel{-4r} \end{matrix}$$

5. Das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -y-x \\ 2y^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Fluss von f durch M nach *außen*.

Begründete Antwort:

$$\int_M f \cdot dS = \int f(\varphi) \cdot n \cdot r \, d(\varphi, r)$$

$$= \int_{(\varphi,r)} \begin{pmatrix} 2r\cos(\varphi) + r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi - r\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4r^2\cos\varphi \\ -4r^2\sin\varphi \\ -r \end{pmatrix} \cdot r \, d(\varphi, r)$$

$$= \int_{(\varphi,r)} -8r^3\cos\varphi^2 - 4r^3\cancel{\cos\varphi\sin\varphi} + 4r^3\sin\varphi^2 + 4r^3\cancel{\cos\varphi\sin\varphi} - 2r^3\sin\varphi^2 \, d(\varphi,r)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3(-8\cos\varphi^2 + 4\sin\varphi^2 - 2\sin\varphi^2) \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\cos\varphi^2 + \frac{1}{2}\sin\varphi^2 \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} -1 - \cos(2\varphi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2\varphi) \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\cos(2\varphi) \, d\varphi$$

$$= \frac{3}{2}\pi + 0$$

$$= \frac{3}{2}\pi$$

6. (Bonus, 2 Punkte) Bezeichne N die restliche Randfläche von K. Berechnen Sie die Divergenz von f und schließen Sie auf den Wert des Flusses von f durch N nach *außen*.

$\operatorname{div}(f) = \boxed{2-1+0=1}$, $\quad \int_N f \cdot dS = \boxed{\int_K f \cdot dS - \int_M f \cdot dS}$

$$= \int \operatorname{div} f \, dV = \operatorname{vol}_3 K \cdot 1$$
$$= \pi - 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\pi$$
$$= -\frac{1}{4}\pi - 2$$

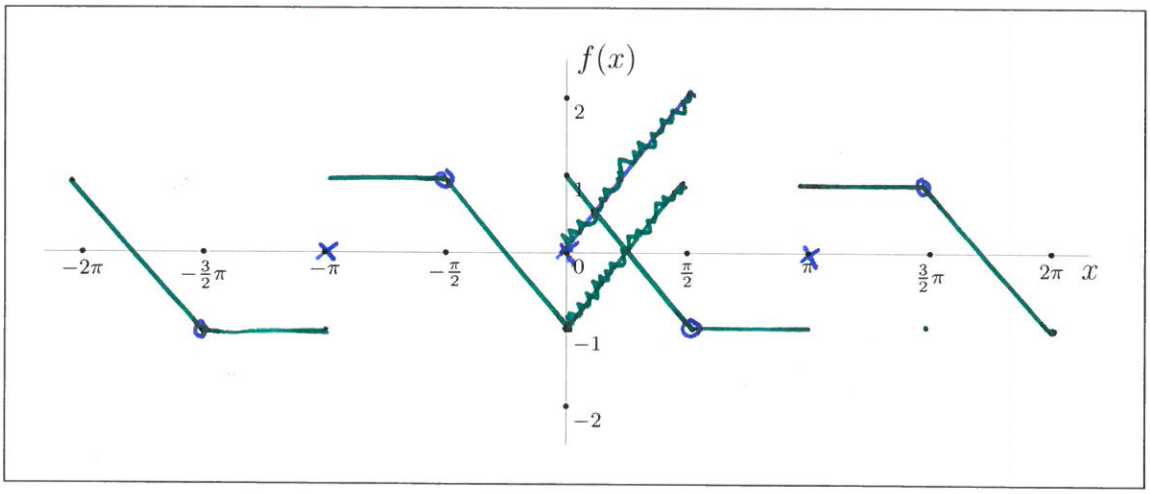
Aufgabe 4 (Fourier–Reihen — 11 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die ungerade 2π-periodische Funktion mit $f(x) = 1 - \frac{4}{\pi}x$ für $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ und $f(x) = -1$ für $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

1. Was sind die Werte von f in 0, π, $-\pi$?

$$f(-\pi) = \boxed{0}, \qquad f(0) = \boxed{0}, \qquad f(\pi) = \boxed{0}.$$

2. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$. Kennzeichnen Sie dabei Unstetigkeitsstellen.



3. Bezeichne S_f die Fourier—Reihe von f. Bestimmen Sie die reellen und komplexen Darstellungen von S_f.

   Hinweis: Es gilt $\int_0^{\pi/2} x \sin(tx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2}\sin(\frac{\pi t}{2}) - \frac{\pi}{2t}\cos(\frac{\pi t}{2})$.

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \text{ mit} \qquad a_k = \boxed{0} \quad (k \geq 0),$$

$$b_{2k+1} = \boxed{\frac{8(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2}} \quad (k \geq 0), \qquad b_{2k} = \boxed{-\frac{4}{\pi k}} \quad (k > 0).$$

$$S_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \text{ mit} \qquad c_0 = \boxed{0},$$

$$c_{2k+1} = \boxed{\frac{4i(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}}, \qquad c_{2k} = \boxed{-\frac{i}{\pi k}}.$$

4. (Bonus, 2 Punkte) Berechnen Sie $S_f(\frac{\pi}{2})$ und schließen Sie auf den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

$$S_f(\pi/2) = \boxed{-1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}.$$

Aufgabe 5 (Lineare Differentialgleichungssysteme — 6 Punkte)

Zu lösen ist das lineare, homogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - 3y_3, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 - 6y_3, \\ y_3' = y_1 + y_2 - 3y_3, \\ y_4' = y_1 + y_2 - 3y_3 - y_4. \end{cases} \tag{H}$$

1. Formulieren Sie (H) in der Gestalt $y' = Ay$ für eine Matrix A:

$$A = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

2. Die Matrix A besitzt die Jordan–Normalform

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \lambda$$

$A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $A \cdot v_2 = v_1$

Geben Sie eine Basis $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ des $\mathbb{C}^4$ an, die obige Jordan–Normalform realisiert.

$$v_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie eine reelle Fundamentalmatrix Y für (H):

$$Y(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -e^{-t} & 0 \\ 3 & 3t & e^{-t} & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}}.$$

4. Lösen Sie (H) zu den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 2$ und $y_4(0) = 3$:

$$y(x) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -4 & +6e^{-t} & +0 \\ 12 & -12t & -6e^{-t} & +0 \\ 6 & -4t & +0 & +0 \\ 0 & -4 & +0 & +7e^{-t} \end{pmatrix}}.$$

Wir betrachten nun das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - 3y_3 + 1, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 - 6y_3 - 3x, \\ y_3' = y_1 + y_2 - 3y_3 - x, \\ y_4' = y_1 + y_2 - 3y_3 - y_4 + 2. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

5. (Bonus, 2 Punkte) Nutzen Sie den Ansatz $y(x) = Y(x) \cdot c(x)$, um eine partikuläre Lösung y von (I) mit Anfangswerten $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 0$ und $y_4(0) = 0$ zu bestimmen. Berechnen Sie dazu zunächst $c'(x)$.

$$c'(x) = \boxed{\begin{pmatrix} -2x \\ 7 \\ 0 \\ e^{x} \end{pmatrix}}, \qquad y(x) = \boxed{\begin{pmatrix} x+7 \\ 3x \\ x \\ x+2-2e^{-x} \end{pmatrix}}.$$

$y'(x) = Y(x)' \cdot c(x) + Y(x) \cdot c'(x)$

$A\,y(x) = Y(x)' \cdot c(x) + Y(x) \cdot c'(x)$

$c'(x) = \frac{A\,y(x)}{Y(x)} - \frac{Y'(x)}{Y(x)} c(x)$

$y'(x) = A\,y(x) + b(x)$

$Y'(x) = A\,Y(x)$

$\rightarrow Y'(x)c(x) + Y(x)\,c'(x) = A\,y(x) + b(x)$

$= A\,Y(x) \cdot c(x) + b(x)$

$Y(x)\,c'(x) = b(x)$

Aufgabe 6 (Partielle Differentialgleichungen — 8 Punkte)

Wir untersuchen die für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definierte partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = -u, \qquad u(0,y) = \frac{1}{y^2+1}. \tag{P}$$

Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ fest und $(X(t), Y(t))$ die Charakteristik der Differentialgleichung (P) mit Anfangswert $(X(0), Y(0)) = (0, y_0)$. Sei weiter $U(t) = u(X(t), Y(t))$.

1. Formulieren Sie die charakteristischen Gleichungen zu (P).

$X'(t) = \boxed{1}$, $X(0) = 0$,

$Y'(t) = \boxed{2}$, $Y(0) = y_0$,

$U'(t) = \boxed{-U(t)}$, $U(0) = \dfrac{1}{y_0^2+1}$.

2. Lösen Sie die charakteristischen Gleichungen.

$$X(t) = \boxed{t + C_1 \to t},$$

$$Y(t) = \boxed{2t + C_2 \to 2t + y_0},$$

$$U(t) = \boxed{e^{-t} + C_3 \to \frac{e^{-t}}{y_0^2+1}}$$

3. Es sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wie sind t und y_0 zu wählen, sodass $(x, y) = (X(t), Y(t))$ gilt?

$$t = \boxed{x}, \qquad y_0 = \boxed{y - 2x}.$$

$y = 2x + y_0$

$y_0 = \ldots$

4. Schließen Sie auf die Lösung von (P):

$$u(x, y) = \boxed{\frac{e^{-x}}{(y-2x)^2+1}}.$$

5. (Bonus, 2 Punkte) Wir betrachten dieselbe Differentialgleichung mit anderen Anfangsbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = -u, \qquad u(x,0) = \frac{1}{x^2+1}. \tag{P'}$$

Besitzt diese eine eindeutige Lösung? Bestimmen Sie diese, falls ja, und begründen Sie, falls nein.

Begründete Antwort:

$x(t) = t + x_0$

$y(t) = 2t$

$u(t) = \frac{e^{-t}}{x_0^2+1}$

$x = \frac{y}{2} + x_0 \rightarrow x_0 = x - \frac{y}{2}$

$t = \frac{y}{2}$

$u(x,y) = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{(x-\frac{y}{2})^2+1}$

Charakteristische Kurven bleiben gleich

-> Eindeutige Lösung existiert weiter.

Aufgabe 7 (Wahrscheinlichkeitsrechnung — 7 Punkte)

Wir betrachten drei gezinkte Münzen A, B und C, die jeweils zwei Seiten haben: Kopf oder Zahl. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Münzwurf Kopf zu erhalten, beträgt jeweils 0.3, 0.6 und 0.75.

1. Wir wählen zufällig gleichverteilt eine der drei Münzen und werfen sie. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, Zahl zu erhalten?

$$P(\text{Zahl}) = \boxed{} \ \frac{9}{20}$$

2. Wir wählen zufällig gleichverteilt eine Münze aus und werfen sie. Das Ergebnis des Wurfs ist Kopf. Was ist die Wahrscheinlichkeit, die Münze A bzw. die Münze B gewählt zu haben?

$$P(A \mid \text{Kopf}) = \boxed{\frac{2}{11}}, \qquad P(B \mid \text{Kopf}) = \boxed{\frac{4}{11}}.$$

Für eine gezinkte Münze möchten wir die Wahrscheinlichkeit p schätzen, dass die Münze nach einem Wurf Kopf zeigt. Dazu werfen wir die Münze n mal. Es bezeichne X_n die Anzahl der erhaltenen Köpfe. Gesucht ist nun die Mindestzahl an Würfen, damit sich die Zahl X_n/n mit 80% Wahrscheinlichkeit p auf 0.01 annähert. Wir benutzen dazu den zentralen Grenzwertsatz ohne Berücksichtigung des Näherungsfehlers, sodass

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \leq 0.01\right) \approx \int_a^b \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi.$$

3. Berechnen Sie a und b als Funktionen von n und p.

$$a = -b, \qquad b = \boxed{\frac{0{,}01\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p\,(1-p)}}}. \quad ?$$

4. Bestimmen Sie näherungsweise $t \geq 0$, sodass $\int_{-t}^{t} \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}\xi = 0.8$ ist.

$$t \approx \boxed{1{,}29}.$$

5. (Bonus, 2 Punkte) Benutzen Sie die Ungleichung $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ für $x \in [0,1]$, um eine Schranke für b zu finden, die nur noch von n abhängt. Leiten Sie daraus einen möglichst kleinen Wert für n ab, für den $\int_a^b \frac{e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \, d\xi \geq 0.8$.

$b \geq \boxed{0{,}005 \cdot \sqrt{n}}$, ? $n \geq \boxed{66564}$. ?

(Hierbei muss n nicht in vollständig vereinfachter Form angegeben werden.)

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

2023 A HM 3 Klausur

1.2 $$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{-y-\sinh(x)}{y^2+y\sinh(x)} = \frac{-y-\sinh(x)}{(-y)(-y-\sinh(x))} = -\frac{1}{y}$$

$$\ln(\lambda(y)) = -\ln(y) + c$$

$$\lambda(y) = e^{-\ln(y)+c}$$

$$\lambda(y) = c \cdot \frac{1}{y}$$

1.3 $$\begin{pmatrix} y^2 + y\sinh(x) \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \end{pmatrix}$$

$$\int xy\,dy = \frac{1}{2}xy^2 + c(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}xy^2 + c(x) = \frac{1}{2}y^2 + c'(x) \overset{!}{=} y^2 + y\sinh(x)$$

$$c'(x) = \frac{1}{2}y^2 + y\sinh(x)$$

$$c(x) = \frac{1}{2}xy^2 + y\cosh(x) + c$$

$$\rightarrow \phi(x,y) = \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + y\cosh(x) + c$$

$$= (xy^2 + y\cosh(x)) \cdot \frac{1}{\lambda} + c \qquad \text{(Mit Integr. Faktor!!!)}$$

$$= xy + \cosh(x) + c$$

1.4 $$0 = xy + \cosh(x) \rightarrow y(x) = -\frac{\cosh(x)+c}{x}$$

4.3 $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt) f(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \sin(2nt)(1-\tfrac{4}{\pi}t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin(2nt)\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nt)\,dt - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2nt)\cdot t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2nt)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\cancel{\cos}(\tfrac{\pi}{2}t) + \underbrace{\cos(0)}_{1} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{t^2}\underbrace{\sin(\tfrac{\pi t}{2})}_{1} - \frac{\pi}{2t}\cancel{\cos}(\tfrac{\pi t}{2})\right) + \overset{-1}{\cos(\pi t)} - \cancel{\cos}(\tfrac{\pi}{2}t)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{4}{\pi t^2} - 1\right)$$

$$= \cancel{\frac{2}{\pi}} - \frac{8}{(\pi t)^2}$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cancel{\sin(nt)}\,dt + \int_{-\pi/2}^{0} \sin(nt)(1-\tfrac{4}{\pi}x)\,dt\right. +$$

$$\left. + \int_0^{\pi/2} +\sin(nt)(1-\tfrac{4}{\pi}x)\,dt + \int_{\cancel{\pi/2}}^{\pi} \cancel{-}\sin(nt)\right)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(kt)\,dt - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{4}{\pi}\cancel{t}\sin(kt)\,dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(kt)\,dt - \int_{0}^{\pi/2} \frac{4}{\pi}\cancel{t}\sin(kt)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\overset{1}{\cos(0)} + \overset{0}{\cos(-\tfrac{\pi}{2}k)} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{k^2}\overset{1}{\sin(\tfrac{\pi}{2}k)} - \frac{\pi}{2k}\overset{0}{\cos(\tfrac{\pi}{2}k)}\right) + -\overset{0}{\cos(\tfrac{\pi}{2}k)} + \overset{1}{\cos(0)} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{k^2}\overset{1}{\sin(\tfrac{\pi}{2}k)} - \frac{\pi}{2k}\overset{0}{\cos(\tfrac{\pi}{2}k)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-1 - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2} + 1 - \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{k^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot \cancel{2}\frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{k}$$

$$= -\frac{8}{\pi^2 k^2} \qquad \text{für } k=1 \quad ↯$$

For $k := 2k$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cancel{-1}\cancel{-1} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2k}\right) \cancel{+1} \cancel{+1} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{2k}\right)\right)$$

$$= -\frac{8\pi^{\cancel{2}}}{\pi^2 \cdot 2k}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)$$

5.4
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -e^{-t} & 0 \\ 3 & 3t & e^{-t} & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$y(t) = c_1 e^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 3t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$y_1(0) = 2$
$y_2(0) = 0$
$y_3(0) = 2$
$y_4(0) = 3$

$$\cancel{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & e^{-t} & 0 & 2 \\ 3 & 3t & e^{-t} & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & e^{-t} & 3 \end{array}\right)} \quad \cancel{I - 3 \cdot I3}$$

$$\cancel{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -e^{-t} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 & -6 \\ 1 & t & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & e^{-t} & 3 \end{array}\right) \rightarrow c_3 = 2\frac{1}{6}e^{-t}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} c_2 = -4 \\ c_3 = -6 \\ c_1 = 6 \\ c_4 = 7 \end{array}$$

5.5: $Y(x)\, c'(x) = b(x)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -e^{-t} & 0 \\ 3 & 3t & e^{-t} & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3t \\ -t \\ 2 \end{pmatrix} \quad | -3 \cdot z_3$$

$$\left(\begin{matrix} 0 & 1 & -e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^{-t} \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -t \\ 2 \end{matrix}\right)$$

$\rightarrow C_2'(t) = 1$

$\rightarrow C_3'(t) = 0$

$C_1'(t) = -2t$

$C_4'(t) = \cancel{\dots} + e^t$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -e^{-t} & 0 \\ 3 & 3t & e^{-t} & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x^2+C_1 \\ x+C_2 \\ 0+C_3 \\ e^x+C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+C_1 \\ -3x^2+3x^2 \\ -x^2+x^2 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} x+C_1 \\ 3C_1+3C_2x \\ C_1+C_2x \\ C_2+1+C_4e^{-x} \end{pmatrix}$$

$3 + 3C_2 \cdot 0 = 0$ ✓

7.1 $P(K) = P(A) \cdot P(K|A) + P(B) \cdot P(K|B) + P(C) \cdot P(K|C)$

$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}3 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}75$

$= 0{,}066 + 0{,}12 + 0{,}15$

$$\begin{array}{r} 0{,}27 \\ 0{,}066 \\ \hline 0{,}336 \end{array}$$

$= \frac{1}{3}(1{,}65)$

$= \frac{165}{300} = \frac{33}{60} = \frac{11}{20}$

$P(K) = \frac{9}{20}$

7.2 $P(A|K) = \frac{P(K|A)\, P(A)}{P(K)} = \frac{0{,}3 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{9}{20}} = \frac{6}{60} \cdot \frac{20}{11} = \frac{120}{540} = \cancel{\frac{240}{240}}$

$\cancel{\frac{24}{27}}\ \frac{12}{54} = \frac{6}{27}$

$= \frac{2}{9} = \frac{2}{11}$

$P(B|K) = \frac{P(K|B)\, P(B)}{P(K)} = \frac{0{,}6 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{9}{20}} = \frac{6}{30} \cdot \frac{20}{11} = \frac{120}{270}$

$= \frac{4}{9} = \frac{4}{11}$

7.3 n Würfe

$$\int_a^b \frac{e^{-\varepsilon^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[\frac{1}{\frac{2}{2} - \varepsilon} e^{-\varepsilon^2/2} \right]_a^b \right)$$

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschriebene Notizen
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	1 /1	0 /12	9 /12	3,5 /8	5 /8	10 /12	6,5 /11	0 /10	35 /74
		↳ 6							47

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Seien $(f_k : [0,5] \to [-999, 999])_{k\in\mathbb{N}}$ stetige Funktionen mit punktweiser Grenzfunktion f, also $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für jedes $x \in [0,5]$. Gilt dann $\lim_{k\to\infty} \int_0^5 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2B. Gibt es eine stetige und 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deren Fourier–Koeffizienten die Ungleichung $|c_k| \ge 1/k^2$ für alle $k = 1, 2, 3, \dots$ erfüllen?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{}$ 2

2C. Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ besitze eine Basis aus Hauptvektorketten der Länge 2 und 3 zum Eigenwert $\lambda = 0$. Welche Dimension hat demnach der Kern von A?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2D. Wir suchen die Lösungen $(u, v) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems $u''' = u' + 3v$ und $v'' = 2v' - u$. Finden sich darunter sechs linear unabhängige Lösungen?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{2}$

2E. Sie werfen unabhängig zwei faire Würfel. Sei A das Ereignis „Der erste Würfel zeigt Augenzahl 1“ und B das Ereignis „Der zweite Würfel zeigt Augenzahl 2“ sowie C das Ereignis „Beide Würfel zeigen dieselbe Augenzahl“. Ist die Familie (A, B, C) stochastisch unabhängig?

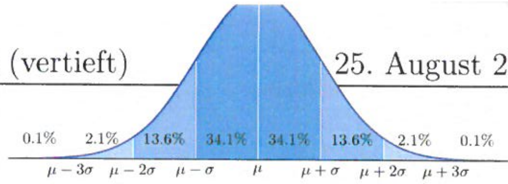
☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{2}$

2F. Sie suchen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $y\,\partial_x u(x, y) - x\,\partial_y u(x, y) = 0$ und $u(x, 0) = \cos(x)$. Aus $X' = Y$, $Y' = -X$ erhalten Sie Kreise um $(0, 0)$ als Charakteristiken. Existiert demnach eine Lösung u?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

$\overline{2}$



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit* (12 Punkte)

3A. Sie wiederholen 60 000 mal unabhängig ein Experiment mit Trefferwahrscheinlichkeit 60%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p erhalten Sie höchstens 36 180 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$n = 60\,000 \quad t = 0{,}6$

Binomialverteilung → Annäherung über Normalverteilung

$P(X \leq 36180) = \int_{-\infty}^{\beta} \varphi(t)\,dt \quad ; \beta = \frac{1}{\sigma}\left(b + \frac{1}{2} - \mu\right)$

$b = 36180 \quad \sigma = \sqrt{14400} = 120 \quad \mu = 36\,000$ 24 12

$\beta = \frac{180{,}5}{120} = \cancel{\ldots} \; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \approx 1{,}501$

$\int_{-\infty}^{\beta} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2} + 0{,}43822$

$= 0{,}93822$

$= 93{,}822\%$

$\approx 94\%$

3

✓

2/3

3B. Ein Satellit hat 2 Gigabit Arbeitsspeicher. Während eines Betriebsintervalls beträgt die Fehlerwkt 10^{-9} pro Bit, unabhängig voneinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit q erhalten Sie höchstens 2 Bitfehler? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$; Lösen mit Poisson.

$= \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2}$

$= e^{-2}(1 + 1 + 2)$

25
15
5

$= 5 \cdot 0{,}135$

$= 0{,}675$

$= 67{,}5\%$

$\approx 68\%$

3/3

3C. Beim weltgrößten Skatturnier in Berlin nehmen 4% Profis und 96% Amateure teil. Die Wahrscheinlichkeit in die Finalrunde einzuziehen, ist für Profis 96%, für Amateure nur 16%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit r ist ein zufällig ausgewählter Finalist ein Profi?

$P(P) = 0{,}04 \qquad P(A) = 0{,}96$

$P(F|P) = 0{,}96 \qquad P(F|A) = 0{,}76$

$$P(P|F) = \frac{P(F|P)P(P)}{P(F)} = \frac{\cancel{0{,}96} \cdot 0{,}04}{\cancel{0{,}96} \cdot 0{,}2} = 20\%$$

24

$$P(F) = P(P) \cdot P(F|P) + P(A) \cdot P(F|A) =$$
$$= 0{,}04 \cdot 0{,}96 + 0{,}96 \cdot 0{,}76$$
$$= 0{,}96 \cdot 0{,}2$$

1/3

3D. Eine Datenbank hat 2 000 000 Datensätze. Parallele Prozesse schreiben gleichzeitig in 1 100 dieser Datensätze (gleichverteilt, unabhängig). Mit welcher Wkt s kommt es zu keiner Kollision?

~~Ptsc~~

$$s = \left(1 - \frac{0}{2000\,000}\right)\left(1 - \frac{1}{2000000}\right)(\cdots)\left(1 - \frac{1099}{2000000}\right)$$

$$= \prod_{k=0}^{1099}\left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

⋮

exp. Reihe ...?

1/3

Aufgabe 4. *Lineare Differentialgleichungen* (8 Punkte)

Zu lösen ist die homogene, lineare Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0. \tag{L}$$

4A. Geben Sie das charakteristische Polynom p der Gleichung (L) an.

$p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ $\cancel{=0}$

$1+4i-5-4i+4$

$(x^2 - x - 2x + 2)$

$x^4 - 2x^2 - x + 2$

$1+4i-5+4i+4$

$4x^3 - 12x^2 + 10x - 4 = 0$

1 / 1

4B. Es gilt $p(2) = 0$. Zerlegen Sie das Polynom p in Linearfaktoren:

$p(x) = (x-2)(x-1)(x-i)(x+i)$

0,5 / 2

4C. Nennen Sie eine Basis des Raumes aller reellen Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$ von (L).

Basis: $e^{2t}, e^{t}, e^{it}, e^{-it}$

0,5 / 2

4D. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $u(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^t$.

$u(t) = \dfrac{e^t x}{4-12+10-4} = -\dfrac{x c_1}{2} e^t$

0,5 / 1

4E. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $v(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}$.

$v(t) = \dfrac{e^{-t} \cancel{x}}{1+4+5+4+4} = \dfrac{1}{18} c_2 e^{-t}$

0,5 / 1

4F. Schließen Sie auf eine partikuläre Lösung $w(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \cosh(t)$.

$w(t) = \frac{1}{2}(u(t) + v(t)) = -\dfrac{x c_1}{4} e^t + \dfrac{1 c_2}{36} e^{-t}$

0,5 / 1

Aufgabe 5. *Partielle Differentialgleichungen* (8 Punkte)

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die partielle Differentialgleichung

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} x\,\partial_x u(x,y) + y\,\partial_y u(x,y) = 2\,\dfrac{y}{x}\sqrt{u} & \text{für alle } x \geq 1 \text{ und } y \geq 0, \\ u(1,y) = y^2 & \text{für } x = 1 \text{ und alle } y \geq 0. \end{cases}$$

Hierzu sei $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ die Charakteristik mit $\gamma(0) = (1, y_0)$ und $U(s) = u(X(s), Y(s))$.

5A. Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu (P) auf:

$X'(s) = \ X(s)\,,$ $\qquad X(0) = 1,$

$Y'(s) = \boxed{Y(s)}\,,$ $\qquad Y(0) = y_0,$

$U'(s) = \boxed{2\dfrac{Y(s)}{X(s)}\sqrt{U(s)}}\,,$ $\qquad U(0) = y_0^2.$

2/2

5B. Lösen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem:

$X(s) = \ e^s\,,$

$U'(s) = 2y_0 U(s)^{1/2}$
$U(s) = \frac{4}{2} y_0 s^{3/2}$

$Y(s) = \boxed{e^s c_0 \to y_0 e^s}\,,$

$U(s) = \boxed{\cancel{\ldots} \to \frac{4}{3} y_0 s^{3/2} + y_0^2}$

1/3

5C. Bestimmen Sie zu $(x,y) \in \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Werte s und y_0 so, dass $\gamma(s) = (x,y)$ gilt:

$s = \boxed{\ln(x)}\,,$ $\qquad y_0 = \boxed{\cancel{\ldots}\ \frac{y}{x}}\,.$

2/2

5D. Geben Sie die Lösung u von (P) an. *Tipp zur Probe:* Im Punkt $(\mathrm{e}, 3)$ gilt $u(\mathrm{e}, 3) = 36/\mathrm{e}^2$.

$u(x,y) = \frac{4}{3}\frac{y}{x}\ln(x)^{3/2} + y_0^2$

0/1

Aufgabe 6. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (12 Punkte)

Zu lösen ist das homogene, lineare Differentialgleichungssystem

$$(\mathrm{H})\left\{\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 7y_4 \\ y_2' &= -y_1 + 5y_2 + 3y_3 - 5y_4 \\ y_3' &= -7y_3 + 10y_4 \\ y_4' &= -5y_3 + 8y_4 \end{aligned}\right.$$

6A. Bestimmen Sie die Matrix A, die das obige System in der Form $y' = A\,y$ darstellt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ -1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{1}$

6B. Zur Matrix A und Eigenwert 3 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Hauptvektor der Stufe $\boxed{}$ $\cdot 3$

Folgern Sie zur Matrix A die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2:

$1+5\ \cancel{8}\ -7+8 = 3+3+3+x$

$\lambda_1 = \boxed{3} > 0$ mit algebraischer Vielfachheit $\boxed{3}$

und

$\lambda_2 = \boxed{-2} < 0$ mit algebraischer Vielfachheit $\boxed{1}$

Bestimmen Sie zu A eine Jordan–Basis v_1, v_2, v_3, v_4:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\frac{6}{6}$

6C. Bestimmen Sie zu (H) die zugehörige Fundamentalmatrix $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4} : t \mapsto W(t)$.
Die $k$te Spalte ist die Lösung $w_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : t \mapsto w_k(t)$ von (H) mit Startvektor $w_k(0) = v_k$.

$$W(t) = \begin{pmatrix} 2\,e^{3t} & (1+2t)e^{3t} & (1+1t+\frac{3}{2}t^2)e^{3t} & -2e^{-2t} \\ e^{3t} & (2+1t)e^{3t} & (2+t+\frac{1}{2}t^2)e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 1e^{3t} & -4e^{-2t} \\ 0 & 0 & 1e^{3t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

3/3

6D. Wir wählen den Startwert $y(0) \in \mathbb{R}^4$ zufällig, stetig verteilt um den Nullpunkt.
Wie verhält sich typischerweise die Lösung $t \mapsto y(t)$ für $t \to \infty$?

- ☐ $|y(t)|$ konvergiert gegen 0 für $t \to \infty$.
- ☐ $|y(t)|$ konvergiert nicht, bleibt aber beschränkt.
- ☒ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst polynomiell.
- ☐ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst exponentiell.

Begründung:

Lösung verhält sich mit Wht. von 1 quadratisch

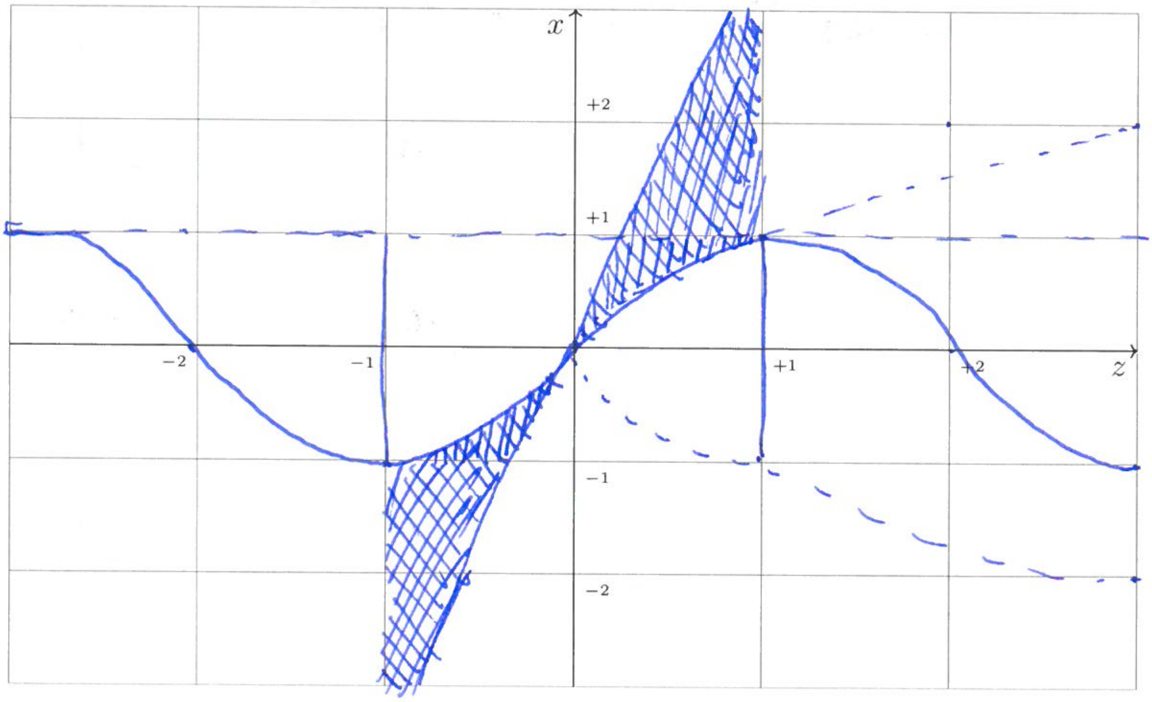
0/2

Aufgabe 7. *Integration über Körper und Flächen* (11 Punkte)

Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den folgenden Körper K und das Vektorfeld $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} z^2 \le 1 \\ \sin^2(\pi z) \le x^2 + y^2 \le 4\sin^2(\pi z) \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

7A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der z–x–Ebene $E = \{ (x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \}$:



$\sin(\pi z) \le x \le 4\sin(\pi z)$

0 / 2

7B. Parametrisieren Sie K durch Zylinderkoordinaten $\Phi : D \xrightarrow{\sim} K : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$

und $D = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} -1 \le z \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \boxed{|\sin(\pi z)|} \le r \le \boxed{4|\sin(\pi z)|} \end{array} \right\}$. 0,5 / 1

7C. Berechnen Sie das Volumen des Körpers K:

$$\mathrm{vol}(K) = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{\sin\pi z}^{4\sin\pi z} r \, dr\, dz\, d\varphi = \iint_{0\;-1}^{2\pi\;1} \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_{\sin\pi z}^{4\sin\pi z} dz\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} 8\sin^2(\pi z) - \tfrac{1}{2}\sin^2(\pi z)\, dz\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \tfrac{15}{2}\sin^2(\pi z)\, dz\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \tfrac{15}{2}\pi \, d\varphi$$

$$= 30\pi^2$$

1 / 3

7D. Die Randfläche von K besteht aus der äußeren Fläche M und der inneren Fläche N.

Die äußere Fläche M wird parameterisiert durch $\Psi\begin{pmatrix}\varphi\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sin(\pi z)\cos(\varphi)\\ 2\sin(\pi z)\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den Normalenvektor auf M (aus dem Körper K heraus):

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \begin{pmatrix}\boxed{-2\sin(\pi z)\sin(\varphi)}\\ \boxed{2\sin(\pi z)\cos(\varphi)}\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\boxed{2\pi\cos(\pi z)\cos(\varphi)}\\ \boxed{2\pi\cos(\pi z)\sin(\varphi)}\\ 1\end{pmatrix}$$

$-2\sin(\pi z)\sin(\varphi)$
$2\sin(\pi z)\cos(\varphi)$

$2\pi\cos(\pi z)\cos(\varphi)$
$2\pi\cos(\pi z)\sin(\varphi)$

$$= \begin{pmatrix}2\sin(\pi z)\cos(\varphi)\\ 2\sin(\pi z)\sin(\varphi)\\ \boxed{-4\pi\cos(\pi z)\sin(\pi z)}\end{pmatrix}$$

2/2

7E. Bestimmen Sie das Flussintegral des Vektorfeldes f durch die äußere Fläche M aus dem Körper K heraus:

$$\int_M f\bullet \mathrm{d}M = \int_{\varphi,z} f(\Phi_M)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)d(\varphi,z)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\begin{pmatrix}2\sin(\pi z)\cos(\varphi)\\ 2\sin(\pi z)\sin(\varphi)\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\sin(\pi z)\cos(\varphi)\\ 2\sin(\pi z)\sin(\varphi)\\ -4\pi\cos(\pi z)\sin(\pi z)\end{pmatrix}d\varphi\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} 4\sin^2(\pi z)\cos^2(\varphi) + 4\sin^2(\pi z)\sin^2(\varphi) + 0 \; dz\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} 4\sin^2(\pi z)\, dz\, d\varphi$$

$$= 8\pi$$

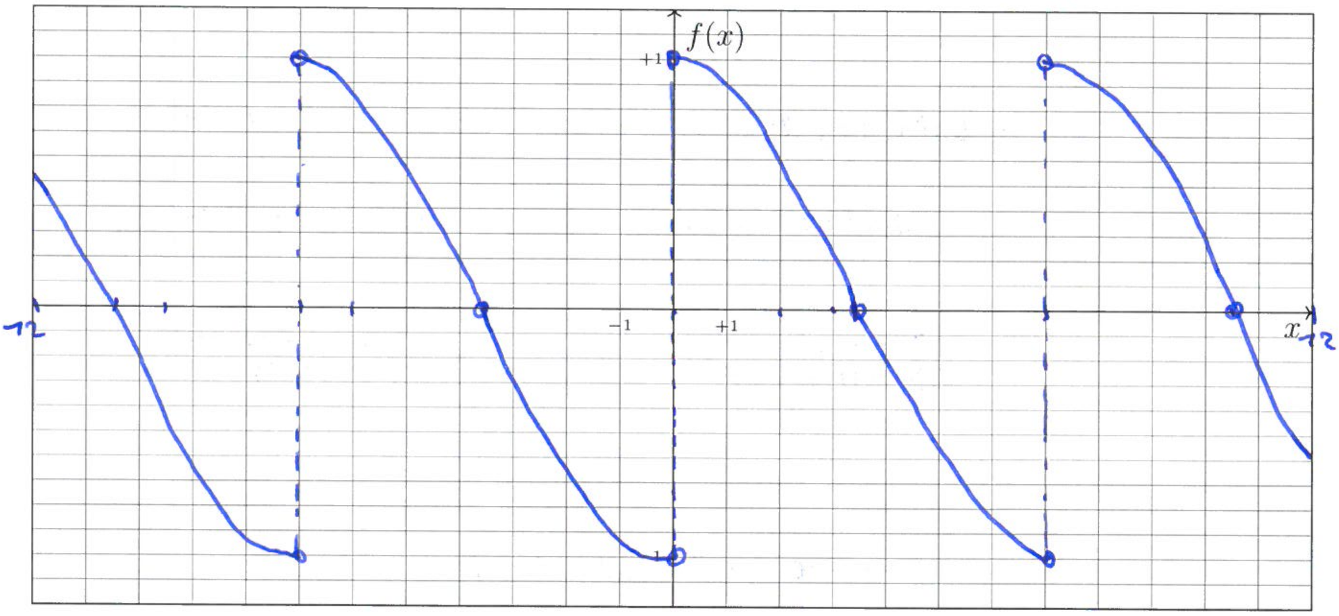
3/3

Tipp zur Probe: Es gilt $\int_N f\bullet \mathrm{d}N = -2\pi$ und der Gaußsche Integralsatz.

Aufgabe 8. *Fourier–Reihen* (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x) = \cos(x)$ für $0 < x < \pi$.

8A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12, 12]$:



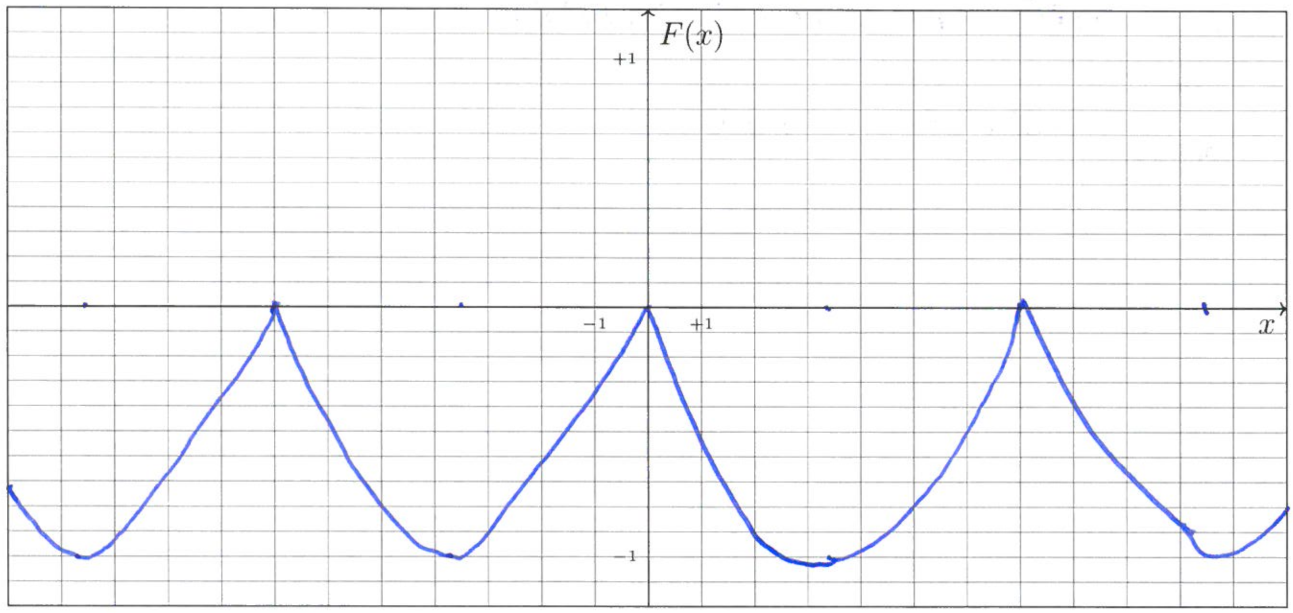
0
1

8B. Bestimmen Sie zur Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{ikx}$ den Wert der Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 =$$

1

8C. Skizzieren Sie ebenso die Integralfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$.



0
1

Hinweis: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$.

8D. Berechnen Sie die Koeffizienten b_k der Fourier–Sinus–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$:

$$b_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kt)\cos(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kt-t) + \sin(kt+t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\left[-\frac{1}{k-1}\cos(kt-t)\right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{1}{k+1}\cos(kt+t)\right]_0^{2\pi} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{k-1}\, 1 + \frac{1}{k-1} + -\frac{1}{k+1}\cdot 1 + \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} (0)$$

$$= 0$$

0 / 4

8E. Bestimmen Sie den exakten Wert der Summe $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n}{4n^2-1}\right)^2 \in [9.8, 9.9]$:

0 / 3

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

2022 B HM 3 Klausur

7

6

b) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -7 \\ -7 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 & -7 \\ -4 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_4 \end{pmatrix} = \cancel{\quad} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $| - Z_1$ $\;1 \; | - Z_4$ $\;1$ $\quad -5 \quad -4$ $\quad -2 \quad 5$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -7 \\ -4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad | - Z_3 \quad \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -7 \\ -4 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \rightarrow v = \begin{pmatrix} \\ \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 8 & -28 \\ -12 & 9 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad | + Z_1$

$\begin{pmatrix} 12 & 16 & 8 & -28 \\ 0 & 25 & 8 & -16 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$ $\quad | - Z_2$

$\begin{pmatrix} 12 & -9 & 0 & -12 \\ 0 & 25 & 8 & -16 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$ $\quad 25 C_2 = -8 C_3 + 16 C_4 = 16 + 16$

$C_2 = \frac{32}{25}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -7 \\ -1 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \quad | + 3 \cdot Z_2$$

$$| \text{Nullzeile}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 25 & -11 & 22 \\ -1 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$25 c_2 = -11 c_3 - 22 c_4 = -11 c_3 - 11 c_3 = -22 c_3 = -44 c_4$

$2 c_4 = c_3$

$c_1 = 7 c_2 + 3 c_3 - 5 c_4$

$c_1 = 7 c_2 + c_4$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & -7 \\ -1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cancel{2}2 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

⑦

d) $-2\sin(\pi z)\sin(\varphi) \cdot 2\pi\cos(\pi z)\sin(\varphi) - 2\pi\cos(\pi z)\cos(\varphi) \cdot 2\sin(\pi z)\cos(\varphi)$

$-4\pi\sin(\varphi)^2\cos(\pi z)\sin(\pi z) - 4\pi\cos(\varphi)^2\cos(\pi z)\sin(\pi z)$

$-4\pi\cos(\pi z)\sin(\pi z)\underbrace{(\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2)}_{=1}$

⑧

b) $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\cos(t)\,dt$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} e^{-ikt}(e^{it} + e^{-it})\,dt$

$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{it(-k+1)} + e^{it(-k-1)}\,dt$

$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{it(1-k)}\,dt + \int_0^{2\pi} e^{it(-1-k)}\,dt$

$= \frac{1}{4\pi}\left(\left[\frac{1}{i(1-k)} e^{it(1-k)} + \frac{1}{i(-1-k)} e^{it(-1-k)}\right]_0^{2\pi}\right)$

$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{i(1-k)} e^{2i\pi(1-k)} + \frac{1}{i(-1-k)} e^{2i\pi(-1-k)} - \frac{1}{i(1-k)} - \frac{1}{i(-1-k)}\right)$

$= \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{i}{1-k}(e^{2i\pi} \cdot e^{-2i\pi k}) + \frac{i}{1+k}(e^{-i\pi \cdot 2} \cdot e^{-2i\pi k}) + \frac{i}{1-k} - \frac{i}{1+k}\right)$

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; bearbeiten Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/11	/7	/9	/10	/12	/74

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Seien $(f_k : [0,5] \to \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ stetige Funktionen mit stetiger Grenzfunktion $f : [0,5] \to [-99,99]$, also $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für jedes $x \in [0,5]$. Gilt dann $\lim_{k\to\infty} \int_0^5 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Gegenbeispiel Dreiecksfunktionen als affin lineare interpolation $f_k : [0,5] \to \mathbb{R}$

von $0 \to 0$, $\frac{1}{k} \to k$, $\frac{2}{k} \to 0{,}5$ ~~...~~ $\to 0$ für $k \geq 1$

2

2B. Gibt es eine stetige und 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deren Fourier–Koeffizienten die Ungleichung $|c_k| \geq 1/\sqrt{k}$ für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$ erfüllen?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Stetig impliziert quadrat integrierbar auf $[-\pi, \pi]$ und dank Energiegleichung

folgt somit $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^2| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \,dx < \infty$. Das ist hier unmöglich

wegen $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k^2| \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

2

2C. Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ besitze Hauptvektorketten der Länge 2 zum Eigenwert 1 und der Länge 3 zum Eigenwert 4. Wie lautet demnach das charakteristische Polynom von A?

Begründete Antwort:

$P_A(x) = (x-1)^2 (x-4)^3$

Bezüglich der gesamten Jordan-Basis wird A dargestellt als $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2

2D. Für $(u, v) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ lösen wir das Differentialgleichungssystem $u'' = u' + v$ und $v'' = v' - u$ und finden drei Lösungen. Lässt sich daraus jede weitere Lösung linear kombinieren?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die Lösungsmenge ist ein Lösungsraum der Dimension 4

$y' = Ay$ mit $y = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ v \\ v' \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2

2E. Sie werfen einen fairen Würfel mit den Augenzahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Sei A das Ereignis „Der Würfel zeigt eine ungerade Augenzahl" und B das Ereignis „Der Würfel zeigt die Augenzahl 7" (kein Tippfehler). Ist das Paar (A, B) stochastisch unabhängig?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

$P(B) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 = P(A)P(B)$ ✓

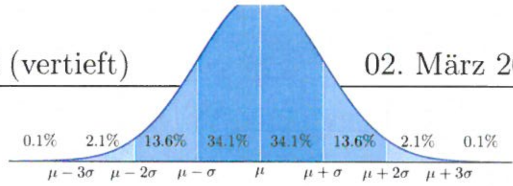
2

2F. Sie suchen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $y\,\partial_x u(x, y) - x\,\partial_y u(x, y) = 0$ und $u(x, 0) = \sin(x)$. Aus $X' = Y$, $Y' = -X$ erhalten Sie Kreise um $(0, 0)$ als Charakteristiken. Existiert demnach eine Lösung u?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Nein, auf jeden Kreis vom Radius $]0, \pi[$ werden zwei widersprüchliche Startwerte angegeben

2



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit* (12 Punkte)

3A. In einer Population von 10 Millionen Fischen sind 60% Weibchen. Es werden zufällig 15 000 Fische gefangen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p sind darunter höchstens 9070 Weibchen? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$a = 0 \quad b = 9070$

Hypergeomet. Verteilung -> Annäherung mit ~~Poisson~~ Normalverteilung

$P(X \le 9070) = \int_0^\beta \varphi(t)\,dt - \int_0^\alpha \varphi(t)\,dt$

; $\cancel{\sigma = \sqrt{6000000(1-0{,}6)} = \dots}$
; $\cancel{\mu = 9000000}$
; $\sigma = \sqrt{9000(1-0{,}6)} = 60$
; $\mu = 9000$

$\beta = \left(\frac{1}{\sigma}\left(b + \frac{1}{2} - \mu\right)\right) = \frac{70{,}5}{60}$

$= \frac{7}{60} + \frac{0{,}5}{60} \approx 1{,}17$

~~$\left(\frac{1}{\sigma}\left(a - \frac{1}{2} - \mu\right)\right) =$~~

$P(x \le 9070) = \int_{-\infty}^{\beta} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2} + 0{,}379 = 0{,}879$

$= 88\%$

3

3B. Sie wiederholen 1000 mal ein Experiment mit Trefferquote 99.8% (zufällig, unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit q erhalten Sie mindestens 998 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

Gegenereignis: höchstens 2 ~~Treffer~~ daneben:

$P(X \le 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$= \binom{1000}{0} \cdot 0{,}002^0 (1-0{,}002)^{1000} \dots$

Annäherung über Poisson: $\lambda = 2$

$P(0) + P(1) + P(2)$

$\frac{2^0}{0!} e^{-2} + \frac{2^1}{1!} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2}$

$5 \cdot 135$
$+\ \ 25$
675

$= e^{-2}(1+2+2) = 5 \cdot 0{,}135 = 0{,}675 \quad \to 68\%$

$P(X \ge 998) = 68\%$

3

3C. Beim weltgrößten Tischkickerturnier in Hamburg treten 2500 Spieler an, davon 2% Profis und 98% Amateure. In die Endrunde gelangen Profis mit Wkt 98%, Amateure mit Wkt 6%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit r ist ein zufällig ausgewählter Endrundenteilnehmer ein Profi?

$P(P) = 0{,}02 \qquad P(A) = 0{,}98$

$P(E|P) = 0{,}98 \qquad P(E|A) = 0{,}06$

$$P(P|E) := \frac{P(E|P)\,P(P)}{P(E)} = \frac{0{,}0196}{0{,}0784} = \frac{0{,}02}{0{,}02+0{,}06} = \frac{1}{4}$$

$$P(E) = P(E|P)\,P(P) + P(E|A)\,P(A) = 0{,}0196 + 0{,}0588 = 0{,}0784$$

25%

3

3D. Bei einem *Massive Multiplayer Online Game (MMO)* stehen 10^6 Charaktere zur Auswahl (inklusive aller Varianten). Jeder der 1100 Spieler wählt einen Charakter (zufällig, unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit s sind alle gewählten Charaktere verschieden?

$$s = \left(1-\frac{0}{10^6}\right)\left(1-\frac{1}{10^6}\right)\left(1-\frac{2}{10^6}\right)\cdots\left(1-\frac{1099}{10^6}\right)$$

$$= \prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \approx \prod_{j=0}^{k-1}\exp\left(-\frac{j}{n}\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{n}\right) = \exp\left(\frac{k(k-1)}{2n}\right)$$

$$\approx e^{-0{,}604} \approx 0{,}546 \approx 55\%$$

3

Aufgabe 4. *Gewöhnliche Differentialgleichungen* (11 Punkte)

4A. Zu lösen ist für $t \geq 0$ die Differentialgleichung $\quad y'''(t) - 3y''(t) - y'(t) + 3y(t) = 0. \quad$ (L)

Geben Sie das charakteristische Polynom p der Gleichung (L) an:

$p(x) =$ $x^3 - 3x^2 - x + 3$

$(x^2-1)(x-3)$ $\quad x^3-3x^2-x+3$

/1

Zerlegen Sie das Polynom p in Linearfaktoren:

$p(x) =$ $(x-1)(x+1)(x-3)$

/2

Nennen Sie eine Basis des Raumes aller reellen Lösungen $y : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$ von (L).

Basis: e^{t}, e^{-t}, e^{+3t}

/1

Bestimmen Sie die Lösung $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ von (L) mit $u(0) = u'(0) = 0$ und $u''(0) = 1$.

$c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{3t} \Rightarrow$

$u(t) =$ $-\frac{1}{4} e^{t} + \frac{1}{8} e^{-t} + \frac{1}{8} e^{3t}$

$c_1 + c_2 + c_3 = 0$
$c_1 - c_2 + 3c_3 = 0$
$c_1 + c_2 + 9c_3 = 1$

/2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I - Z_1 \\ I - Z_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{array}\right)$$

$c_3 = \frac{1}{8} = c_2$

$c_1 = -\frac{1}{4}$

4B. Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \binom{x}{y} \mapsto \cos(x) - 2xy + y^2$.

$$\operatorname{grad} \Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x) - 2y \\ -2x + 2y \end{pmatrix}$$

1

Bestimmen Sie die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(2y - 2x)y' = \sin(x) + 2y$ und $y(0) = -1$.

$g(x) = 2y - 2x$

$f(x) = -\sin(x) - 2y$

$\operatorname{rot}(f, g) \overset{!}{=} 0 = -2 + 2 = 0$ ✓

Potential:

$$\begin{pmatrix} -\sin(x) - 2y \\ 2y - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \end{pmatrix}$$

$\int -\sin(x) - 2y \, dx = v = -\cos(x) - 2yx + C(y)$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -2x + C'(y) \overset{!}{=} 2y - 2x$

$C'(y) = 2y$

$C(y) = y^2 + C$

$F(x) = y^2 - 2yx - \cos(x)$

$0 = y - 2x - \frac{\cos(x)}{y}$

$y_{1/2} = \frac{2x \pm \sqrt{(2x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\cos(x))}}{2 \cdot 1} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4\cos(x)}}{2}$

$y = \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 4\cos(x)}\right)$

$y(x) = x - \sqrt{x^2 + \cos(x)}$

4

Aufgabe 5. *Partielle Differentialgleichungen* (7 Punkte)

Zu lösen ist für $u:\mathbb{R}_{>-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \partial_x u(x,y) - \dfrac{y}{1+x}\,\partial_y u(x,y) = -x\,u(x,y) & \text{für alle } x>-1 \text{ und } y\in\mathbb{R},\\ u(0,y)=y & \text{für } x=0 \text{ und alle } y\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Hierzu sei $\gamma(s)=(X(s),Y(s))$ die Charakteristik mit $\gamma(0)=(0,y_0)$ und $U(s)=u(X(s),Y(s))$.

5A. Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu (P) auf:

$X'(s) = 1$, $X(0)=0$,

$Y'(s) = \boxed{-\dfrac{Y(s)}{1+X(s)}}$, $Y(0)=y_0$,

$U'(s) = \boxed{-X(s)U(s)}$, $U(0)=y_0$. 2

5B. Lösen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem:

$X(s) = s$,

$Y(s) = \boxed{\dfrac{y_0}{1+s}}$,

$U(s) = \boxed{y_0\, e^{-\frac{1}{2}s^2}}$.

$s = x$

$y = \frac{y_0}{1+s} \to s = \frac{y_0}{y} - 1$

$\to y_0 = y(1+x)$ 2

5C. Bestimmen Sie zu $(x,y)\in\mathbb{R}_{>-1}\times\mathbb{R}$ die Werte s und y_0 so, dass $\gamma(s)=(x,y)$ gilt:

$s = \boxed{\dfrac{y(1+x)}{y} - 1 = x}$, $y_0 = \boxed{y(1+x)}$. 2

5D. Geben Sie die Lösung u von (P) an. *Tipp zur Probe:* Im Punkt $(1,2)$ gilt $u(1,2)=4/\sqrt{\mathrm{e}}$.

$u(x,y) = y(1+x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ✓ 1

Aufgabe 6. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (9 Punkte)

Zu lösen ist für $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ das homogene, lineare Differentialgleichungssystem

$$(\mathrm{H})\left\{\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) - y_3(t) - y_4(t)\\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t) - y_3(t) - y_4(t)\\ y_3'(t) &= y_1(t) - y_2(t) - 2y_3(t) - y_4(t)\\ y_4'(t) &= -y_1(t) + 2y_2(t) + 2y_3(t) + y_4(t)\end{aligned}\right.$$

6A. Bestimmen Sie die Matrix A, die das obige System in der Form $y' = A\,y$ darstellt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

1

6B. Die Matrix A besitzt die Jordan–Normalform

$$A \sim T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T = (v_1,v_2,v_3,v_4)\in \mathrm{GL}_4\mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lambda = \boxed{-1}.$$

1

$1-1-2+1 \overset{!}{=} \sum\lambda \to \lambda = -1$

6C. Bestimmen Sie eine Basis v_1, v_2, v_3, v_4 des $\mathbb{R}^4$, die diese Jordan–Normalform realisiert:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_2 = \boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_4 = \boxed{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}.$$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_{21}\\v_{22}\\v_{23}\\v_{24}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix} v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

6D. Bestimmen Sie zu (H) die zugehörige Fundamentalmatrix $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times 4} : t \mapsto W(t)$.
Die $k$te Spalte ist die Lösung $w_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : t \mapsto w_k(t)$ von (H) mit Startvektor $w_k(0) = v_k$.

$$W(t) = \left(\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 1+t & 2+t+\frac{1}{2}t^2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1e^{-t} \\ 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & -1e^{-t} \end{array}\right)$$

3

6E. Wir wählen den Startwert $y(0) \in \mathbb{R}^4$ zufällig, stetig verteilt um den Nullpunkt.
Wie verhält sich typischerweise die Lösung $t \mapsto y(t)$ für $t \to \infty$?

- ☐ $|y(t)|$ konvergiert gegen 0 für $t \to \infty$.
- ☐ $|y(t)|$ konvergiert nicht, bleibt aber beschränkt.
- ☒ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst polynomiell.
- ☐ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst exponentiell.

Begründung:

Lösung ist Linearkombination $c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4$ mit

$c_{1,2,3,4} \in \mathbb{R}$ → Wkt. für $c_3 = 0$ gleich 0

→ Quadratisches Wachstum.

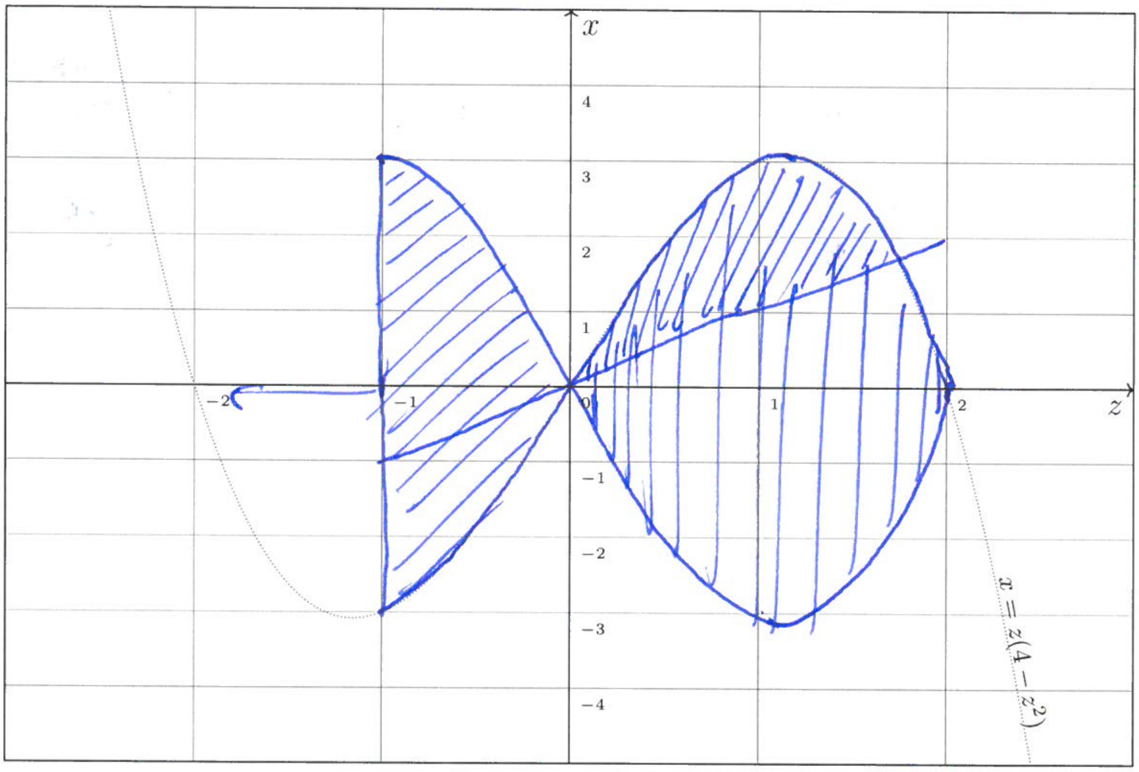
2

Aufgabe 7. *Integration und Integralsätze* (10 Punkte)

Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den folgenden Körper K und das Vektorfeld $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -1 \le z \le 2 \\ x^2 + y^2 \le z^2(4 - z^2)^2 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35x \\ \frac{8}{3}yz \\ -\frac{4}{3}z^2 \end{pmatrix}$$

7A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der z–x-Ebene $E = \{ (x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \}$:



2

7B. Parametrisieren Sie K mittels Zylinderkoordinaten $\Phi : D \xrightarrow{\sim} K$ vermöge

$$\Phi\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} -1 \le z \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le \boxed{|z|(4-z^2)} \end{array} \right\}.$$

1

7C. Die Bodenfläche von K bezeichnen wir mit $B = \{ (x,y,z)^\intercal \in K \mid z = -1 \}$.
Bestimmen Sie das Flussintegral von f durch den Boden B aus dem Körper K heraus:

$$\int_B f \bullet \mathrm{d}B = \int_{(\rho,\varphi)} f(\varphi) \cdot (n)\, d\rho\, d\varphi = \iint \begin{pmatrix} 35 r\cos\varphi \\ 8/3\, r^2 \cos\sin \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 +\rho \cdot \frac{4}{3}\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{2\pi} +\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^3 d\varphi = \int_0^{2\pi} +\frac{36}{6}\, d\varphi$$

$$= +72\pi$$

2

7D. Berechnen Sie das Volumen von K. *Hinweis:* Es gilt $35 \cdot \left[\frac{16}{3}u^3 - \frac{8}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7\right]_{u=-1}^{2} = 477$.

$$\mathrm{vol}(K) = \int \rho \, dV = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{2} \int_0^{|z|(4-z^2)} \rho \; d\rho \, dz \, d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{2} \frac{1}{2} z^2 (4-z^2)^2 \, dz \, d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} z^2 (4^2 - 2 \cdot 4 \cdot z^2 + z^4) \, dz \, d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} z^6 - 8z^4 + 16z^2 \, dz \, d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{7} z^7 - \frac{8}{5} z^5 + \frac{16}{3} z^3\right] d\varphi$$
$$= \cancel{\int_0^{2\pi}} \; \pi \frac{477}{35}$$

3

7E. Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes f.

$$\operatorname{div} f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 35 + \frac{8}{3} z - \frac{8}{3} z = 35$$

1

7F. Bezeichne M die verbleibende Randfläche von K ohne den Boden B.
Bestimmen Sie das Flussintegral von f durch M aus dem Körper K heraus.

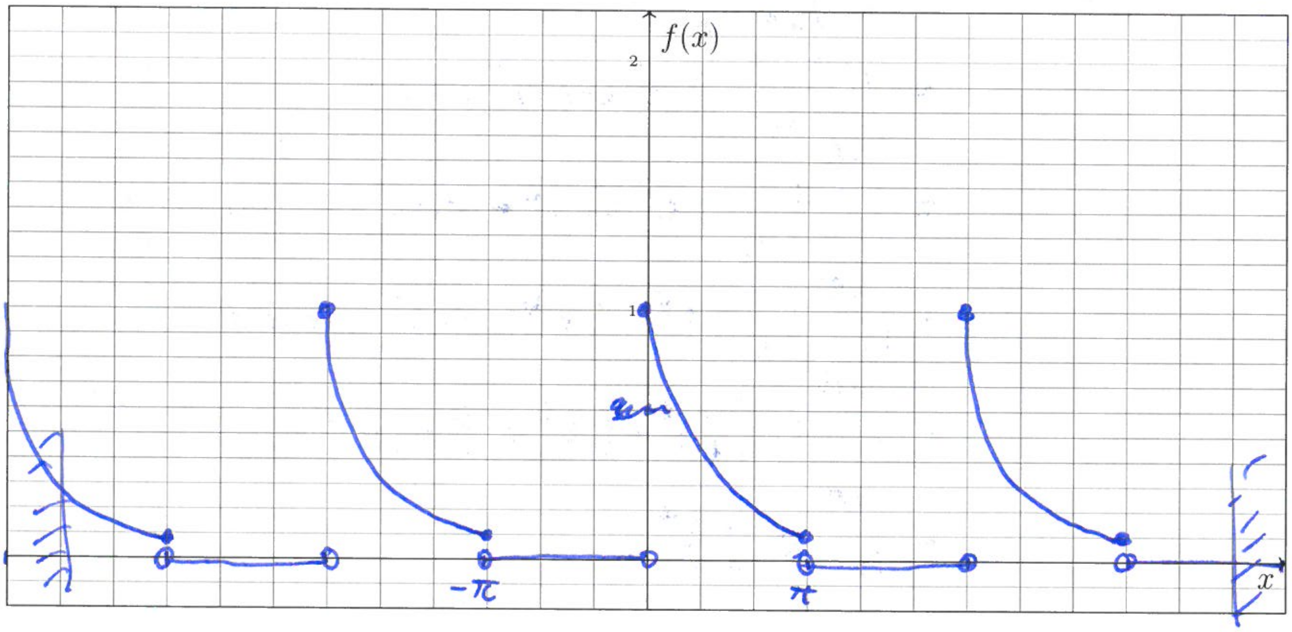
$$\int_M f \bullet \mathrm{d}M = \int \operatorname{div} f(v) \, dV - \int_B f \, dB$$
$$= 35 \cdot \pi \frac{477}{35} - 12\pi$$
$$= 465\pi$$

1

Aufgabe 8. *Fourier–Reihen* (12 Punkte)

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hier 2π–periodisch mit $f(x)=0$ für $-\pi<x<0$ und $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ für $0\le x\le\pi$.

8A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12,12]$:

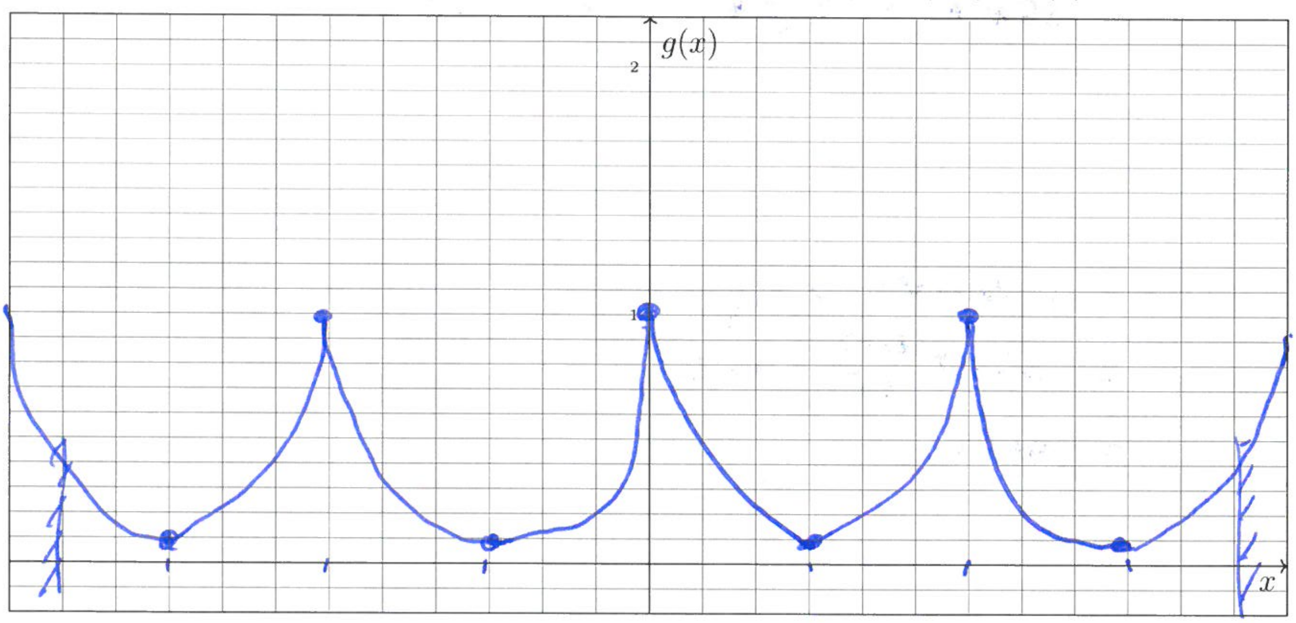


Bestimmen Sie zu f den Grenzwert der Fourier–Polynome $f_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x=\pi$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \frac{e^{-\pi}}{2}$ Dirichlet-kriterium

2

8B. Skizzieren Sie ebenso die (unstetige!) Funktion g mit $g(x)=f(-x)+f(x)$.



Bestimmen Sie zu g den Grenzwert der Fourier–Polynome $g_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} d_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x=0$:

$\lim_{n\to\infty} g_n(0) = 1$ Dirichlet kriterium

3

8C. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, e^{ikx}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} f(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikt} e^{-t}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{t(-ik-1)}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-ik-1} e^{t(-ik-1)}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{\pi(-ik-1)}}{-ik-1} - \frac{1}{-ik-1}\right)$$

$$= \frac{-ik+1}{2\pi(-k^2-1)}\left(e^{\pi(-ik-1)} - 1\right)$$

$$= \frac{-ik+1}{2\pi(-k^2-1)}\left(\{e^{-\pi} - 1\}(-1)^k\right)$$

$$= \frac{+1-ik}{2\pi(-k^2-1)}\left(-1 + e^{-\pi}(-1)^k\right)$$

3

8D. Aus der Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, e^{ikx}$ folgt sofort $f(-x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{-k} \, e^{ikx}$.

Bestimmen Sie die Fourier–Koeffizienten von $g(x) := f(-x) + f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k \, e^{ikx}$:

$$d_k = c_k + c_{-k} = \frac{1-ik}{2\pi(-k^2-1)}\left(-1+e^{-\pi}(-1)^k\right) - \frac{1+ik}{2\pi(-k^2-1)}\left(-1+e^{-\pi}(-1)^{-k}\right)$$

$$= \left(\frac{1-ik}{\pi(-k^2-1)}\right)\left(-1+e^{-\pi}(-1)^k\right)$$

1

8E. Bestimmen Sie den exakten Wert der Summe $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}\left[1 - e^{-\pi}(-1)^k\right] \in [2.1, 2.2]$:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \to \quad S = \pi - 1 + e^{-\pi}$$

$$g(x) = 1 \text{ für } x = 0$$

$$\frac{1 - e^{-\pi}}{\pi} + \frac{1}{\pi} S = 1$$

3

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Modulklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie folgendes aus!

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

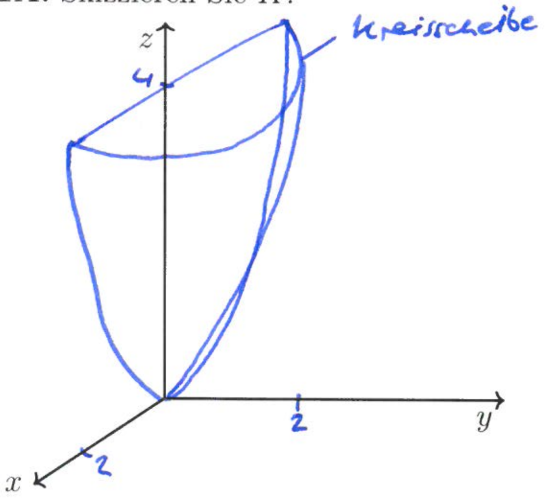
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Aufgabe 1. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*10 Punkte*)

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le z \le 4 \\ x^2 + y^2 \le z \\ y \ge 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + y \\ 2x + z \\ 2y + x \end{pmatrix}.$$

1A. Skizzieren Sie K.



1

Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le \boxed{\pi} \\ 0 \le z \le 4 \\ 0 \le \rho \le \boxed{\sqrt{z}} \end{cases}$$

2

1B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen des Körpers K:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{z=0}^{4} \int_{\rho=0}^{\sqrt{z}} \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi$$

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} c & -s \\ s & c \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{4} \frac{1}{2} z \, dz \, d\varphi$$

$$\det \Phi' = \rho$$

$$= \int_0^{\pi} 4 \, d\varphi$$

$$= 4\pi$$

2

1C. Die Randfläche ∂K setzt sich aus drei Teilen zusammen und zwar dem Deckel D (mit $z = 4$), der Paraboloidfläche P (mit $z = x^2 + y^2$) und dem Schnitt T mit der xz-Ebene (mit $y = 0$).

Wir parametrisieren P und T durch

$$\Phi_P : [0,2] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \Phi_T : \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2,\ x^2 \le z \le 4\} \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit}$$

$$\Phi_P \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \rho^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi_P}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi_P}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2\rho^2\cos\varphi \\ -2\rho^2\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix}}$$

$\cos\varphi \quad -\rho\sin\varphi$
$\sin\varphi \quad \rho\cos\varphi$
$2\rho \quad 0$

$$\Phi_T \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \Phi_T}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi_T}{\partial z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$1 \quad 0$
$0 \quad 0$
$0 \quad 1$

2

Berechnen Sie den Fluss von $F = \mathrm{rot}(f)$ durch P und T nach außen.

$$\int_P F \cdot dS = -\int_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\rho^2\cos\varphi \\ -2\rho^2\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix} d(\rho,\varphi) \qquad \mathrm{rot}(f) = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \int_P (-2\rho^2)(\cos\varphi + \sin\varphi) + \rho \, d(\rho,\varphi)$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi} \left[-\tfrac{2}{3}\rho^3(\cos\varphi + \sin\varphi) + \tfrac{1}{2}\rho^2\right]_0^2 d\varphi = \left[-\tfrac{16}{3}(\sin\varphi + \cos\varphi) + 2\varphi\right]_0^\pi = +\tfrac{16}{3} + 2\pi + \tfrac{16}{3} = \underline{\underline{\tfrac{32}{3} - 2\pi}}$$

$-\tfrac{16}{3} \quad +2$

$$\int_T F \cdot dS = \int_{x=-2}^{2} \int_{x^2}^{4} -1 \, dz\, dx = \int_{x=-2}^{2} -4 + x^2 \, dx = \left[-4x + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= -8 + \tfrac{8}{3} - 8 + \tfrac{8}{3} = -\tfrac{48}{3} + \tfrac{16}{3} = \underline{\underline{-\tfrac{32}{3}}}$$

2

Sei $\Gamma = \partial D$ orientiert gegen den Uhrzeigersinn. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\Gamma f \cdot d\Gamma$. ?

$$\int_\Gamma f \cdot d\Gamma = \int_{S \in D} \mathrm{rot}(f) \cdot dD = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{2} \rho \cdot d\rho\, d\varphi$$

$\rho \to$ kommt von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix}$

$= 2\pi$

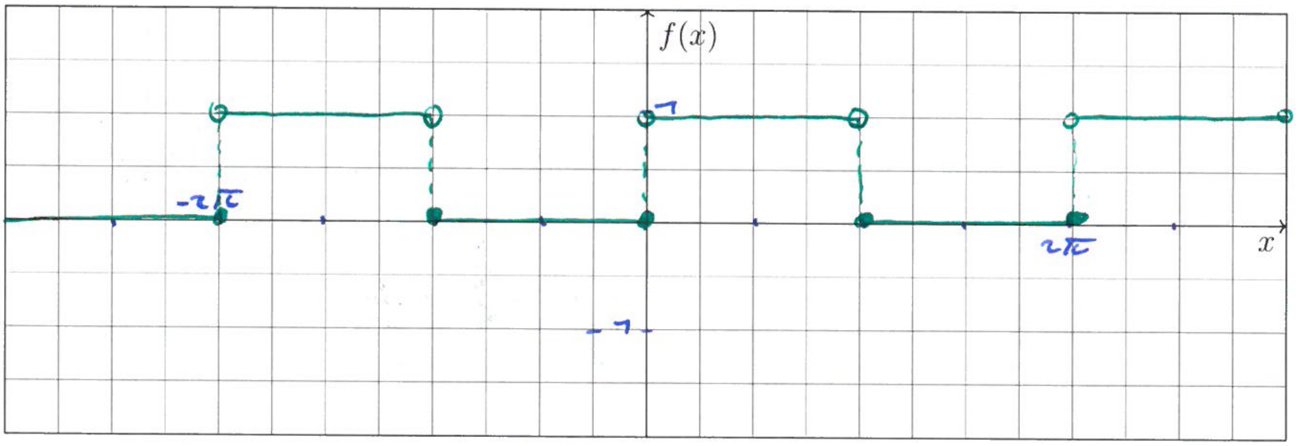
$$= \left(\int_P F \cdot dS + \int_T F \cdot dS\right) \cdot (-1)$$

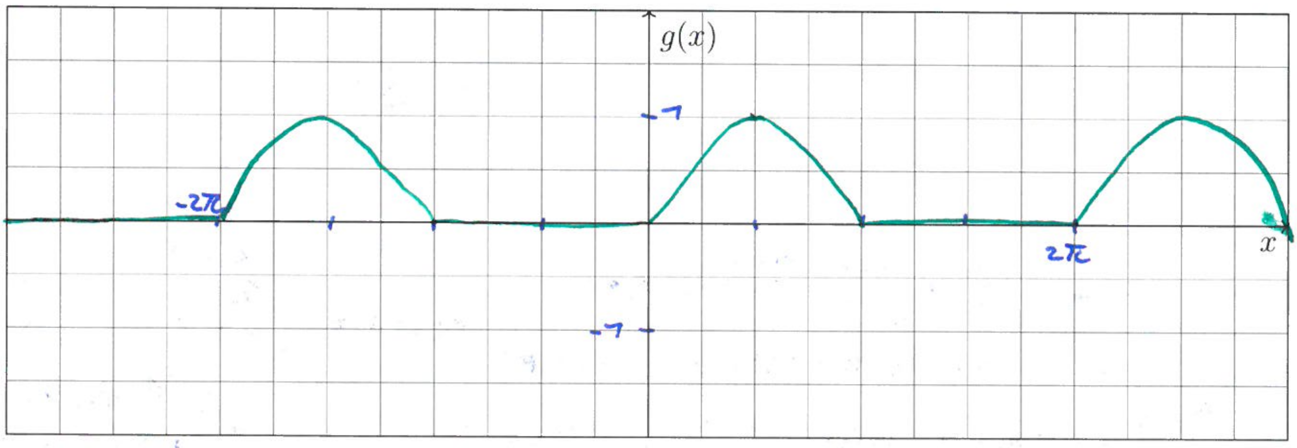
1

Aufgabe 2. *Fourier-Reihen (10 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion definiert durch $f(x) = 1$ für $0 < x < \pi$ und $f(x) = 0$ für $\pi \leq x \leq 2\pi$.

2A. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x)$ und $g(x) = f(x)\sin(x)$ auf dem Interval $[-3\pi, 3\pi]$.





2

2B. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier-Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f im Punkt $x = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

1

2C. Berechnen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$c_k =$

$\frac{1}{2}$	für $k = 0$,
$-\frac{i}{\pi k}$	für k ungerade,
0	für $k \neq 0$ gerade.

3

2D. Folgern Sie die Koeffizienten γ_k der komplexen Fourier-Reihe $g(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

Erinnerung: Dank der Euler-Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ gilt

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}.$$

$\gamma_k =$

	für $k = 1$.
	für $k = -1$.
	für k gerade,
	für $k \neq \pm 1$ ungerade.

4

Aufgabe 3. *Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (10 Punkte)*

3A. Betrachten Sie die folgende homogene lineare Differentialgleichung:

$$y^{(4)}(t) = y(t).$$

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$p(\lambda) =$ $\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-i)(\lambda+i) = 0$.

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1$
$\lambda_3 = i$ $\lambda_3 = -i$

3

3B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der oben genannten Differentialgleichung.

$y(t) =$ $C_1 e^{it} + C_2 e^{-it} + C_3 e^{-t} + C_4 e^{t}$.

1

3C. Betrachten Sie nun die folgende lineare Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - y(t) = 4\,\mathrm{e}^{-t}.$$ → ist 1-fache Nullstelle von $p(t)$

Benutzen Sie den richtigen Ansatz, um eine partikuläre Lösung zu finden

Ansatz: $y(t) =$ $c \cdot t \cdot e^{-t}$. $y'(t)$

2

Partikuläre Lösung: $y(t) =$ $-te^{-t}$.

2

3D. Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y^{(4)}(t) - y(t) = 4\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{mit} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 3, y'''(0) = -2.$$

$y(t) =$ $e^{t} - te^{-t}$ Fehler in Lösung?.

2

Aufgabe 4. *Charakteristikmethode (10 Punkte)*

Gesucht werden Lösungen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$y\partial_x u(x,y) + x\partial_y u(x,y) = 4xyu \qquad \text{mit} \quad u(0,y) = \exp(y^2).$$

4A. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

$x'(t) =$ $y(t)$, $\quad x(0) = 0,$

$y'(t) =$ $x(t)$, $\quad y(0) = y_0,$

$z'(t) =$ $4 \cdot x(t) y(t) z(t)$, $\quad z(0) =$ $\exp(y_0^2)$.

2

4B. Betrachten Sie erst mal $x(t)$ und $y(t)$. Sie haben ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem in der Form $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gefunden.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(-\lambda)^2 - 1$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

Eigenwert $\lambda_1 = \boxed{1}$ mit Eigenvektor $v = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$,

Eigenwert $\lambda_2 = \boxed{-1}$ mit Eigenvektor $w = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$,

/ 2

4C. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (abhängig von y_0) für das homogene lineare Differentialgleichungssystem in $(x(t), y(t))$, das Sie gefunden haben.

$x(t) = \boxed{\frac{y_0}{2} e^{t} + \frac{y_0}{2} e^{-t} = y_0 \cosh(t)}$,

$y(t) = \boxed{\frac{y_0}{2} e^{t} - \frac{y_0}{2} e^{-t} = y_0 \sinh(t)}$.

/ 2

4D. Nach Einsetzen von $x(t)$ und $y(t)$ sieht die Differentialgleichung für $z(t)$ folgendermaßen aus:

$$z'(t) = y_0^2(e^{2t} - e^{-2t})z(t)$$

Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems für $z(t)$:

$z(t) = \boxed{\exp(y_0^2 \cosh(2t))}$.

/ 2

4E. Bestimmen Sie eine explizite Lösung (nur von x und y abhängig) der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung:

$u(x, y) = \boxed{\exp((x^2 - y^2)\cosh(\cancel{2}\ln(\frac{x+y}{x-y})))}$.

/ 2

$x'(t) = y \to \frac{y_0}{2} e^{t} - \frac{y_0}{2} e^{-t} = y \to y_0 = \frac{2}{y}(e^{t} - e^{-t})$

$y'(t) = x \to \frac{y_0}{2}(e^{t} + e^{-t}) = x \to t =$

$z(0) = e^{y_0^2} =$

$y(t) = y_0 \sinh(t) \to y_0 = \frac{y}{\sinh(t)}$

$x(t) = y_0 \cosh(t) = \frac{y}{\sinh(t)} \cosh(t) = y \coth(t)$

$t = \operatorname{arccoth}(\frac{x}{y})$

Aufgabe 5. *Wahrscheinlichkeitsteorie (10 Punkte)*

$k \backslash \mu$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
0	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025
1	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337	0.0225	0.0149
2	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842	0.0618	0.0446
3	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404	0.1133	0.0892
4	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755	0.1558	0.1339
5	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755	0.1714	0.1606
6	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462	0.1571	0.1606
7	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044	0.1234	0.1377
8	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653	0.0849	0.1033
9	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363	0.0519	0.0688

Tabelle 1: Werte der Poisson-Dichtefunktion $p_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$.

5A. Eine Wandervogelgattung überwintert in Ägypten (25%), Algerien (35%), Äthiopien (40%).

Im Sommer kommen die Vögel nach Europa. 9% der Vögel aus Ägypten, 13% der Vögel aus Algerien und 8% der Vögel aus Äthiopien verbringen den Sommer in Belgien.

Berechnen Sie den Prozentsatz der Vögel dieser Gattung, die in Belgien übersommert.

~~0,25 · 0,09 + 0,35 · 0,13 + 0,4 · 0,08 = P(Belgien übersommert)~~

~~0,025 + 0,0455 + 0,0032 = 0,02977~~
0,0445

$P(A_1) = 0{,}25$; $P(A_2) = 0{,}35$; $P(A_3) = 0{,}4$

$P(B|A_1) = 0{,}09$; $P(B|A_2) = 0{,}13$; $P(B|A_3) = 0{,}08$

$P(B) = 10\%$.

2

Ein Ornithologe forscht in Belgien. Er fängt einen Vogel dieser Gattung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Vogel *nicht* aus Ägypten kommt.

~~$1 - P(A_1) = P(\bar{A}_1)$~~ ~~Alle Vögel: $P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$~~

~~$P(A_1) = P(B) \cdot (P(B|A_2) + P(B|A_3))$~~

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{0{,}09 \cdot 0{,}25}{0{,}1} = 0{,}225$$

$$P(\bar{A}_1|B) = 1 - 0{,}225 = 77{,}5\%$$

2

5B. Auf der Welt gibt es geschätzt 10 Millionen Vögel dieser Gattung. Die meisten Vögel haben einen schwarzen Schnabel, aber 0.2% davon haben einen gelben Schnabel. Ein Ornithologenteam fängt nun zufällig 1500 Vögel.

(1500 · 0,002)

Was ist die erwartete Anzahl gefangener Vögel mit *schwarzem* Schnabel? $\boxed{\begin{matrix}1500-3\\ \cancel{3}\,1497\end{matrix}}$.

2

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Forscher genau zwei Vögel mit *gelbem* Schnabel gefangen haben? (Geben Sie nur die Formel für den exakten Wert an, ohne den Wert auszurechnen.)

$\cancel{P(\ldots) \binom{1500}{2} (0{,}02)^2 (1-0{,}02)^{1497}}$

Hyperergeometr. Verteilung

$$P(2) = \cancel{\binom{10\,000\,000}{2}} \binom{20\,000}{2}\binom{9\,980\,000}{1498} \Big/ \binom{10\,000\,000}{1500}$$

2

Berechnen Sie explizit mithilfe der Tabelle 1 eine geschickte Approximation von dieser Wahrscheinlichkeit.

$P(N(k)$ $\qquad \lambda = 3 \qquad k = 2$

$P(3,2) = 0{,}2240 = 22{,}4\%$

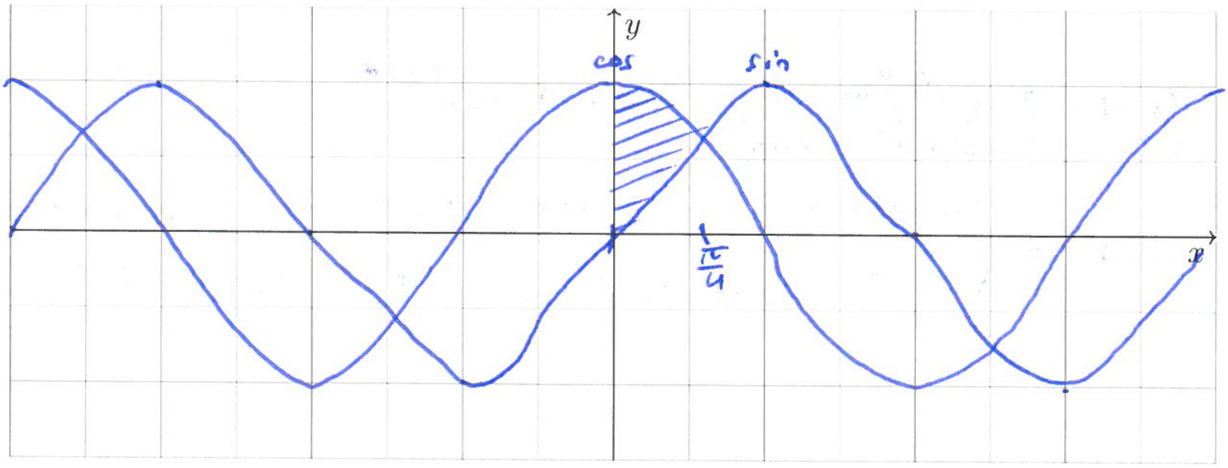
2

Aufgabe 6. *Integration* (*10 Punkte*)

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

6A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der xy-Ebene.



$\overline{}$ 2

6B. Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in y-Richtung:

$\boxed{0} \le x \le \boxed{\frac{\pi}{4}}$ und $\boxed{\sin(x)} \le y \le \boxed{\cos(x)}$

$\overline{}$ 4

6C. Bestimmen Sie das Integral.

$$\int_0^{\pi/4} x \cdot \int_{\sin(x)}^{\cos(x)} y \,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left[\tfrac{1}{2} y^2\right]_{\sin}^{\cos} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left(\cancel{\tfrac{1}{2}}\, \tfrac{1}{2}\left(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right)\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left(\cancel{\tfrac{1}{2}}\, \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2x)) - \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x) - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \underset{g}{x}\, \underset{f'(x)}{\cos(2x)}\, dx = \tfrac{1}{2}\left(\left[\cancel{\cos(2x)}\, \tfrac{1}{2}\sin(2x)\cdot x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int \tfrac{1}{2}\sin(2x)\,dx\right)$$

$$\tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$$

$\overline{}$ 4

(2)

c) $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-inx}\cdot 1\,dx + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} e^{-inx}\cdot 0\,dx}_{=0}$

$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{in} e^{-inx}\right]_0^{\pi}$

$= -\frac{1}{2\pi i n} e^{-in\pi} + \frac{1}{2\pi i n}$

$= -\frac{i}{2\pi n}\left(-e^{-in\pi}+1\right)$

d) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-inx}\cdot \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\,dx$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2i}\int_0^{\pi} e^{-inx}\cdot e^{ix}\,dx - \frac{1}{2i}\int_0^{\pi} e^{-inx} e^{-ix}\,dx\right)$

$= \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\frac{1}{2i}\int_0^{\pi} e^{-ix(+n-1)}\,dx}_{C_{n-1}} - \underbrace{\frac{1}{2i}\int_0^{\pi} e^{-ix(+n+1)}\,dx}_{C_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{2i}\left(C_{n-1} - C_{n+1}\right)$

(3)

c) $y'(t) = -cte^{-t} + ce^{-t}$

$y''(t) = cte^{-t} - ce^{-t} - ce^{-t}$

$y'''(t) = -cte^{-t} + ce^{-t} + 2ce^{-t}$

$y''''(t) = +cte^{-t} - 4ce^{-t} \rightarrow$

$cte^{-t} - 4ce^{-t} - cte^{-t} = 4e^{-t} \rightarrow c = -1$

$y_p(t) = -te^{-t}$

d) $y(t) = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it} + C_3 e^{t} + C_4 e^{-t} - te^{-t}$

$y'(t) = iC_1 e^{it} - iC_2 e^{-it} + C_3 e^{t} - C_4 e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}$

$y''(t) = -C_1 e^{it} + C_2 e^{it} + C_3 e^{t} + C_4 e^{-t} + e^{-t} + e^{-t} - te^{-t}$

$y'''(t) = -iC_1 e^{it} - iC_2 e^{-it} + C_3 e^{t} - C_4 e^{-t} - e^{-t} - e^{-t} - e^{-t} + te^{-t}$

$y''''(t) = C_1 e^{it} + C_2 e^{-it} + C_3 e^{t} + C_4 e^{-t} + 4e^{t} - te^{-t}$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$$
$$ic_1 - ic_2 + c_3 - c_4 - 1 = 0$$
$$-c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + 2 = 3$$
$$-ic_1 - ic_2 + c_3 - c_4 - 3 = -2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i & -i & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |-i\cdot Z_1 \quad | \qquad |Z_1 \cdot Z_2| \\ |+Z_1 \qquad\qquad\qquad\qquad |-Z_1 \\ |+i\cdot Z_1 \qquad\qquad\qquad\quad |-Z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2i & 1-i & -1-i & 1-i \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1+i & -1+i & 1+i \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ i & -i & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2i & -2i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$c_3 + c_4 = 1$$
$$c_3 - c_4 = 1$$
$$c_1 = 0$$
$$c_2 = 0$$
$$c_4 = 0$$
$$c_3 = 1$$

4

c) $z(t) = c_1 e^{1t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-1t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad y(0) = y_0$, $x(0) = 0$

$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$ $\qquad c_1 + c_2 = y_0$

$y(t) = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t}$ $\qquad c_1 - c_2 = 0$

$$c_1 = c_2 = \frac{y_0}{2}$$

d) $z(t)' = 4 \cdot x(t)\, y(t)\, z(t) = y_0^2\,(e^{2t} - e^{-2t})\, z(t)$

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = y_0^2 (e^{2t} - e^{-2t}) = 2y_0^2 \sinh(2t)$$

$$\ln(z(t)) = y_0^2 \cosh(2t)$$

$$z(t) = \exp(y_0^2 \cosh(2t)) = \exp\left(\tfrac{1}{2} y_0^2 (e^{2t} + e^{-2t})\right)$$

e) $x + y = \frac{y_0}{2}(e^t + e^{-t} + e^t - e^{-t})$

$$= \frac{y_0}{2} \cdot 2e^t$$

$$y_0 = \frac{x+y}{e^t} \quad ; \quad t = \ln\left(\frac{x+y}{y_0}\right)$$

$$x - y = \frac{y_0}{2}(e^t + e^{-t} - e^t + e^{-t}) = y_0 e^{-t}$$

$$y_0 = \frac{x-y}{e^{-t}} = \frac{x+y}{e^t}$$

$$\frac{x-y}{e^{-t}} = \frac{x+y}{e^{t}}$$

$$(x-y)\frac{e^{t}}{e^{-t}} = (x+y)$$

$$\frac{e^{t}}{e^{-t}} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{(x+y)^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$$

$$e^{2t} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$2t = \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

$$t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$

$$y_0 = \frac{x+y}{e^{\ln\left(\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}} = \frac{x+y}{\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{2}}} = (x+y)\cdot\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$$

$$= \sqrt{x^2-y^2}$$

$$u(x,y) = \exp((x^2-y^2)\cosh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\right)$$

$$= \exp((x^2-y^2)$$

5

a) $0{,}25 \cdot 0{,}9 = 2{,}25$ 0   2,25

$0{,}35 \cdot 0{,}13 = 0{,}0455$ 35   105

$0{,}4 \cdot 0{,}08 = 0{,}0032$ 0   32

$0{,}225 + 0{,}0455 + 0{,}0032$

0,225
0,0455
0,0032
~~0,2737~~

0,225
0,0455
0,032
~~0,3025~~
0,7000

Modulklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Bitte füllen Sie Folgendes aus.

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise.**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben.
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die Kästen für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander unabhängig.

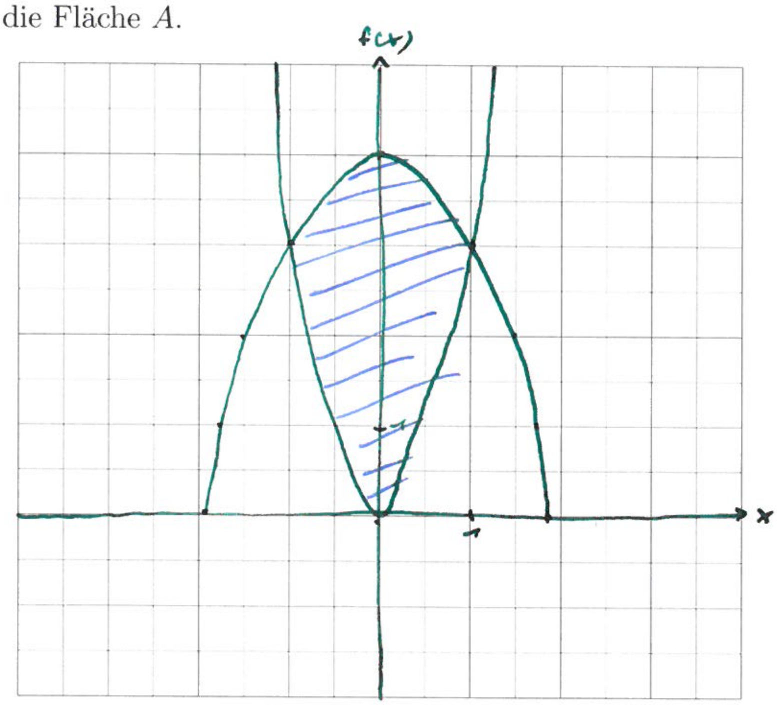
Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/10	/10	/10	/10	/10	/10	/60

Aufgabe 1. *Integration (10 Punkte)*

Betrachten Sie die Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$, welche durch die Parabeln $y = 3x^2$ und $y = 4 - x^2$ beschränkt wird.

1A. Skizzieren Sie die Fläche A.



$\overline{}$ 2

1B. Beschreiben Sie A als Normalbereich in y-Richtung:

$\boxed{-1} \le x \le \boxed{1}$ und $\boxed{4+x^2} \le y \le \boxed{3x^2}$

$\overline{}$ 4

1C. Berechnen Sie $\int_A x^2 \,\mathrm{d}(x,y)$. Flächenintegral

$$\int_A x^2 d(x,y) = \int_{x,y\in A} g(\phi(x,y))\cdot n$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2} x^2 \, dy\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (4x^2 - x^4 - 3x^4)\, dx$$
$$= 4\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1}$$
$$= 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{16}{15}$$

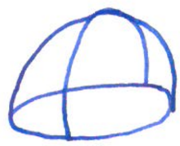
$\overline{}$ 4

Aufgabe 2. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze (10 Punkte)*

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

ellipse

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 4x^2 + y^2 \le 4 \\ 0 \le z \le 4 - 4x^2 - y^2 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ 2x + z \\ xy \end{pmatrix}.$$



Hinweis: Skizzieren Sie K auf Ihrem Schmierpapier.

2A. Parametrisieren Sie K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \boxed{2\rho\sin\varphi} \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le \boxed{4 - 4\rho^2} \end{cases}$$

2

2B. Berechnen Sie die Funktionaldeterminante der Parametrisierung Φ und das Volumen des Körpers K:

$$J\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ 2\sin\varphi & 2\rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \cos & -\rho\sin \\ 2\sin & 2\rho\cos \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\det\Phi' = \boxed{2\rho}, \qquad \operatorname{vol}_3(K) = \boxed{4\pi}.$$

2

$$\int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{4-4\rho^2} 2\rho \, dz\, d\rho\, d\varphi$$

$$\det\Phi' = \cos\varphi\cdot 2\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi\cdot 2\sin\varphi = 2\rho$$

2C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = 0$ und dem Mantel M. Wir parametrisieren M in Polarkoordinaten mit $\Phi_M : [0,1] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\Phi_M\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ 2\rho\sin\varphi \\ 4 - 4\rho^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\Phi_M}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi_M}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ -8\rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ 2\rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{matrix} 16\rho^2\cos\varphi \\ 8\rho^2\sin\varphi \\ 2\rho\cos\varphi^2 + 2\rho\sin^2\varphi \end{matrix}}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 8\rho^2\cos\varphi \\ 4\rho^2\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix}$$

1

2D. Berechnen Sie den Fluss von f durch ∂K nach außen.

$$\int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}S = \boxed{0}. = \int_K \operatorname{div}(f)\, d(x,y,z)$$

$$\operatorname{div}(f) = 0 + 0 + 0 = 0$$

1

2E. Berechnen Sie die Rotation $\operatorname{rot}(f)$ und ihren Fluss durch M nach außen.

$$\operatorname{rot}(f) = \boxed{\begin{matrix} +x - 1 \\ -1 - y \\ 1 \end{matrix}}, \qquad \int_M \operatorname{rot}(f) \cdot \mathrm{d}S = \boxed{2\pi}. = \int_{\partial M} f \cdot d\Gamma$$

3

2F. Sei $\Gamma = \partial M$ die Randkurve von M. Berechnen Sie das Arbeitsintegral des Vektorfeldes f längs Γ bezüglich der von M induzierten Orientierung:

$$\int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\Gamma = \boxed{2\pi}.$$

Satz von ~~[illegible]~~ Stokes

1

Aufgabe 3. *Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (10 Punkte)*

3A. Betrachten Sie die folgende homogene lineare Differentialgleichung

$$y''''(t) - 3\,\mathrm{i}\,y'''(t) - 2\,y''(t) = 0.$$

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$$p(x) = \boxed{x^4 - 3i x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 (x-i)(x-2i)}.$$

$x^2(x^2 - 3ix - 2) = 0$ $\quad \dfrac{+3i \pm \sqrt{(3i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}i \pm \frac{1}{2}i$

2

3B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ der oben genannten Differentialgleichung.

$$y(t) = \boxed{\cancel{C_1 + C_1 t\, e^{0t} + C_2 e^{it} + C_3 e^{2it}} = C_1 + C_2 t + C_3 e^{it} + C_4 e^{2it}}.$$

2

3C. Betrachten Sie nun die folgende lineare Differentialgleichung

$$y''''(t) - 3\,\mathrm{i}\,y'''(t) - 2\,y''(t) = -2(1+3\mathrm{i})\,\mathrm{e}^t. \qquad ce^t(1-3i-2) = e^t(-2(1+3i))$$

Benutzen Sie den richtigen Ansatz, um eine partikuläre Lösung zu finden $\quad c = \dfrac{-2(1+3i)}{-1-3i} = 2$

Ansatz: $y(t) = \boxed{ce^t}$.

1

Partikuläre Lösung: $y(t) = \boxed{2e^t}$.

2

3D. Finden Sie eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y''''(t) - 3\,\mathrm{i}\,y'''(t) - 2\,y''(t) = -2(1+3\mathrm{i})\,\mathrm{e}^t \quad \text{mit} \quad y(0)=3,\, y'(0)=1,\, y''(0)=2,\, y'''(0)=2.$$

$y(t) = 2e^t + C_1 + C_2 t + C_3 e^{it} + C_4 e^{2it}$

$$y(t) = \boxed{2e^t + 1 - t}.$$

3

Aufgabe 4. *Charakteristikmethode (10 Punkte)*

Gesucht werden Lösungen $u:\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$x\partial_x u(x,y) + (y-x)\partial_y u(x,y) = u - y \qquad \text{mit} \quad u(1,y) = y^2/2.$$

4A. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem für die charakteristischen Kurven auf.

$x'(t) = \boxed{x(t)}$, $\quad x(0) = 1$,

$y'(t) = \boxed{y(t) - x(t)}$, $\quad y(0) = y_0$,

$z'(t) = z(t) - y(t)$, $\quad z(0) = \boxed{y_0^2/2}$.

3

4B. Sie haben ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem der Form $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

mit $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ gefunden. Schreiben Sie die Matrix A: $A = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

/1

4C. Ergänzen Sie folgende Sätze.

Der Vektor $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Hauptvektor von A zum Eigenwert $\lambda = \boxed{1}$ der Stufe 3.

Die dazugehörige Hauptvektorkette ist

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto v_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \longmapsto v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

/2

4D. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (abhängig von y_0) für das homogene lineare Differentialgleichungssystem, das Sie gefunden haben. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \\ te^t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^t \\ -te^t \\ \frac{t^2}{2} e^t \end{pmatrix}$

$x(t) = \boxed{e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t}$,

$y(t) = \boxed{e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = +y_0 e^t \mp t e^t}$,

$z(t) = \boxed{e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{y_0^2}{2} e^t \mp y_0 t e^t + \frac{t^2}{2} e^t}$

/3

4E. Bestimmen Sie eine explizite Lösung der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung (abhängig nur von x und y): $x = e^t \to t = \ln(x)$; $y = te^t - y_0 e^t = tx - y_0 x$

$u(x,y) = \boxed{\frac{1}{2}\left(\ln(x) + \frac{y}{x}\right)^2 e^{\ln(x)} - \left(\ln(x) + \frac{y}{x}\right)\ln(x) e^{\ln(x)} + \frac{\ln(x)^2}{2} e^{\ln(x)}}$. $y_0 = \frac{tx - y}{x} = t - \frac{y}{x}$ $= \ln(x) + \frac{y}{x}$

/1

$= \frac{1}{2}\left(\ln(x)^2 + 2\ln(x)\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)x - \left(\ln(x)^2 + \frac{y}{x}\ln(x)\right)x + \frac{1}{2}\ln(x)^2 x$

$= x\left(\cancel{\frac{1}{2}\ln(x)^2} + \cancel{\ln(x)\frac{y}{x}} + \frac{1}{2}\frac{y}{x}\right)^2 - \cancel{\ln(x)^2} - \cancel{\frac{y}{x}\ln(x)} + \cancel{\frac{1}{2}\ln(x)^2}\Big)$

$= \frac{y^2}{2x}$

Aufgabe 5. *Wahrscheinlichkeitsteorie (10 Punkte)*

$k \backslash \mu$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
0	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025
1	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337	0.0225	0.0149
2	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842	0.0618	0.0446
3	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404	0.1133	0.0892
4	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755	0.1558	0.1339
5	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755	0.1714	0.1606
6	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462	0.1571	0.1606
7	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044	0.1234	0.1377
8	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653	0.0849	0.1033
9	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363	0.0519	0.0688

Tabelle 1: Werte der Poisson-Dichtefunktion $p_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!}\,e^{-\mu}$.

5A. Die Länge der Schlange in der Uni-Mensa ist Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\mu = 4$.

$\hookrightarrow \sigma = \sqrt{\mu}$

Berechnen Sie die Standardabweichung: $\sigma = \boxed{2}$. 1

5B. Berechnen Sie mithilfe der oberen Tabelle die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) kein Mensch ansteht: 1.83%, 1

(b) mehr Menschen als erwartet anstehen:

1 − 0,0183
0,0733
0,1465
0,1954
0,1954
~~36,30%~~
0,6289

0,3711

37,11%, 2

(c) die Anzahl der anstehenden Menschen sich von der erwarteten Anzahl um (strikt) weniger als die Standardabweichung unterscheidet:

0,1954
0,1954
+ 0,1563
0,5471

54,71%. 2

5C. Ein Ameisennest enthält eine Million Ameisen. Die meisten Ameisen sind schwarz, aber 0.1% davon sind rot. Ein Forscher sammelt zufällig 2.500 Ameisen.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Forscher höchstens 2 rote Ameisen ausgewählt hat?

Hypergeometrische Verteilung

$n = 2500 \qquad N = 1\,000\,000 \qquad k = 1000$

$P(k) = \binom{k}{k}\binom{N-k}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$

$P(k \leq 2) = P(1) + P(2) + P(0)$

$$\frac{\binom{1000}{1}\binom{999000}{2499} + \binom{1000}{2}\binom{999000}{2498} + \binom{1000}{0}\binom{999000}{2500}}{\binom{1000000}{2500}}$$

In Lösung auch nicht fertig berechnet?

/2

5D. Berechnen Sie explizit mithilfe der oberen Tabelle eine geschickte Approximation von dieser Wahrscheinlichkeit.

$\lambda = \frac{nk}{N} = 2{,}5$

$H(N, k, n) \approx B\left(n, \frac{k}{N}\right) \approx P(\lambda)$

$P(0) + P(1) + P(2) \approx 0{,}0821 + 0{,}2052 + 0{,}2565 = 0{,}5438$

$54{,}38\%$

/2

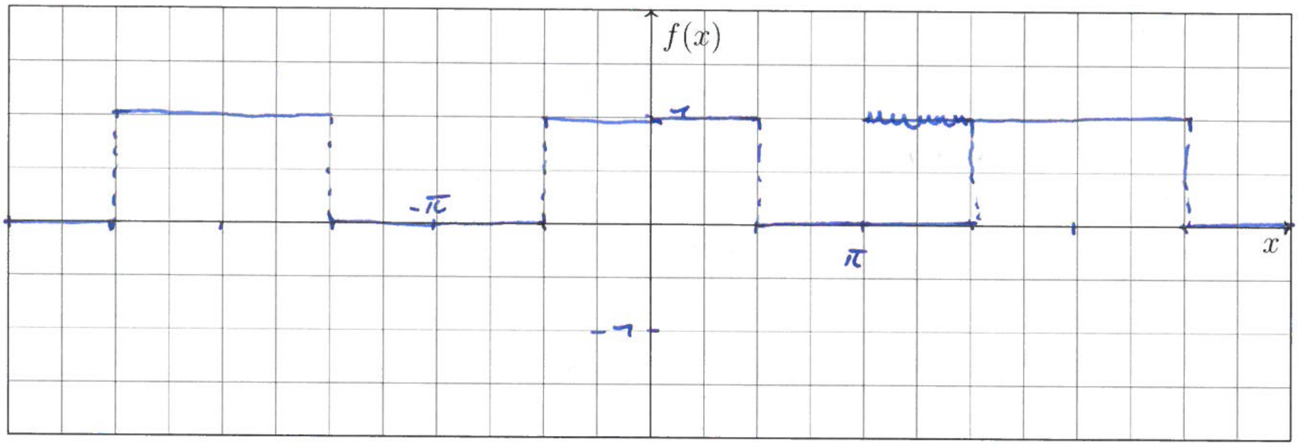
Aufgabe 6. *Fourier-Reihen* (*10 Punkte*)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade 2π-periodische Funktion definiert durch

symmetrisch

$$f(x) = 1 \quad \text{für } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad f(x) = 0 \quad \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi.$$

6A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Interval $[-3\pi, 3\pi]$.



/2

6B. Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f in den Punkten $x = 0$ und $x = \pi/2$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{1}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(\pi/2) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

/2

6C. Berechnen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

gerade -> $b_k = 0$

$$c_0 = \boxed{\frac{1}{2}}, \qquad c_k = \begin{cases} \boxed{0} & \text{falls } k = 4l \ (l \neq 0) \text{ oder } k = 4l+2, \\ \boxed{\frac{1}{k\pi}} & \text{falls } k = 4l+1, \\ \boxed{-\frac{1}{k\pi}} & \text{falls } k = 4l+3. \end{cases}$$

$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) f(t)\, dt$

/4

6D. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert

$$a = \sum_{l\geq 0} \left(\frac{1}{4l+1} - \frac{1}{4l+3} \right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

Auswertung in $x = \boxed{0}$ ergibt $a = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

/2

2020 A HM3 Klausur

2b)

$$Vol_3(L) = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{1}\int_{z=0}^{4-4\rho^2} 2\rho \, dz\, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4-4\rho^2)2\rho \, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 8\left[\tfrac{1}{2}\rho^2 - \tfrac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 d\varphi \qquad = \int_0^{2\pi} 2\, d\varphi$$

$$= 4\pi$$

2c) $\int_{\partial M} f \cdot d\Gamma = \int f(\phi(\rho,\varphi)) \cdot \phi'(\rho$

$$\int_M \mathrm{rot} f \cdot dS = \int_0^1\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi - 1 \\ -1-2\rho\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16\rho^2\cos\varphi \\ 8\rho^2\sin\varphi \\ 2\rho \end{pmatrix} d\varphi\, d\rho$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} 16\rho^3\cos\varphi^2 - 16\rho^2\cos\varphi - 8\rho^2\sin\varphi - 16\rho^3\sin\varphi^2 + 2\rho\, d\varphi d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 16\rho^3\underbrace{(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)}_{\cos(2\varphi)} + 16\rho^2\underline{(-\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi)} + 2\rho\, d\varphi d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[4\rho^4(\cos(2x)) + \tfrac{16}{3}\rho^3(-\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sin\varphi) + \rho^2\right]_0^1 d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\cos(2x) - \tfrac{16}{3}(\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\sin\varphi) + 1\, d\varphi$$

$$= \left[-8\sin(2x) + \tfrac{16}{3}\sin\varphi - \tfrac{16}{4}\cos\varphi\} + \varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$= -4 + 2\pi + 4$$

$$= 2\pi$$

3d)

$$y(t) = 2e^t + C_1 + C_2 t + C_3 e^{it} + C_4 e^{2it}$$

$$y'(t) = 2e^t + C_2 + iC_3 e^{it} + 2iC_4 e^{2it}$$

$$y''(t) = 2e^t - C_3 e^{it} - 4C_4 e^{2it}$$

$$y'''(t) = 2e^t - iC_3 e^{it} - 8iC_4 e^{2it}$$

$$y''''(t) = 2e^t + C_3 e^{it} + 16 C_4 e^{2it}$$

$y(0) = 3 \rightarrow 2 + C_1 + C_3 + C_4 = 3 \qquad C_1 = 1$

$y'(0) = 1 \rightarrow 2 + C_2 + iC_3 + 2iC_4 = 1 \qquad C_2 = -1$

$y''(0) = 2 \rightarrow 2 - C_3 - 4C_4 = 2 \qquad C_3 = -4C_4$

$y'''(0) = 2 \rightarrow 2 - iC_3 - 8iC_4 = 2 \qquad C_4 = 0 \rightarrow C_3 = 0$

6c)

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\, f(t)\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(nt)\cdot 0 \; dt}_{=0} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt)\cdot 1 \; dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\cancel{= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)} \qquad = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\sin\left(-n\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\cancel{= \frac{1}{4n\pi}}$$

$$\cancel{c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}} = \cancel{\frac{1}{2n\pi}}$$

6d)

hmmm...

$$f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t}$$

$$f(0) = 1 = \frac{1}{2} + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi(4n+1)} - \frac{1}{\pi(4n+3)}\right)$$

Gesuchte Summe $= \left(1 - \frac{1}{2}\right) : \frac{2}{\pi}$

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/16	/8	/12	/10	/12	/7	/66

Nützliche Werte und Formeln

- Tabellen der Exponentialfunktion und des Logarithmus

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
e^x	0.05	0.14	0.37	1	2.71	7.39	20.09

x	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3
$\ln(x)$	- 0.36	- 0.22	- 0.11	0	0.10	0.18	0.26

Ablesebeispiele: Für $x = 2$ gilt $e^x \approx 7.39$. Für $x = 0.8$ gilt $\ln(x) \approx -0.22$.

- Einige Stammfunktionen:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(x) + c \qquad \int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sinh^{-1}(x) + c \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \sqrt{1+x^2} + c$$

Aufgabe 2. *Vermischtes* ($4 + 4 + 4 + 4 = 16$ *Punkte*)

2A. Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung $y' + \sqrt{1+y^2} = 0$ zum Anfangswert $y(0) = -1$.

$$\int \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}}\,dx = \int -1\,dx$$

$$-x = \sinh^{-1}(y(x)) - C$$

$$y(x) = \sinh(-x) + \sinh(+c)$$

$$y(x) = \sinh(-x + C)$$

$$\sinh(C) \overset{!}{=} -1$$

$$C = \sinh^{-1}(-1)$$

4

2B. Ein Buch mit 500 Seiten enthält 500 Druckfehler. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich auf Seite 34 mindestens drei Druckfehler befinden. Runden Sie dabei auf ganze Prozente. *Hinweis:* Approximieren Sie die hier auftretende Binomialverteilung durch eine geeignete Poissonverteilung.

$\mu = 1$ Fehler pro Seite

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + \cancel{P(3)})$$

$$\lambda = nt = 500 \cdot \frac{1}{500} = 1$$

$$P(X \geq 3) = 1 - (P(k=0) + P(k=1) + P(k=2))$$

$$P(k) = \frac{1^k}{k!} e^{-1}$$

$$= 1 - e^{-1}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - 0.37 \cdot 2.5$$

$$= 0{,}07\cancel{4}5$$

37
37
+ 18 5
0,925

4

2C. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\underbrace{(xe^y - 1)}_{f} + \underbrace{x}_{g}y' = 0.$$

Bestimmen Sie einen nur von y abhängigen integrierenden Faktor $c(y)$, ein Potential der exakten Differentialgleichung und die Lösung des Anfangswertproblems mit $y(2) = 0$.

$$\operatorname{rot}(f,g) = 1 - xe^y$$

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\operatorname{rot}(f,g)}{f} = \frac{1 - xe^y}{-1 + xe^y}$$

$$\int \frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)}\,dy = \int -1\,dy$$

$$\ln(\lambda(y)) = -y$$

$$\lambda(y) = e^{-y} = c(y)$$

Potential von $(f,g)c(y) = \begin{pmatrix} x - e^{-y} \\ xe^{-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}$

$$\partial_x = x - e^{-y} \to$$

$$\text{Pot} = \frac{1}{2}x^2 - xe^{-y} + C(y)$$

$$\partial_y = x e^{-y} \overset{!}{=} xe^{-y} + C'(y) \qquad C'(y) = 0$$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xe^{-y} \quad ✓$$

Lösung des AWP mit $y(2) = 0$

$$F(x,y(x)) = \frac{1}{2}x^2 - xe^{-y} = d = \overbrace{\frac{1}{2}\cdot 2^2 - 2\cdot e^{-0}}^{y(2)=0} = 0$$

$$\frac{1}{2}x = e^{-y}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}x\right) = -y$$

$$y(x) = -\ln\left(\frac{1}{2}x\right)$$

4

2D. Zu welchem der folgenden Vektorfelder $g, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ existiert ein Potential?

(1) $g(x,y,z) = (y, -x, z)$ (2) $f(x,y,z) = (x^2, y^3, z^4)$

Bestimmen Sie ein Potential in den Fällen, wo dieses existiert.

$$\operatorname{rot} g = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ -1-1 \end{pmatrix} \neq 0$$ kein Potetial

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = 0$$ Potetial existiert

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \\ z^4 \end{pmatrix}$$

$$F_x = \tfrac{1}{3} x^3 + C(y,z)$$

$$\partial_y = y^3 \overset{!}{=} \partial_y F_x = \partial_y C(y,z)$$

$$\partial_z = z^4 = \partial_z F_z = \partial_z C(y,z)$$

$$C(y,t) = \tfrac{1}{4} y^4 + C(z)$$

$$C(y,z) = \tfrac{1}{5} z^5 + C(y)$$

$$F(x = \tfrac{1}{3} x^2 + \tfrac{1}{4} y^4 + C(z)$$

$$\partial_z = z^4 \overset{!}{=} \partial_z F_x = C'(z)$$

$$C(z) = \tfrac{1}{5} z^5$$

$$F(x,y,z) = \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{4} y^4 + \tfrac{1}{5} z^5$$

4

Aufgabe 3. (*2 + 3 + 3 = 8 Punkte*) Wir wollen im folgenden annehmen, dass die Lebensdauer T eines Turbinen-Strahlwerks, wie es in einem modernen Düsenflugzeug verwendet wird, exponentialverteilt zum Parameter λ ist, d.h. $P(T > t) = e^{-\lambda t}$, wobei die Zeit t in Tausend Betriebsstunden berechnet ist.

3A. Es ist bekannt, dass ein Triebwerk im Schnitt etwa 10.000 Stunden (d.h. 10 Tausend Betriebstunden) durchhält. Bestimmen Sie den zugehörigen Parameter: $\lambda =$ $\frac{1}{10}$ ← Mittelwert $= 0{,}1$

2

3B. Sei $\lambda = 1/5$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p hält das Triebwerk weniger als 10.000 Stunden? Runden Sie auf zwei Nachkommastellen. $p =$ 0,86

$P(t \leq 10) = 1 - e^{-\frac{1}{5}\cdot 10} = 1 - 0{,}14 = 0{,}86$

3

3C. Eine Fluggesellschaft benötigt Triebwerke, die mit 90%-tiger Wahrscheinlichkeit auch nach 5.000 Einsatzstunden noch funktionieren sollen. Bestimmen Sie den zugehörigen Parameter:

$\lambda =$ $\boxed{0{,}022}$ (Runden Sie auf drei Nachkommastellen.)

$t = 5$

$P(T > t) \stackrel{!}{=} 0{,}9$

$e^{-\lambda \cdot 5} = 0{,}9$

$-\lambda \cdot 5 = \ln(0{,}9) = -0{,}11$

$\lambda = \frac{0{,}11}{5} = 0{,}022$

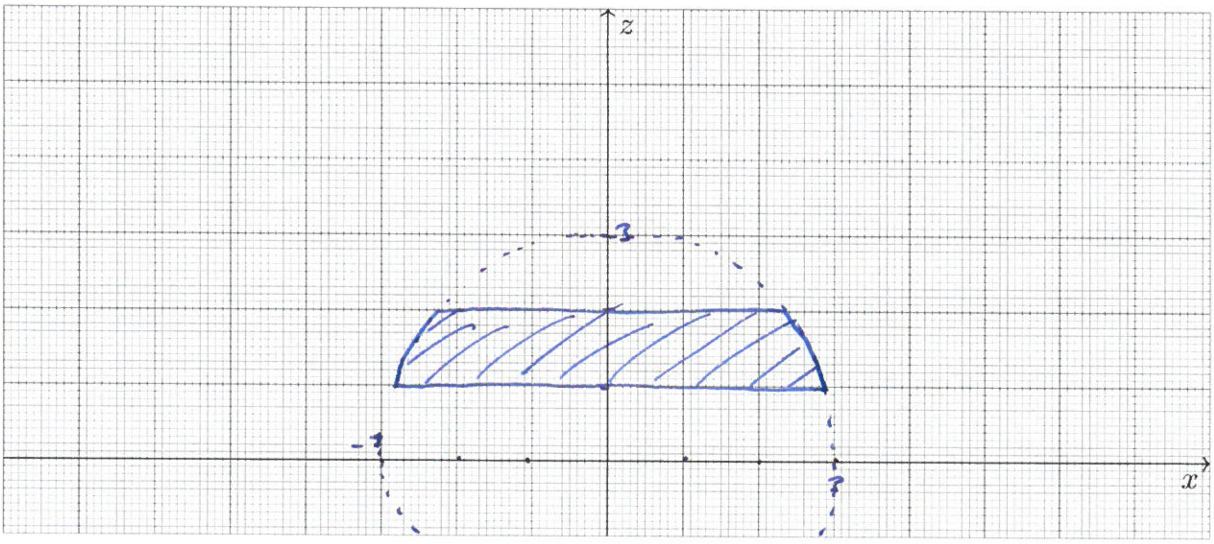
3

Aufgabe 4. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze (2 + 3 + 4 + 3 = 12 Punkte)*

Der Körper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x^2+y^2+z^2 \le 9 \\ 1 \le z \le 2 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad f(x,y,z) = \Big(x - z,\, 2x + y,\, 4(x^2+y^2)\Big).$$

4A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:



Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 1 \le z \le 2, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le \boxed{\sqrt{9-z^2}} \end{cases}$$ 2

4B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen $\mathrm{vol}_3(K)$ des Körpers K:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K 1 \, dK = \int_{z=1}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{9-z^2}} \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sqrt{9-z^2}^{\,2} \, d\varphi \, dz$$

$$= \int_1^2 2\pi \sqrt{9-z^2}^{\,2} \, dz$$

$$\det\Phi' = \cos\varphi\,\rho\cos\varphi + \sin\varphi\,\rho\sin\varphi \qquad = \pi \int_1^2 (9-z^2)^{\frac{2}{2}} \, dz \qquad = \pi\left[9z - \frac{1}{3}z^3\right]_1^2$$

$$= \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$= \rho$$

$$= \pi\left(\left(18 - \frac{8}{3}\right) - \left(9 - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{20}{3}\pi$$

$$\frac{54}{3} - \frac{8}{3} \qquad \frac{27}{3} - \frac{1}{3}$$ 3

4C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = 1$, dem Deckel D mit $z = 2$ und dem Mantel M. Berechnen Sie den Fluss von f aus K heraus durch D:

$$I_D = \int_{s\in D} f(s) \cdot \mathrm{d}S = \cancel{\text{Gauß} \int_{v\in V} \operatorname{div} f(v)\, dV} = \int f(\phi(\rho,\varphi)) \cdot n \; d(\rho,\varphi)$$

$\rho\cos\varphi$

$$\cancel{\int_{v\in V} \dots dV} = \int 4(\rho^2\cos\varphi^2 + \rho^2\sin\varphi^2)\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}} \rho^2 \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi$$

$n = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $z=1$

$$= 4\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sqrt{5}^4\, d\varphi = 4\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4}\cdot \sqrt{5}^4 = 50\pi$$

Folgern Sie den Fluss I_B des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Boden B:

$$I_B = \int_{s\in B} f(s) \cdot \mathrm{d}S = -4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} \rho^3\, d\rho\, d\varphi$$

$n = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$= -4\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\cdot 64\, d\varphi$$

$$= -128\pi$$

4

4D. Berechnen Sie den Fluss I_M des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Mantel M:

$$I_M + I_B + I_D = \int_{s\in S} f(s)\, dS = \int_{v\in\partial K} \operatorname{div} f(v)\, dV$$

$$= \int_{v\in\partial K} 2\, dV$$

$$= 2\cdot \mathrm{Vol}_3(K) = \frac{40}{3}\pi$$

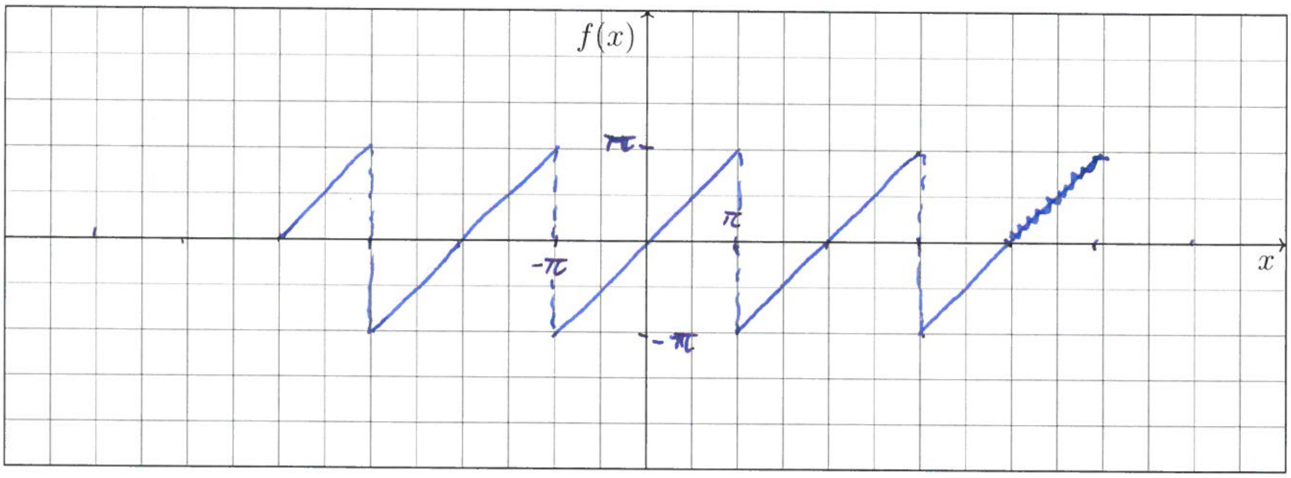
$$+78\pi + \frac{40}{3}\pi = I_M$$

3

Aufgabe 5. *Fourier–Reihen* (*2 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte*) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei 2π-periodisch und ungerade mit $f(x) = x$ für $0 < x < \pi$.

↳ Pktsymmetr.

5A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.



Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, e^{ikx}$ von f im Punkt $x = \pi$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) =$ $\boxed{0}$

2

5B. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, e^{ikx}$:

$c_0 =$ $\boxed{0}$

$c_k =$ $\boxed{(-1)^k \frac{1}{\pi k^2} \quad \{0\ ???\}}$ für $k \neq 0$.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{e^{-ikx}}_{v'} \underbrace{f(x)}_{x\,=\,u} \, dx$$ Partielle Integration

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{ik}e^{-ikx}\cdot x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{ik}e^{-ikx}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{1}{ik}e^{-ikx}\cdot x\right]_{-\pi}^{\pi} - \left[-\frac{1}{k^2}e^{-ikx}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{e^{-i\pi k}}{ik}\cdot\pi - \frac{e^{i\pi k}\cdot(-\pi)}{ik}\right) + \frac{e^{-i\pi k}}{k^2} + \frac{e^{i\pi k}}{k^2}$$

$$\cancel{= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{e^{-i\pi k} + e^{i\pi k}}_{\cos(\pi k)}\right)\left(\frac{\pi}{ik}+\frac{1}{k^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-i\pi k}}{ik}\cdot\pi - \frac{e^{i\pi k}}{ik}\cdot\pi\right) + \left(\frac{e^{-i\pi k}}{k^2} + \frac{e^{i\pi k}}{k^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}\pi\left(\underbrace{\frac{e^{-i\pi k}}{2i} - \frac{e^{i\pi k}}{2i}}_{\sin(\pi k)}\right) + \frac{1}{k^2}\left(\underbrace{\frac{e^{-i\pi k}}{2} + \frac{e^{i\pi k}}{2}}_{\cos(\pi k)}\right)\right)$$

$$\cancel{= \frac{1}{k}\underbrace{\sin(\pi k)}_{=0} + \frac{1}{\pi k^2}\cos(\pi k)}$$

$$\cancel{= (-1)^k \frac{1}{\pi k^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi e^{-ik\pi}}{ik} - \frac{\pi e^{ik\pi}}{ik} - \left[\frac{1}{(-ik)^2}\cdot e^{-ikx}\right]_{x=-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{ik}\cos(k\pi) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-ik\pi}}{(-ik)^2} - \frac{e^{ik\pi}}{(-ik)^2}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{ik}\cos(k\pi) + -\frac{1}{ik^2}\sin(k\pi)\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi i}{k}\cos(k\pi) + \frac{i}{k^2}\sin(k\pi)\right)$$

$$= \frac{i}{k}\cos(k\pi) - \frac{i}{\pi k^2}\sin(k\pi) \qquad \text{für alle } k \neq 0$$

3

5C. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k der reellen Fourier-Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$a_0 =$	0	
$a_k =$	0	für $k \geq 1$,
$b_k =$	$2(-1)^{k+1} \frac{1}{k}$	für $k \geq 1$.

$a_k = c_k + c_{-k}$ $\qquad$ $b_k = i(c_k - c_{-k})$

2

5D. Betrachten Sie jetzt die Funktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
Bestimmen Sie die Koeffizienten A_k und B_k ihrer reellen Fourier-Reihe:
$F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$A_0 =$	0	
$A_k =$	0	für $k \geq 1$,
$B_k =$	$-$	für $k \geq 1$.

f ungerade -> F gerade -> $A_n = 0$

3

Aufgabe 6. *Differentialgleichungssystem (4 + 3 + 3 + 2 = 12 Punkte)*

Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$ mit AWP:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) + e^{-t}, & y_1(0) = 1 \\ y_2'(t) = -y_1(t) - 2e^{-t}. & y_2(0) = 2. \end{cases}$$

6A. Bestimmen Sie die Matrix A des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystem, ihr charakteristisches Polynom und die Eigenwerte.

$(-2-\lambda)(-\lambda)+1$

$A = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix}$, $P(\lambda) = 2\lambda + \lambda^2 + 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$.

$P(\lambda) = (\lambda+1)^2 \quad \rightarrow \lambda_{1,2} = -1$

$Av = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -v \qquad Aw = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v - w$

4

Im folgenden geben wir Ihnen die beiden Vektoren $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vor.

6B. Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix des homogenen Differentialgleichungssystems. *Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass $Av = -v$ und $Aw = -w + v$ gilt.

$y_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_2(t) = e^{-t}\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $= e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}$

$Y(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$.

$\overline{}$
3

6C. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ durch Variationen der Konstanten.

$y_p(t) = \boxed{e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2+t \\ -\frac{3}{2}t^2-2t \end{pmatrix}}$. Machen Sie die Probe.

Ansatz: $y_p(t) = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix}t\\t+1\end{pmatrix}$

det(W) = 1

$1 + c\,1 \qquad e^{t}\begin{pmatrix} t+1 & -t \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$$y_p(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 1 & t+1\end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix}1 & t\\ 1 & t+1\end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix}e^{-t}\\ -2e^{-t}\end{pmatrix} dt \; +$$

$$\left(+ \begin{pmatrix}1 & t\\ 1 & t+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 1 & t+1\end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{+t}(t+1)\cdot e^{-t} + 2te^{-t} \\ -e^{+t} - 2e^{-t}\end{pmatrix} dt \; +$$

$$+ \begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} e^{-t}$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 1 & t+1\end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} 3t+1 \\ -3\end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix}1\\ t+2\end{pmatrix} e^{+t}$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 1 & t+1\end{pmatrix}\left[\begin{matrix}\frac{3}{2}t^2+t \\ -3t\end{matrix}\right]_0^t + \begin{pmatrix}1\\ t+2\end{pmatrix}$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 1 & t+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}t^2+t \\ -3t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ t+2\end{pmatrix}$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}t^2+t-3t^2 + 1 \\ \frac{3}{2}t^2+t-3t^2-3t + t+2\end{pmatrix}$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}t^2+t + 1 \\ -\frac{3}{2}t^2-2t + (t+2)\end{pmatrix}$$

3

6D. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = \boxed{e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2+t \\ -\frac{3}{2}t^2-2t \end{pmatrix} + C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix}},$$

$$y_{\mathrm{AWP}}(t) = \boxed{e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2+t+1 \\ -\frac{3}{2}t^2-t+2 \end{pmatrix}}$$

$y_{AWP}(t)$ bereits in c) berechnet

$$y(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2+t \\ -\frac{3}{2}t^2-2t \end{pmatrix} + Y(t)Y^{-1}(t)\, y_0$$

$$y_{AWP}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2+t+1 \\ -\frac{3}{2}t^2-t+2 \end{pmatrix}$$

2

Aufgabe 7. *Charaktertest (2 + 2 + 3 = 7 Punkte)*

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto u(x, y)$ die partielle Differentialgleichung

$$2\partial_y u + (u + y)\,\partial_x u = u \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$
$$u(x, 0) = x \qquad \text{für } y = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

7A.

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu $u(x(s), y(s)) = z(s)$ an:

$x'(s) =$ $z(s) + y(s)$, $x(0) = x_0$,

$y'(s) = 2$, $y(0) = 0$,

$z'(s) =$ $z(s)$, $z(0) = x_0$.

2

7B.

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik $s \mapsto (x(s), y(s), z(s))$:

$y(s) = 2s$, $z(s) =$ $x_0 e^s$, $x(s) =$ $x_0 e^s + s^2$

2

7C.

Bestimmen Sie die gesuchte Lösung und machen Sie die Probe: $u(x,y) = \boxed{x - \frac{1}{4}y^2}$

$y(s) = 2s \longrightarrow s = \frac{1}{2}\, y(s)$

$x(s) = x_0 e^s + s^2$

$x(s) = x_0\, e^{\frac{1}{2}y(s)} + \left(\frac{1}{2}\, y(s)\right)^2$

$x_0 = \dfrac{x(s) - \left(\frac{1}{2}y(s)\right)^2}{e^{\frac{1}{2}y(s)}}$

$z(s) = x_0\, e^s \quad \nearrow \quad$ Subst.

$U(x,y) = \dfrac{x - \frac{1}{4}y^2}{e^{\frac{1}{2}y}}\, e^{\frac{1}{2}y}$

$= x - \frac{1}{4}y^2$

Probe

$\partial_y u = -\frac{1}{2}y$

$\partial_x u = 1$

$-2 \cdot \frac{1}{2} y + (u + y) \cdot 1 = u$

$u = u \quad \checkmark$

3

Diese Seite ist nur zufällig leer und muss es nicht bleiben.

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/14	/12	/13	/10	/74

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $V = \{\, f(x) = a_0 + a_1\,\mathrm{e}^{x} + a_2\,\mathrm{e}^{2x} + a_3\,\mathrm{e}^{3x} \mid a_k \in \mathbb{R} \,\}$ betrachten wir die Ableitung $\partial : V \to V : f \mapsto f'$ als lineare Abbildung. Ist ∂ diagonalisierbar?

Begründete Antwort:

Ja, bezgl. der Basis $(1, e^{x}, e^{2x}, e^{3x})$ wird ∂ dargestellt durch
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2

2B. Auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $W = \mathbb{R}[x]_{\le 3} = \{\, f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_k \in \mathbb{R} \,\}$ betrachten wir die Ableitung $\partial : W \to W : f \mapsto f'$ als lineare Abbildung. Ist ∂ diagonalisierbar?

Begründete Antwort:

Nein, Hauptvektorkette: $\frac{x^3}{3!} \to \frac{x^2}{2!} \to \frac{x}{1} \to 1 \to 0$, also
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2

2C. Gibt es eine Differentialgleichung $y(x)' = a + b\,y(x) + c\,y(x)^2$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$, die keine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erlaubt?

Begründete Antwort:

Ja, Bsp.: $y' = 1 + y \to y(x) = \tan(x - x_0)$ hat Polstellen

2

2D. Hat jede partielle Differentialgleichung $(ax+by)\,\partial_x u(x,y) + x\,\partial_y u(x,y) = 0$ mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ und Startwerten $u(x,0) = \sin(x)$ genau eine Lösung $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

Nein, so gestellte PDGL kann über- oder unterbestimmt sein:

$\to \partial_x u + x\,\partial_y u = 0$ → keine globale Lösung (überbestimmt)

$y\,\partial_x u + x\,\partial_y u = 0$ → mehrere Lösungen (unterbestimmt)

/2

2E. Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir $E = \{\, (0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \geq 1 \,\}$, eine Ebene mit Einzelspalt, und ihr Komplement $U = \mathbb{R}^3 \setminus E$. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?

Begründete Antwort:

Ja, U ist sternförmig und somit einfach zusammenhängend

/2

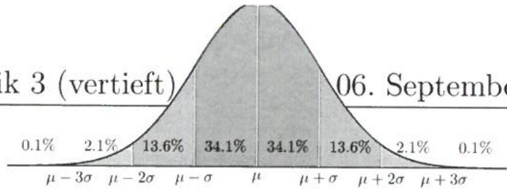
2F. Wir betrachten $D = \{\, (0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq 1 \text{ oder } |y| \geq 3 \,\}$, eine Ebene mit Doppelspalt, und ihr Komplement $V = \mathbb{R}^3 \setminus D$. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : V \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?

Begründete Antwort:

Nein, Menge ist nicht einfach zusammenhängend. Gegenbeispiel:

$f(x,y,z) = (-y, x, 0)/(x^2+y^2)$

/2



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeitsrechnung (4+3+3+2 = 12 Punkte)*

3A. Bei einer Wahl mit 1 Million Stimmberechtigten stimmten 45% für Kandidat A, 35% für B und 20% für C. Nach der Wahl befragen Sie 2500 zufällig ausgewählte Wähler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p liegt dabei die Anzahl der C-Wähler zwischen 470 (a) und 530 (b) einschließlich? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

$N = 1\,000\,000$ $\quad P(A) = 45\%$ $\quad P(B) = 35\%$ $\quad P(C) = 20\% = t$

$n = 2500$ $\quad K(C) = 200000$

$P(470 \leq C \leq 530)$ → Hypergeometr. Verteilung

$E = n\frac{K}{N} = 2500 \cdot \frac{2}{10} = 500$; $\sigma = \sqrt{nt(1-t)} = 20$, $\mu = 500$

Näherung durch Normalverteilung: $\alpha = \frac{1}{\sigma}(a - \frac{1}{2} - \mu) = \frac{1}{20}\cdot(-30{,}5) = -1 - \frac{10{,}5}{20} = -1{,}55$

$\beta = \frac{1}{\sigma}(b + \frac{1}{2} - \mu) = 1{,}55$

Erg $= 1{,}525$

$P(470 \leq x \leq 530) = \int_0^\beta \varphi(t)\,dt - \int_0^\alpha \varphi(t)\,dt$

$= 0{,}43943 \cdot 2$

$0{,}43943$

$= 0{,}87886$

$87{,}886\%$

4

3B. Cambridge Analytica platziert eine gezielte Werbung W für C-Wähler in sozialen Medien; dank Targeting erreicht die Werbung 10% der A-Wähler, 30% der B-Wähler und 75% der C-Wähler. Mit welcher Wkt q (in %) ist ein zufällig ausgewählter Werbeempfänger ein C-Wähler?

$P(A) = 0{,}45$ $\quad P(B) = 0{,}35$ $\quad P(C) = 0{,}2$

~~4~~ $P(W|A) = 0{,}1$ $\quad P(W|B) = 0{,}3$ $\quad P(W|C) = 0{,}75$

$P(C|W) = \frac{P(W|C)\cdot P(C)}{P(W)}$

$P(W) = P(W|A)\cdot P(A) + P(W|B)P(B) + P(W|C)P(C)$

$= 0{,}045 + 0{,}105 + 0{,}15$

15
105
045
300

$= 0{,}3$

$P(C|W) = \frac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5$

$= 50\%$

3

3C. Zur Besetzung einer Juniorprofessur laden Sie fünf Bewerber ein. Erfahrungsgemäß sagt jeder dritte ab (zufällig, unabhängig voneinander). Mit welcher Wkt erscheinen $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ Bewerber? (Antwort exakt als gekürzter Bruch und gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

1,6 sagen ab, $\frac{5}{3}$ 3,33 kommen, $\frac{10}{3}$ Binomialverteilung!

Anzahl $k =$	0	1	2	3	4	5
exakt $\mathbf{P}(X{=}k) =$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{\cancel{8}\,40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$
gerundet $\mathbf{P}(X{=}k) \approx$	0.00	0.04	~~0,16~~ 0,16	0,32	0,32	0.13

3

3D. In einer Lostrommel liegen 10 Kugeln, davon 4 rote und 6 schwarze. Sie ziehen drei Kugeln zufällig ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p ziehen Sie genau eine rote und zwei schwarze Kugeln? (Ansatz als Formel und Ergebnis als gekürzter Bruch.)

$p =$ $P(R) = 0,4$ $\quad P(S) = 0,6$ $\quad$ Hypergeometr. Verteilung

$$P(R=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{4 \cdot 15}{\frac{720}{6}} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2} = 50\%$$

2

Aufgabe 4. *Differentialgleichungen* (*7+7 = 14 Punkte*)

Zu lösen ist für $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die Differentialgleichung $\underbrace{y}_{f} + \underbrace{\left[1-\mathrm{e}^{-x}y\right]}_{g} y' = 0$ mit $y(0) = -1$.

4A. Ist diese Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie hierzu die Rotation des zugehörigen Vektorfeldes $(f,g):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$:

$\operatorname{rot}(f,g) =$ $e^{-x}y - 1 \neq 0$ -> DGL nicht exakt -> Integrierender Faktor ist nötig

Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor λ, der nur von x oder y abhängt:

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{(e^{-x}y-1)}{-e^{-x}y+1} = 1 \quad ✓$$

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{e^{-x}y-1}{y} = e^{-x} - \frac{1}{y} \quad ↯$$

$$\to \ln(\lambda(x)) = x + C$$

$$\lambda(x) = C e^{x} \qquad ; \ C := e^{c}$$

Bestimmen Sie zum skalierten Vektorfeld $\lambda\cdot(f,g)$ das Potential $\Phi(x,y)$ mit $\Phi(0,-1) = 0$:

$\Phi(x,y) =$ $\underbrace{C}_{=1 \text{ setzen}} e^{x}y - \frac{1}{2}Cy^2 + C_0 \to \Phi(x,y) = e^{x}y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}$

Lösen Sie damit die Differentialgleichung $y + \left[1-\mathrm{e}^{-x}y\right] y' = 0$ zum Startwert $y(0) = -1$.

$y(x) =$

$y(x) = e^{x} - \sqrt{e^{2x}+3}$

4B. Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto u(t,x)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) + \cos(t)\,\partial_x u(t,x) = \tfrac{3}{2}\sqrt{t} \qquad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = \mathrm{e}^x \qquad \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu $u(t(s), x(s)) = z(s)$ an:

$t'(s) = 1,$ $\quad t(0) = 0,$

$x'(s) = \boxed{\cos(t(s))}$, $\quad x(0) = x_0,$

$z'(s) = \boxed{\frac{3}{2}\sqrt{t(s)}}$, $\quad z(0) = \mathrm{e}^{x_0}.$

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik $s \mapsto (t(s), x(s), z(s))$:

$t(s) = s,$ $\quad x(s) = \boxed{\sin(s) + x_0}$, $\quad z(s) = \boxed{s^{3/2} + e^{x_0}}$

Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung:

$u(t,x) = \boxed{t^{3/2} + e^{x - \sin(t)}}$

Machen Sie schließlich die Probe:

$\partial_t u(t,x) = \boxed{\frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} - \cos(t) e^{x} e^{-\sin(t)}}$

$\cos(t)\,\partial_x u(t,x) = \boxed{\cos(t) e^{x - \sin(t)}}$ ✓

7

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme (2+3+3+4 = 12 Punkte)*

Zu lösen ist $y'(t) = A\,y(t)$. Gegeben sind hierzu die Systemmatrix A und drei Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5A. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Eigenvektor von A: Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor $v_1 =$ $u_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 =$ $-i$

2

Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Hauptvektor zweiter Stufe von A zum Eigenwert $\lambda_3 = \lambda_4 = \mathrm{i}$. Geben Sie die Hauptvektorkette $v_4 \mapsto v_3 \mapsto 0$ aus Hauptvektor v_4 und Eigenvektor v_3 an:

$v_4 =$ $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1+i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ $\mapsto$ $v_3 =$ $(A-\lambda)v_4 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A-\lambda)v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie $v_2 \in \mathbb{C}^4$ so, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis aus Hauptvektorketten bildet:

$v_2 =$ $\begin{pmatrix} -2 \\ -1-i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -i & -2 & i \\ 1 & -1+i & 1 \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3

5B. Bestimmen Sie die Lösung $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ mit $y_1'(t) = A\,y_1(t)$ und $y_1(0) = v_1$:

$y_1(t) =$ $e^{-it} v_1 = e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Lösung $y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ mit $y_4'(t) = A\,y_4(t)$ und $y_4(0) = v_4$.

$$y_4(t) = e^{it}(v_4 + t v_3) = e^{it}\begin{pmatrix}-2+ti\\-1+i+t\\1\\t\end{pmatrix} \qquad y_3(t) = e^{it}\begin{pmatrix}i\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^4$ mit $y'(t) = A\,y(t)$ und $y(0) = u_1$ $\neq v_1$ $\quad u_1 = \mathrm{Im}(v_1) = \frac{v_1 - v_3}{2i}$

$$y(t) = \cancel{\ldots} = \mathrm{Im}\left(e^{-it}(v_2 + t v_1)\right) \cancel{+ e^{it}(\ldots)}$$
$$\cancel{\ldots} = \frac{y_1(t) - y_3(t)}{2i} = \begin{pmatrix}(-ie^{-it} - ie^{it})/2i\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\sin(t)\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

???

5C. Variation der Konstanten: Das inhomogene DGSystem $y'(t) = A\,y(t) + 2t(\cos t, \sin t, 0, \sin t)$ mit $y(0) = 0$ besitzt eine Lösung der Form $y_p(t) = c(t)(\cos t, \sin t, 0, \sin t)$. Berechnen Sie:

$$y_p'(t) = c'(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\0\\ \sin t\end{pmatrix} + c(t)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\0\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$$A y_p(t) = \begin{pmatrix}0&0&-1&-1\\1&-2&-1&2\\0&1&-1&-1\\1&-3&3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\0\\ \sin t\end{pmatrix}c(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\0\\ \cos t\end{pmatrix}c(t) = \cancel{\ldots}$$

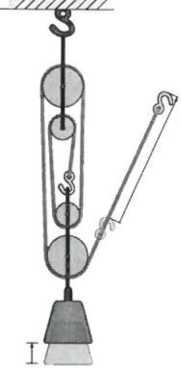
Einsetzen in unser inhomogenes DGSystem ergibt folgende Differentialgleichung für c:

$$c'(t) = \cancel{\ldots}\; c'(t)\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\\0\\ \sin\end{pmatrix} + c(t)\begin{pmatrix}-\sin\\ \cos\\0\\ \cos\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\\ \cos\\0\\ \cos\end{pmatrix}c(t) + 2t\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\\0\\ \sin\end{pmatrix}$$
$$= 2t\,\cancel{(\ldots)}$$

Die gesuchte Lösung zum Anfangswert $y(0) = 0$ ist daher:

$$c(t) = \quad y(0) = c(t)\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\\0\\ \sin\end{pmatrix} = 0 \quad \cancel{\ldots = t^2}$$
$$= t^2$$

4



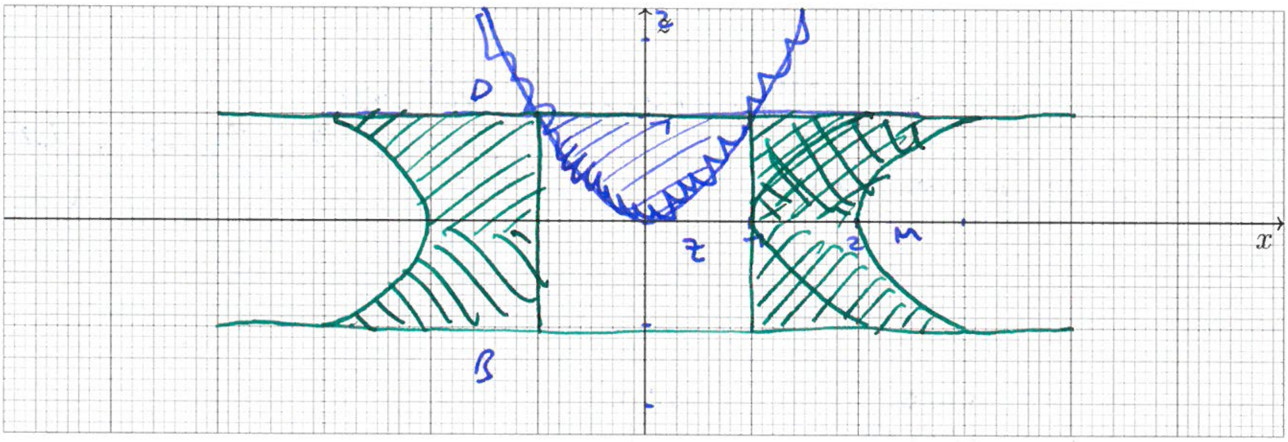
Aufgabe 6. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze (2+4+3+4 = 13 Punkte)*

Der Rotationskörper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} z^2 \le 1 \\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\cosh(z)^2 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ e^{x^2/4}\, e^{y^2/4} \end{pmatrix}.$$

Erinnerung: Es gilt $\cosh(z) = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ und $\sinh(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$. $4\cosh^2(z) = 4 \cdot \frac{1}{4}(e^{2z} + 2 + e^{-2z})$

6A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:



Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -1 \le z \le 1 \\ \boxed{1} \le \rho \le \boxed{2\cos(z)} \end{cases}$$

$1 \le \rho^2(\cos^2 + \sin^2) \le 4\cosh(z)^2$

$\sqrt{\rho^2} \le \sqrt{4\cosh(z)^2}$

2

6B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen $\mathrm{vol}_3(K) \approx 29$ des Körpers K:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(K) &= \iiint \rho \, d \; d\rho \, dz \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_1^{2\cosh(z)} \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \tfrac{4}{2}\cosh(z)^2 - \tfrac{1}{2} \, dz \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} 2 \cdot \tfrac{1}{4}\left(e^{2z} + 2 + e^{-2z}\right) - \tfrac{1}{2} \, dz \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{4} e^{2z} + z - \tfrac{1}{4} e^{-2z} - \tfrac{1}{2} z \right]_{-1}^{1} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \cancel{\tfrac{1}{4} e^{2}} + 1 - \cancel{\tfrac{1}{4} e^{-2}} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} e^{-2} + 1 + \tfrac{1}{4} e^{2} + \tfrac{1}{2} \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} e^2 - \tfrac{1}{2} e^{-2} + 1 \, d\varphi = \pi\left(e^2 - e^{-2} + 2\right) \approx 29 \checkmark
\end{aligned}$$

4

$\phi_D = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $1 \le \rho \le 2\cos(1)$

6C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = -1$, dem Deckel D mit $z = +1$, dem Mantel M und dem Zylinder Z. Berechnen Sie den Fluss von f aus K heraus durch D:

$$I_D = \int_{s\in D} f(s) \cdot \mathrm{d}S = \int_{(\rho,\varphi)} \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \exp(\rho^2 - \frac{1}{4}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \rho \, d(\rho,\varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^{2\cos(1)} \exp(\rho^2 - \tfrac{1}{4}) \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[2\exp(\rho^2 - \tfrac{1}{4}) \right]_1^{2\cos(1)} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} 2e^{4\cos(1)^2 - \frac{1}{4}} - 2e^{\frac{3}{4}} \, d\varphi$$

$$= 4\pi \left(e^{\cos(1)^2} - e^{1/4} \right)$$

Folgern Sie den Fluss I_B des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Boden B:

$$I_B = \int_{s\in B} f(s) \cdot \mathrm{d}S = -\int_{s\in D} f(s) \cdot dS = -4\pi \left(e^{\cos(1)^2} - e^{1/4} \right)$$

(weil alles gleich, außer n-VZ)

$\phi_Z = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $-1 \le z \le 1$ $\}$

6D. Berechnen Sie den Fluss I_Z des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Zylinder Z:

$$I_Z = \int_{s\in Z} f(s) \cdot \mathrm{d}S = \int_{(z,\varphi)} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ e^{1/4} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) d(z,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-\sin$ $\cos$ 0 0 $\times$

$$= \int_{z,\varphi} -(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) \, d(z,\varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} -1 \, dz \, d\varphi = -4\pi$$

Folgern Sie den Fluss I_M des Vektorfeldes f aus K heraus durch den Mantel M:

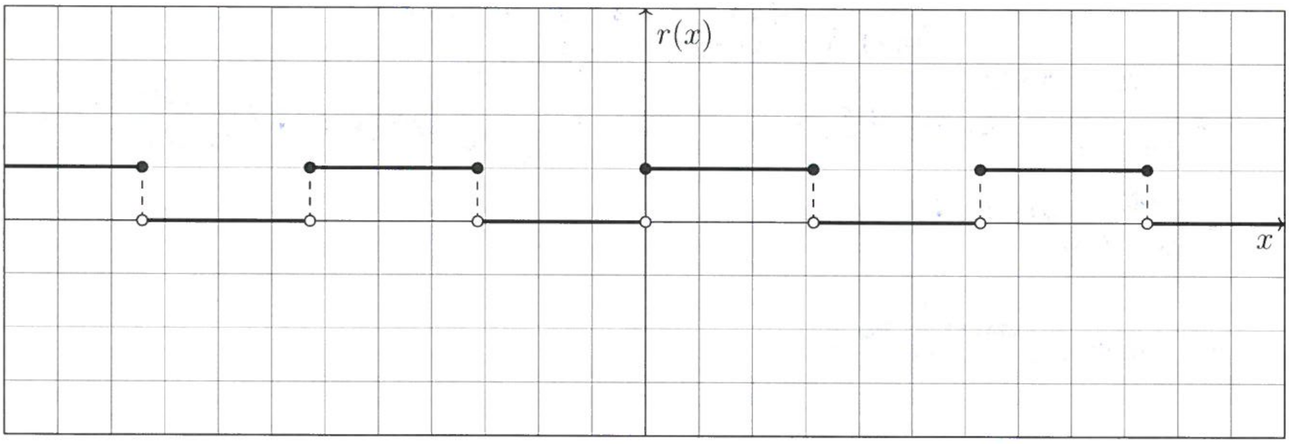
$$I_M + \underbrace{I_B + I_D}_{=0} + I_Z \stackrel{!}{=} \int_{s\in K} f \cdot ds = \int \underbrace{\operatorname{div} f(v)}_{=2} \, dV$$

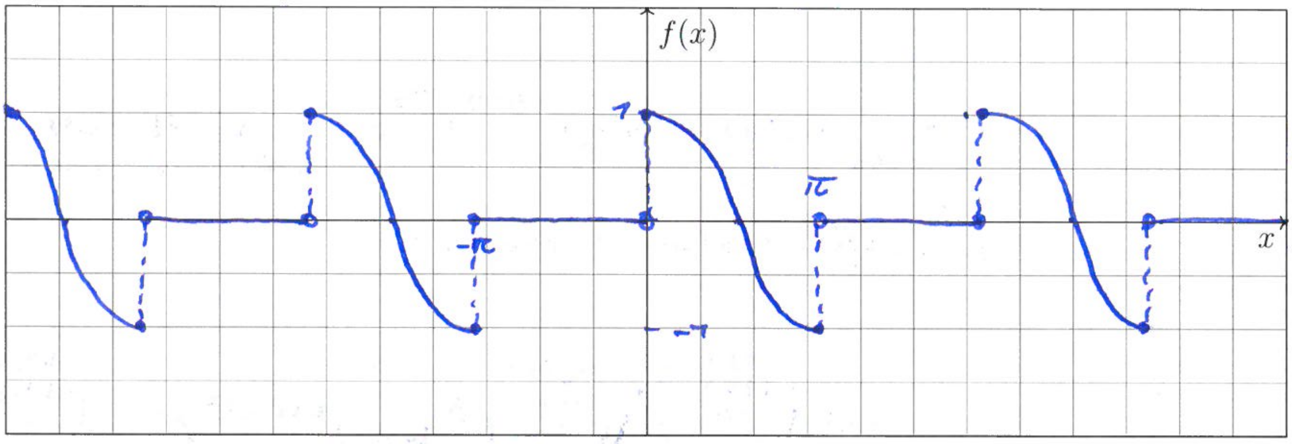
$$= \int 2 \cdot \mathrm{vol}_3(K) = 2\pi(e^2 - e^{-2} + 2)$$

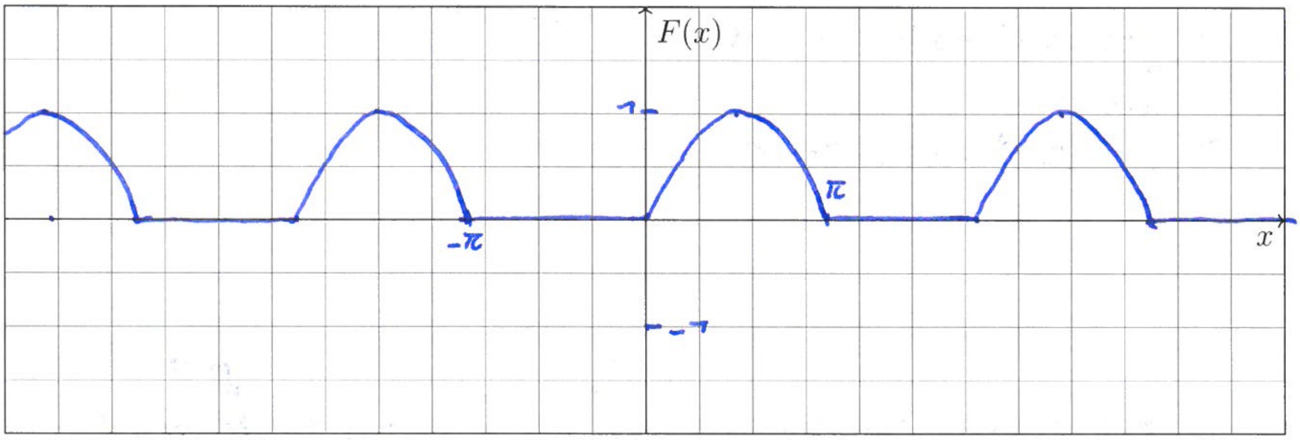
$$I_M = 2\pi(e^2 - e^{-2} + 4)$$

Aufgabe 7. *Fourier–Reihen (3+3+2+2 = 10 Punkte)*

7A. Die Rechteckfunktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $r(x) = 0$ für $-\pi < x < 0$ und $r(x) = 1$ für $0 \le x \le \pi$. Skizzieren Sie $f(x) = r(x)\cos(x)$ und $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,dt$ auf $[-12, 12]$:







Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f im Punkt $x = \pi$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

3

7B. Berechnen Sie die Koeffizienten γ_k der komplexen Fourier–Reihe $r(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k \, \mathrm{e}^{ikx}$:

$$\gamma_k = \begin{cases} \boxed{\frac{1}{2}} & \text{für } k = 0, \\ \boxed{-\frac{2}{-ik\pi \cdot 2} = -\frac{i}{k\pi} \; \cancel{(\cos e^{ik})} \;\checkmark} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ \boxed{0} & \text{für } k \neq 0 \text{ gerade.} \end{cases}$$

$\cancel{\frac{2i(-1)^k}{\pi k}}$

$\frac{-i(-1)^k}{\pi k} - 1$

3

Erinnerung: Dank der Euler–Formel $\mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ gilt

$$\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}.$$

Tipp: Das hilft beim Ausmultiplizieren von $f(x) = r(x)\cos(x)$.

7C. Folgern Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe

$$f(x) \sim \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{4}}_{\frac{1}{2}\cos(x)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{ikx} :$$

$$c_k = \begin{cases} \boxed{ϟ} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \boxed{ϟ} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

2

7D. Folgern Sie die Koeffizienten C_k der komplexen Fourier–Reihe

$$F(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{4i} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k \, \mathrm{e}^{ikx} :$$

$$C_k = \begin{cases} \boxed{ϟ} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \boxed{ϟ} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$

3
c) $P(0) = \binom{5}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-0}$

$\Rightarrow \frac{5!}{0!\,(5-0)!} = 1\cdot1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

$P(2) = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-2}$

$\Rightarrow \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{27} = 10\cdot\frac{4}{243}$

$P(3) = \cancel{10}\,1\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{9} \qquad = 1\cancel{3}0\cdot\frac{8}{243}$

$P(4) = 5\cdot\frac{16}{81}\cdot\frac{1}{3} = \frac{80}{243}$

4
a) Potential: zu $\begin{pmatrix} ce^x y \\ ce^x - cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}$

$\int ce^x y\,dx = ce^x y + C(y) = \tilde{v}$

$\frac{\partial}{\partial y}\tilde{v} \overset{!}{=} ce^x - cy = ce^x + C'(y)$

$C'(y) = -cy \quad \rightarrow C(y) = -\frac{1}{2}cy^2 + C$

$F(x,y) = ce^x y - \frac{1}{2}cy^2 + C_0 = \phi(x,y)$

$-c - c\cdot\frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad c=0\ ???$

$\cancel{y = \frac{-e^{-x}\cdot\phi}{e^x - \phi} = \frac{-e^{-x}\left(e^x y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}\right)}{\left(e^x - e^x y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}\right)}}$

$0 = e^x y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}$

$\frac{-e^x \pm \sqrt{e^{x^2} - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = e^x \pm \sqrt{e^{2x} + 3} = y(x)$

$y(0) = -1 \quad \rightarrow \quad y(x) = e^x - \sqrt{e^{2x} + 3}$

b) $s = t \qquad x(s) = \sin(t) + x_0 \quad \rightarrow \quad x_0 = x - \sin(t)$

$z(x,t) = t^{3/2} + e^{(x)}\cdot e^{-\sin(t)}$

⑤

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_2 + i \cdot v_1$$

$$\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} = -i \cdot v_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1+i \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2-i & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1-i & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +i \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot v_2 \quad ↯$$

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2-i & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1-i & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1+i \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i - i \\ -2 + (-2-i)(-1+i) + i \\ -1+i-i+1 \\ -2+3-3i+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} i & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2+i & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1+i & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⑦ b)

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} \underbrace{0}_{=0}\, dt + \int_0^{\pi} e^{-ikt}\, dt\Big) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-ik}\left(e^{-i\pi k} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{-ik} e^{-ik\pi} - \frac{1}{-ik} \cdot 1\right)$$

$$= \frac{1}{-ik\pi 2}\left(e^{-ik\pi} - 1\right) \qquad \hookrightarrow (-1)^k$$

$$= \frac{(-1)^k}{-ik\pi 2} - \frac{1}{-ik\pi 2} \checkmark$$

$$= -\frac{i(-1)^k}{k \cdot 2 \cdot \pi} + \frac{i}{k \cdot 2 \cdot \pi}$$

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/14	/12	/14	/10	/74

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Auf dem Dreieck $D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le 2y \le x \le 2 \,\}$ sei $f : D \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt, also $|f| \le M < \infty$. Gilt dann $\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{x/2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{1} \int_{x=2y}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$?

Begründete Antwort:

Ja, denn f ist absolut integrierbar $\to$ Fubini anwendbar

$\overline{}$ 2

2B. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\,\mathrm{e}^{ikx}$ die Fourier–Reihe einer C^∞–glatten 2π–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$?

Begründete Antwort:

$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{ik}}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{2}} = f(x)$ ~~ist~~

ist 2π-Periodisch und C^∞-glatt

$\overline{}$ 2

2C. Gibt es Differentialgleichungen $y'(x) = f(y(x))$ mit stetiger rechter Seite $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass sich manche Lösungen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überkreuzen, genauer $u(-1) < v(-1)$ und $u(1) > v(1)$?

Begründete Antwort:

Ja, z.B. $y' = \sqrt[3]{y^2}$ mit $f(y) = \sqrt[3]{y^2}$ als rechter Seite

Mögliche Lösungen $u(x) = \frac{x^3}{27}$ und $v(x) = 0$

$\overline{}$ 2

2D. Ist der Fixpunkt $(0,0)$ des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = 2x + y$, $\dot{y} = y^2 + 3x$ stabil?

Begründete Antwort:

Jacobi-Matrix : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\det A = -3 < 0$

$(2-\lambda)(-\lambda) - 3 = -2\lambda + \lambda^2 - 3$

$\frac{+2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (+1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (+1)}$

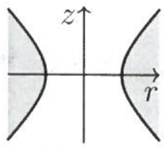
$\to$ Instabilität

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$

negativer Eigenwert

2

2E. Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den Rotationskörper
$U = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \le x^2 + y^2 - 1 \}$ wie rechts skizziert.
Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?



Begründete Antwort:

Nein, denn U ist nicht einfach zusammenhängend

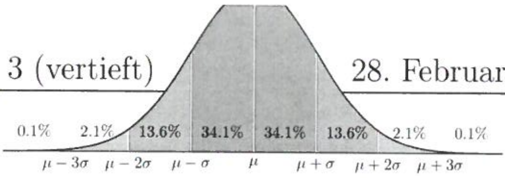
2

2F. Sei $V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2 + 1 \}$ das Komplement von U.
Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : V \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?

Begründete Antwort:

Ja, denn V ist einfach zusammenhängend (und sternförmig)

2



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeitsrechnung (4+3+4 = 11 Punkte)*

3A. Die deutschen Euromünzen werden geprägt in A = Berlin (20%), D = München (20%), F = Stuttgart (25%), G = Karlsruhe (15%) und J = Hamburg (20%). Sie wählen zufällig 1200 deutsche Euromünzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p kommen höchstens 315 aus Stuttgart? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

Binomialverteilung: $1200 = n$, $t = 0{,}25$, $\mu = 300$, $\sigma = \sqrt{225} = 15$

$P(h \le 315)$

Annäherung über Normalverteilung:

$$\int_{-\infty}^{315} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2} + \int_0^{\beta} \varphi(t)\,dt \quad ; \quad \beta = \frac{1}{\sigma}\left(b + \frac{1}{2} - \mu\right) = \frac{15{,}5}{15}$$

$$= \frac{15}{15} + \frac{0{,}5}{15} = 1{,}033$$

$P(h \le 315) = 0{,}5 + 0{,}34844$

$= 84{,}84\%$

4

3B. Sie suchen einem Prägefehler, der insgesamt mit Wkt $1/1000 = 0.1\%$ auftritt. Sie wählen zufällig 2000 Münzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit q finden Sie höchstens 2 fehlerhafte? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

Binomialverteilung angenähert über Poissonverteilung:

$E = \lambda = 2$

$P(h \le 2) = P(h=0) + P(h=1) + P(h=2)$

$= \frac{1}{1} e^{-2} + \frac{2^1}{1} e^{-2} + \frac{2^2}{2!} e^{-2}$

$= e^{-2}(1+2+2)$

$= 0{,}135 \cdot 5 = 0{,}675$

3

3C. Zur Qualitätskontrolle sortiert eine Maschine gebrauchte Münzen in fünf Kisten. Münzen aus Stuttgart landen mit 80% Wkt in Kiste K_3, andere Münzen landen mit 20% Wkt in Kiste K_3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) landet eine zufällige Münze in Kiste K_3?

$P(F) = 0{,}25$ $P(Z) = 0{,}75$

$P(K_3|F) = 0{,}8$ $P(K_3|Z) = 0{,}2$

~~P(K_3) ... P(F|K_3) + P(Z|K_3)~~ Totale Wkt:

~~$= \frac{P(K_3|F)\cdot P(F)}{P(K_3)}$~~

$$P(K_3) = P(K_3|F)\,P(F) + P(K_3|Z)\,P(Z)$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}75 = 0{,}2 + 0{,}15$$

$$= 0{,}35$$

2

Sie entnehmen zufällig eine Münze aus der Kiste K_3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) wurde sie in Stuttgart geprägt?

$$P(F|K_3) = \frac{P(K_3|F)\,P(F)}{P(K_3)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}25}{0{,}35}$$

~~[illegible]~~

$$= \frac{4}{7} \approx 0{,}57$$

2

Aufgabe 4. *Differentialgleichungen (4+3+7 = 14 Punkte)*

4A. Zu lösen ist die lineare Differentialgleichung $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$$p(x) = x^2 + 4x + 5 = 0 = (x+2-i)(x+2+i) \qquad \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x_1 = -2+i, \quad x_2 = -2-i$$

Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ unserer Differentialgleichung:

$$y(t) = c_1 e^{(-2+i)t} + c_2 e^{(-2-i)t}, \quad c_{1,2} \in \mathbb{C}$$

Folgern Sie die allgemeine reelle Lösung $y:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$$y(t) = c_1 e^{-2} \cos(t) + c_2 e^{-2} \sin(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4

4B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^t$.

$$y(t) = \frac{e^t}{10}$$

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y:\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{(-2+i)t}$.

$$y(t) = \frac{1}{-4+2i+4} e^{(-2+i)t} \cdot t = \frac{t}{2i} e^{(-2+i)t} = -\frac{ti}{2} e^{(-2+i)t}$$

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = e^{-2t}\cos(t)$. $= \mathrm{Re}(e^{(-2+i)t}$

$$= \mathrm{Re}\left(-\frac{ti}{2} e^{(-2+i)t}\right) = \frac{1}{2} t e^{-2t} \sin(t) - \frac{i}{2} t e^{-2t} \cos(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} t e^{-2t} \sin(t)$$

3

4C. Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) + 2t\,\partial_x u(t,x) = -u(t,x) \qquad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = \cos(x) \qquad \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu $u(t(s), x(s)) = z(s)$ an:

$t'(s) = 1,$ $t(0) = 0,$

$x'(s) = 2t(s),$ $x(0) = x_0,$

$z'(s) = -z(s),$ $z(0) = \cos(x_0).$

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik $s \mapsto (t(s), x(s), z(s))$:

$t(s) = s,$ $x(s) = x_0 + s^2,$ $z(s) = C_1 e^{-s} \to \cos(x_0) e^{-s}$

Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung: $s = t$; $x = x_0 + t^2 \to x_0 = x - t^2$

$u(t,x) = \cos(x - t^2) e^{-t}$

Machen Sie schließlich die Probe:

$\partial_t u(t,x) = -\cos(x-t^2)e^{-t} + 2t\sin(x-t^2)e^{-t}$
$= e^{-t}(-\cos(x-t^2) + 2t\sin(x-t^2))$

$2t\,\partial_x u(t,x) = 2t\cdot(-\sin(x-t^2)e^{-t}) = -2t\sin(x-t^2)e^{-t}$ ✓

7

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme (2+4+2+4 = 12 Punkte)*

Zu lösen ist $y'(t) = A\,y(t)$. Gegeben sind hierzu die Systemmatrix A und drei Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2
~~2~~ - 9,5
1
-2

5A. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Eigenvektor von A: Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = u_3$ (siehe Blatt) zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$

2

5B. Die drei verbleibenden Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ von A sind gleich, berechnen Sie diese:

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$

$Sp(A) \overset{!}{=} \Sigma\lambda \rightarrow 1 = x + x + x - 2$

$x = 1$

Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Hauptvektor zweiter Stufe von A. Geben Sie die Hauptvektorkette $v_3 \mapsto v_2 \mapsto 0$ aus Hauptvektor v_3 und Eigenvektor v_2 an:

$v_3 = u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad v_2 = (A - E1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie $v_4 \in \mathbb{R}^4$ so, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis aus Hauptvektorketten bildet:

$v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4

5C. Bestimmen Sie die Lösung $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_1'(t) = A\,y_1(t)$ und $y_1(0) = v_1$.

$\cancel{c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{t}}$ $y_1(0) = (1,-1,0,-1)^T$

$y_1(t) = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} \to e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Lösung $y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_3'(t) = A\,y_3(t)$ und $y_3(0) = v_3$.

$e^{t}\begin{pmatrix}2t\\1\\t\\1\end{pmatrix}$

$y_3(t) = \cancel{e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} + e^{t} c_2 \begin{pmatrix}-1+t\\1\\t\\0\end{pmatrix} \to e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix}-1+t\\-1\\t\\0\end{pmatrix}}$

2

5D. Variation der Konstanten: Das inhomogene DGSystem $y'(t) = A\,y(t) - t\,\mathrm{e}^{(t^2/2)-2t}u_3$ mit $y(0) = 0$ besitzt eine Lösung der Form $y_p(t) = c(t)\,\mathrm{e}^{-2t}u_3$. Berechnen Sie:

$W(t) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

$y_p'(t) =$

$Ay_p(t) =$

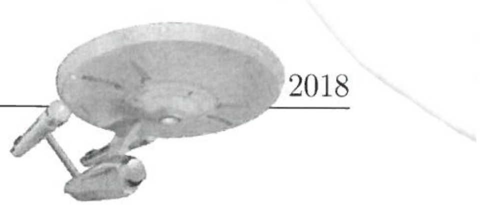
Einsetzen in unser inhomogenes DGSystem ergibt folgende Differentialgleichung für c:

$c'(t) =$

Die gesuchte Lösung zum Anfangswert $y(0) = 0$ ist daher:

$c(t) =$

4



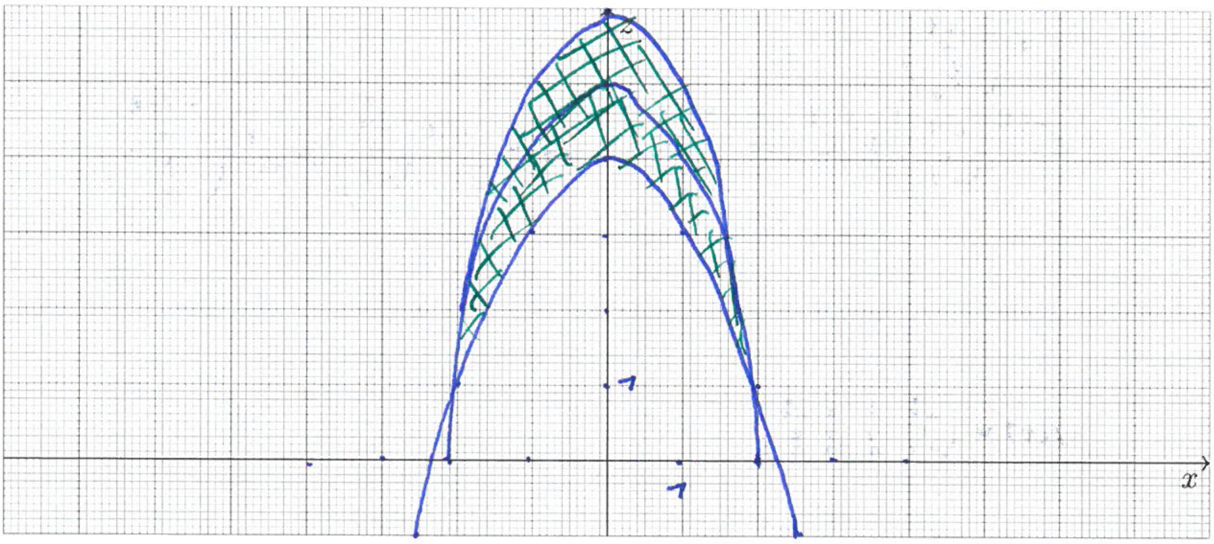
Aufgabe 6. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*3+3+5+3 = 14 Punkte*)

Der Rotationskörper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4 - x^2 - y^2 \le z \le 3\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ e^{-x^2} e^{-y^2} \end{pmatrix}.$$

6A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:

$4 - x^2 \le z \le 3\sqrt{4 - x^2}$



Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \boxed{2}, \\ \boxed{4 - \rho^2} \le z \le \boxed{3\sqrt{4-\rho^2}} \end{cases}$$

3

6B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen $\mathrm{vol}_3(K) \approx 25$ des Körpers K:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(K) &= \int_\varphi \int_\rho \int_z \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 3\rho\sqrt{4-\rho^2} - (4\rho - \rho^3) \, d\rho \, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} (4 - x^2)^{3/2} - \frac{1}{4} (4-\rho^2)^2 \right]_0^2 d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 8 - 4 \, d\varphi \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

siehe Blatt

3

6C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = 4 - x^2 - y^2$ und dem Deckel D mit $z = 3\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Wir parametrisieren B in Zylinderkoordinaten:

$$\Phi_B\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ 4-\rho^2\end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\Phi_B}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi_B}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ -2\rho\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{matrix}2\rho^2\cos\varphi\\ 2\rho^2\sin\varphi\\ \rho\,\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}\end{matrix}}$$

$\cos\varphi$ $\quad -\rho\sin\rho$
$\sin\varphi$ $\quad \rho\cos\rho$

Berechnen Sie mit Φ_B den Fluss des Vektorfeldes f durch B:

$$\int_{s\in B} f(s)\bullet \mathrm{d}S = \int f(\Phi)\cdot n \, d(\varphi,\rho) = \int -\rho\sin\varphi\cdot 2\rho^2\cos\varphi + \rho\cos\varphi\cdot 2\rho^2\sin\varphi + \exp(-\rho^2)\cdot\rho \, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 -\rho^3\cdot 2\cdot\cancel{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi + \rho^3\cdot 2\cdot\cancel{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi + \rho e^{-\rho^2}\, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} -\tfrac{1}{2}e^{-4} + \tfrac{1}{2}\, d\varphi$$

$$= -\pi e^{-4} + \pi$$

$$= \pi(1 - e^{-4})$$

Folgern Sie den Fluss des Vektorfeldes f aus dem Körper K durch den Deckel D nach oben:

$$\int_{s\in D} f(s)\bullet \mathrm{d}S = \boxed{\underbrace{\int_K \operatorname{div} f(v)}_{0+0+0} + \int_{s\in B} f(s)\bullet dS = -\pi(1-e^{-4})}$$

5

6D. Berechnen Sie den Fluss von $g = \operatorname{rot}(f)$ durch B nach oben als geeignetes Wegintegral:

$$\int_{s\in B} g(s)\bullet \mathrm{d}S = \int_{\partial B} f(s)\cdot d\Gamma \qquad \text{Stokes}$$

$$g = \operatorname{rot} f = \begin{pmatrix}-2y e^{-x^2-y^2}\\ 2x e^{-x^2-y^2}\\ 2\end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-2\sin\varphi\\ 2\cos\varphi\\ e^{-4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\sin\varphi\\ 2\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi \, d\varphi$$

$$\Phi_{\partial B} = \begin{pmatrix}2\cos\varphi\\ 2\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

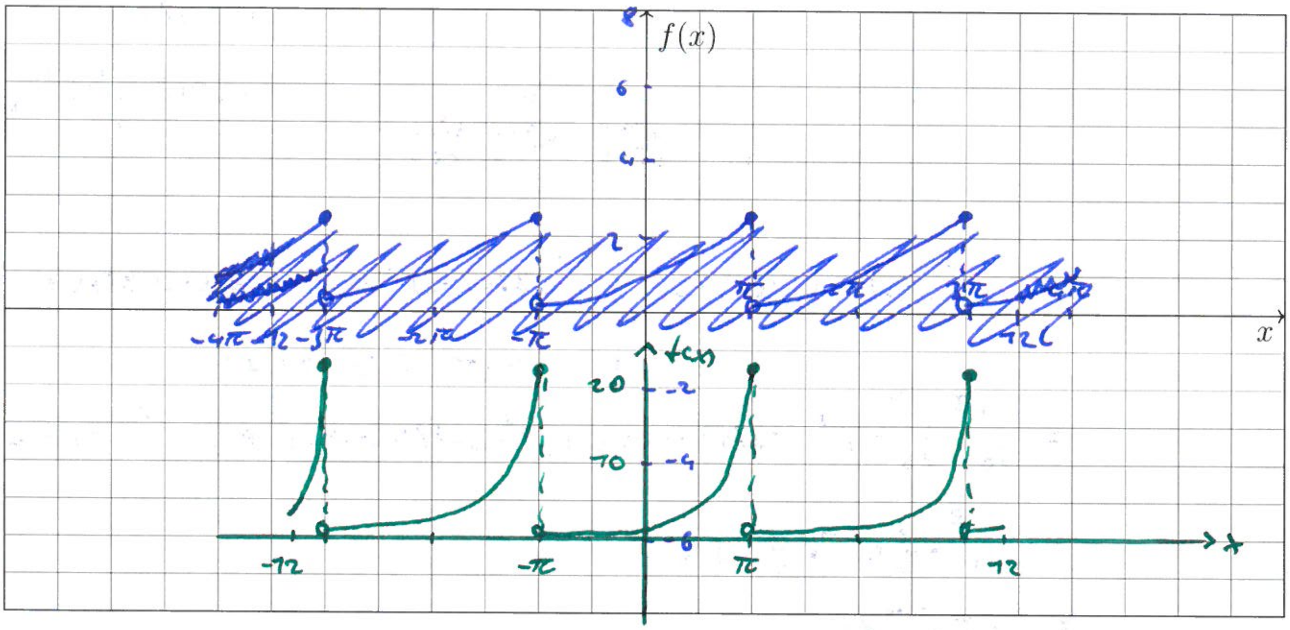
$$= 8\pi$$

3

Aufgabe 7. *Fourier–Reihen (2+4+2+2 = 10 Punkte)*

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ für $-\pi < x \leq \pi$.

7A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12, 12]$:



Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von f im Punkt $x = \pi$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}}$$

weil Dirichlet-kriterium

2

7B. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{t} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{t(-ik+1)} \, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{-ik+1} e^{t(-ik+1)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1+ik}{k^2+1} \left(e^{\pi(1-ik)} - e^{-\pi(1-ik)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1+ik}{1+k^2} \left(e^{\pi} - e^{-\pi} \right) (-1)^k$$

3

Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\pi(1+k^2)}\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right], \qquad b_k =$$

$\frac{2}{?}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) e^t \, dt = \ldots \qquad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$

$\left(c_k - \frac{a_k}{2}\right)\cdot 2 = \frac{1}{\pi}\frac{1+ik}{1+k^2}(-1)^k(e^{\pi}-e^{-\pi}) - \frac{(-1)^k}{2\pi(1+k^2)}(e^{\pi}-e^{-\pi})$

$= (e^{\pi}-e^{-\pi})\left(\frac{(-1)^k(1+ik)}{\pi(1+k^2)} - \frac{(-1)^k}{2\pi(1+k^2)}\right) = (e^{\pi}-e^{-\pi})\frac{(-1)^k(1+2ik)}{2\pi(1+k^2)}$

1

7C. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe von f an der Stelle $x = \pi$ den exakten Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \frac{1}{37} + \cdots \in [1.0, 1.1]$.

$f(\pi) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi(1+k^2)}(e^{\pi}-e^{-\pi})\underbrace{\cos(\pi k)}_{(-1)^k}$

$= \frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi(1+k^2)}$

$= \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2} + \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{1+k^2} \overset{!}{=} \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$

$\to \sum_1^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{e^{\pi}+e^{-\pi} - \cancel{(e^{\pi}-e^{-\pi})}}{2\,\cancel{(e^{\pi}-e^{-\pi})}}\cdot\pi$

$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\right) - \frac{1}{2}$

2

7D. Bestimmen Sie die komplexe Fourier–Reihe $f'(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikx}$ der Ableitung f' von f.

$\gamma_k = c_k = \frac{1}{2\pi}\frac{1+ik}{1+k^2}(e^{\pi}-e^{-\pi})(-1)^k$

Weil $f = f'$ auf $[-\pi, \pi]$, nur nicht in Sprungstellen

$\to$ f und f' haben die gleiche Fourier-Reihe

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

5

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = $ [illegible]

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = ???$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot V_3$

b) $A - E\lambda = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A - E\cdot\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; !$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ?!? \quad \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) EV bestimmen: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu $\lambda = -2$

$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 9 & -6 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{9} & \cancel{-6} & \cancel{-9} & \cancel{0} \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ |:3 \quad |+ z_1 \\ |- z_1 \end{array}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \cancel{v_2} =$ [illegible] $\quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 + x_2 \overset{!}{=} x_3 \; ; \; x_4 = 0 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Einfach die in Aufgabe gegebenen Eigenvektoren verwenden

$z(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

⑥

b) $\int 3x\sqrt{4-x^2}\,dx - \int x^3\,dx$ (Nur Nebenrechnung)

$= 3\int x\sqrt{4-x^2}\,dx - \frac{1}{4}x^4$ Subs. $u = 4-x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$= \frac{3}{2}\int \sqrt{u}\,du - \frac{1}{4}x^4$

$= \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]$ resubs

$= 3/2\left[\frac{2}{3}(4-x^2)^{3/2}\right]$

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

Prof Dr F. Witt

HM 3 aer/mawi
Modulprüfung

07.09.2017

Name:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punkte:								

Hinweis:

- Auf dieser Klausur sind maximal 76 Punkte zu erreichen.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich fünf eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausureinsicht ist voraussichtlich in der ersten Vorlesungswoche. Den genauen Termin finden Sie zeitnah auf der ILIAS Seite zur Vorlesung.
- Die Klausurergebnisse werden über das LSF bekannt gegeben.

Aufgabe 1 (4 + 4 + 4 + 4 Punkte).

Lösen Sie die folgenden kurzen Aufgaben.

a) **Wo ist etwas passiert? Wer meldet? Was ist passiert? ...** *Die Wahrscheinlichkeit eines Feuers in der Uni ist gering, sagen wir 0.1% jeden Tag. Im Brandfall wird mit 98%iger Sicherheit Alarm ausgelöst. Leider gibt es an 0.5% aller feuerfreien Tage Fehlalarm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit a geht der Feueralarm los? Mit welcher Wahrscheinlichkeit b brennt es, wenn Sie den Alarm hören?*

b) **Atomkraft? Ja bitte!** *Die Lebensdauer eines radioaktiven Teilchen genüge einer Exponentialverteilung mit Dichte* e $^{\lambda t}$. *Die Halbwertszeit sei 15 Jahre. Bestimmen Sie den Parameter* λ. *Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Teilchen nach 30 Jahren zerfallen?*

c) **Integrationsbemühung** *Wir betrachten folgende Differentialgleichung:*

$$y^0(3x^2 - y) = -2xy$$

Prüfen Sie, ob diese exakt ist. Falls nicht, finden Sie einen integrierenden Faktor $\nu(y)$.

d) **Am Anfang war das Problem** *Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:*

$$y^0 = \frac{3\,x^2 - 2\,y^2}{2\,x\,y} \qquad y(1) = 1.$$

Können Sie sich noch daran erinnern, dass so eine ähnliche Differentialgleichung in der Vorlesung behandelt wurde?

Aufgabe 2. Kriegen Sie die Kurve! *[3 + 5 + 4 Punkte]*

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$y\partial_x u - (x + 2y)\partial_y u + \partial_z u = 0$$

a) *Wie lautet das Gleichungssystem der Charakteristiken?*

b) *Bestimmen Sie die charakteristische Kurve* $c(t)$ *zum Anfangswert* $c(0) = (x_0, y_0, 0)$.

c) *Finden Sie die Lösung* u *der partiellen Differentialgleichung welche* $u(x, y, 0) = x + y$ *erfüllt.*

Aufgabe 3. Zu welchem Fluß kommen Sie? *[2 + 3 + 4 + 4 + 3 Punkte]*

Wir betrachten die Flächenparametrisierung

$$F(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r\,\cos(\varphi) \\ r\,\sin(\varphi) \\ 1 - r^2 \end{pmatrix}$$

mit $r \in [0, 1]$ *und* $\varphi \in [0, 2\pi]$.

a) *Skizzieren Sie die durch* F *parametrisierte Fläche und deren Rand.*

b) *Berechnen Sie den Normalenvektor* N_F. *Zeigt dieser nach innen oder nach außen?*

c) *Berechnen Sie das Flußintegral des Vektorfeldes*

$$Y := \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 4(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

durch die von F parametrisierte Fläche nach Außen.

d) *Berechnen Sie das Arbeitsintegral des Vektorfeldes*

$$X := \begin{pmatrix} -y\,x^2 \\ x\,y^2 \\ \frac{1}{4} z\,y \end{pmatrix}$$

längs der Kreislinie $\gamma(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.

e) *Berechnen Sie die Rotation von X und vergleichen Sie diese mit Y. Interpretieren Sie so die Ergebnisse aus c) und d) mit Hilfe des Satzes von Stokes. (Alternativ, falls Sie Aufgabenteil d) nicht lösen konnten, berechnen Sie das gesuchte Arbeitsintegral direkt mit Hilfe des Satzes von Stokes und Teil c).)*

Aufgabe 4. Ich wünsche mir eine Welt ohne Ableitungen *[12 Punkte]*

Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = e^{2t}$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$ mit Hilfe der Laplace-Transformation. Vergessen Sie die Probe nicht!

Aufgabe 5. Sprunghafte Entwicklung *[2 + 5 + 3 Punkte]*

Es ist die 2π-periodische gerade Funktion f mit

Symmetrisch an y-Achse

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

gegeben.

a) *Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.*

b) *Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.*

c) *Werten Sie die Fourier-Reihe von f bei $x_0 = 0$ aus und bestimmen Sie so den Grenzwert der Reihe*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}.$$

Aufgabe 6. Nicht auf den Kopf gefallen *[3 + 3 + 4 Punkte]*

Eine gezinkte Münze zeigt mit 80% Wahrscheinlichkeit Kopf. Die Münze wird 400 mal geworfen.

a) *Wie groß sind Erwartungswert $E(X)$, Varianz $V(X)$ und Streuung $\sigma(X)$ der Anzahl X der Würfe welche Kopf zeigen?*

Wir approximieren im Folgenden durch eine geeignete Normalverteilung. (Eine Tabelle für die Standard-Normalverteilung finden Sie unten.)

b) *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens* 312 *und höchstens* 324 *mal Kopf fällt (gerundet auf ein ganzes Prozent) ?*

c) *Sie wetten darauf, dass die Münze mindestens k mal Kopf zeigt und wollen ihre Wette mit mindestens* 99.8% *Wahrscheinlichkeit gewinnen. Was ist der maximale Wert für k, den Sie wählen können?*

Tabelle für das Integral $\int_0^x \phi_{0,1}(t)dt$ über die Standardnormalverteilung $\phi_{0,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$:

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

2011 B HM 3 Klausur

E1

1

a) ~~0,001 · 0,98 + 0,005 = 0,05498 → 5,498 % jeden Tag~~

A : Alarm B : brennt

$P(B) = 0{,}001$

$P(A|B) = 0{,}98$

$P(A|\bar{B}) = 0{,}005$

$a) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

$= 0{,}98 \cdot 0.001 + 0{,}005 \cdot 0{,}999$

$= 0.005975 \rightarrow 0{,}5975\%$ Wahrscheinlichkeit

Ich hätt so 75% gesagt...

$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}98 \cdot 0{,}001}{0{,}005975} \approx 16{,}4\%$

b) $P(T \geq t) = 1 - e^{\lambda t}$

$P(T \geq T_{1/2}) = 1 - e^{\lambda t} \stackrel{!}{=} 0{,}5$

$e^{\lambda t} = 0{,}5$

$\lambda t = \ln(0{,}5)$

$\lambda = \ln(0{,}5) : t^{\leftarrow 15}$

$P(T = 30) = 1 - e^{\frac{\ln(0{,}5)}{15} \cdot 30} = 1 - e^{2\ln(0{,}5)} = 1 - \frac{1}{4} = 0{,}75$

c) $y_0' (3x^2 - y) = -2xy$

$y' 3x^2 - y_0 y + 2xy = 0$

Zugehöriges Vektorfeld: $\begin{pmatrix} 2xy \\ 3x^2 - y \end{pmatrix}$

$\operatorname{rot}(v) = 6x - 2x = 4x$

→ Integrierender Faktor

$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\operatorname{rot}(v)}{3x^2 - y} = -\frac{4x}{3x^2 - y}$

$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{\operatorname{rot}(v)}{2xy} = \frac{4x}{2xy} = \frac{2}{y}$ ✓

$\ln|\lambda(y)| = +2 \ln|y| + c \rightarrow \lambda(y) = c y^{-2}$
$\quad c = 1$

d) $y' = \dfrac{3x^2 - 2y^2}{2xy}$ $\qquad y(1) = \cancel{2}\,1$

Substitution: $z = \dfrac{y}{x} \to y = z \cdot x \qquad y' = xz' + z$

$$xz' + z = \frac{3x^2 - 2(zx)^2}{2x(zx)}$$

$$= \frac{x^2(3 - 2z^2)}{2x^2 z} = \frac{3 - 2z^2}{2z}$$

$$xz' = \frac{3}{2z} - 3z = \frac{1}{2z}(3 - 2z^2)$$

ϟ ??

(2) $y\,\partial_x u - (x + 2y)\,\partial_y u + \partial_z u = 0$

a)
$$\left[\begin{array}{l} I \subseteq \mathbb{R} \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \quad s \to (x(s), y(s)) \\ U(s) = u(x(s), y(s)) \\ U'(s) = x'\,\partial_x u + y'\,\partial_y u \end{array}\right]$$

2-D aus Skript

~~Koeffizientenvergleich~~

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -x - 2y$$
$$\dot{z} = 1$$

Allgemeine Lösung

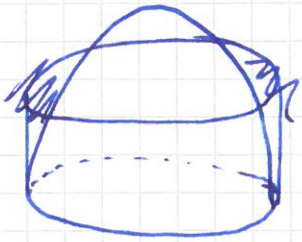
$x(t) = \dots = \frac{1}{2} y^2 + C_1$

$y(t) = \dots =$

2017 B HM3 Klausur $\quad$ C1

(3) $\quad F(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 1-r^2 \end{pmatrix} \qquad r\in[0,1] \quad \varphi\in[0,2\pi]$

a)



Rand ist Einheitskreis bei $z=0$

b) $\quad N_F = \frac{\partial F}{\partial r} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2r^2\cos(\varphi) \\ 2r^2\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2r^2\cos(\varphi) \\ 2r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \quad \text{zeigt nach außen}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{\cos} & \cancel{-r\sin} \\ \sin & r\cos \\ -2r & 0 \\ \cos & -r\sin \\ \sin & r\cos \\ \cancel{-2r} & \cancel{0} \end{array}$$

c) $\quad Y := \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 4(x^2+y^2) \end{pmatrix}$

$$\int_F Y\cdot dF = \int_D Y(F(r,\varphi))\cdot N_F \, d(r,\varphi)$$

$$= \int_D \begin{pmatrix} 1-r^2 \\ 0 \\ \underbrace{4(r^2\cos(\varphi)^2 + r^2\sin(\varphi)^2)}_{4r^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r^2\cos(\varphi) \\ 2r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} d(r,\varphi)$$

$$= \int_D (1-r^2)(2r^2\cos(\varphi)) + 4r^3 \, d(r,\varphi)$$

$$= \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 2r^2\cos(\varphi) - 2r^4\cos(\varphi) + 4r^3 \, d\varphi\, dr$$

$$= \int_{r=0}^{1} \left[2r^2\sin(\varphi) - 2r^4\sin(\varphi) + 4\varphi r^3\right]_{\varphi=0}^{2\pi} dr$$

$$= \int_{r=0}^{1} (8\pi r^3)\, dr$$

$$= \left[2\pi r^4\right]_0^1 = 2\pi$$

d) $X = \begin{pmatrix} -yx^2 \\ xy^2 \\ \frac{1}{4}zy \end{pmatrix}$ $\qquad \gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ (Rand von F) $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\Gamma} X \cdot d\Gamma = \int_{t=0}^{2\pi} X(\gamma(\varphi)) \cdot \gamma'(\varphi)\, d\varphi$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\varphi)^2 \\ \cos(\varphi)\sin(\varphi)^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \left(+\sin(\varphi)^2\cos(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2\sin(\varphi)^2\right) d\varphi$$

$$= 2\int_{t=0}^{2\pi} \sin(\varphi)^2\cos(\varphi)^2\, d\varphi$$

$$= 2\int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{4}\left[\frac{1}{8}(4\varphi - \sin(4\varphi))\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} 2\pi$$

e) $\operatorname{rot}(X) = \left(\frac{1}{4}z - 0,\ 0 - 0,\ y^2 + x^2\right)^T$

$$= \frac{1}{4} Y$$

Satz von Stokes: $\int_F Y \cdot dF = 4 \cdot \int_\Gamma X \cdot d\Gamma$

4) $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$ $\qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -2$

mit Laplace:

$y''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s + 2$

$y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s) - 1$

$y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) = Y(s)$

$e^{2t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s-2} = \frac{1}{s-2}$

$s^2 Y(s) - s + 2 - 3(s\,Y(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{1}{s-2}$

$Y(s)(s^2 - 3s + 2) - s + 2 + 3 = \frac{1}{s-2}$

$Y(s) = \dfrac{\frac{1}{s-2} + s - 5}{s^2 - 3s + 2}$

Lösen mit Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1+(s-5)(s-2)}{(s-2)(s^2-3s+2)} = \frac{1+s^2-2s-5s+10}{s^3-3s^2+2s-2s^2+6s-4}$$

$$= \frac{s^2-7s+11}{s^3-5s^2+8s-4} \qquad s^2-3s+2=0 \qquad s_1=1,\ s_2=2$$

$$= \frac{s^2-7s+11}{(s-2)^2(s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s-1}$$

$$s^2-7s+11 = A(s-2)(s-1) + B(s-1) + C(s-2)^2$$
$$= A(s^2-3s+2) + Bs - B + Cs^2 - 4Cs + 4C$$
$$= s^2(A+C) + s(-3A+B-4C) + 2A-B+4C$$

$A+C=1$; $-3A+B-4C=-7$; $2A-B+4C=11$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} I+3Z_1 \\ I-2Z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right) \quad I+Z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} B-5=-4 \\ C=5 \end{array} \quad \begin{array}{l} A=-4 \\ B=1 \end{array}$$

$$Y(s) = -\frac{4}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{5}{s-1}$$

Rücktransformation liefert

$$y(t) = -4e^{2t} + te^{2t} + 5e^t$$

Probe:

$$y'(t) = -8e^{2t} + 2te^{2t} + e^{2t} + 5e^t = e^{2t}(-8+2t+1) + 5e^t$$

$$y''(t) = -16e^{2t} + 4te^{2t} + 2e^{2t} + 2e^{2t} + 5e^t = e^{2t}(-16+4t+2+2) + 5e^t$$

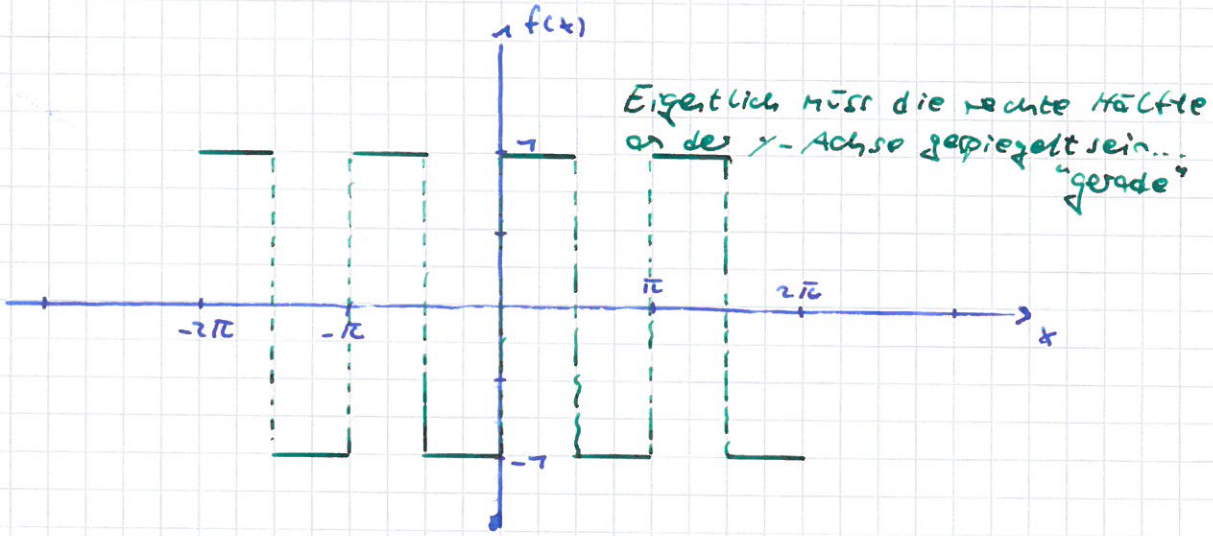
$$e^{2t}(-12+4t) + 5e^t - 3(e^{2t}(-7+2t) + 5e^t) + 2(e^{2t}(-3+t) + 5e^t) \overset{!}{=} e^{2t}$$

$$= e^{2t}(-12+4t+21-6t+2t-6) + 0$$

$$= e^{2t} \quad ✓$$

⑤ $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$

a)



b)

$$f(t) \sim \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \underbrace{b_n \sin(n\omega t)}_{=0}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \cos(n\omega t) f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos(nt) f(t) dt \right) \cdot 2$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(nt) dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(nt) dt \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} \sin(nt) \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{1}{n} \sin(nt) \right]_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi n} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \left(\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{4}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{für } n = 2l+1 \text{ für } l = 0, 2, \dots \\ -1 & \text{für } n = 2l+1 \text{ für } l = 1, 3, \dots \end{cases}$$

$$f(t) \sim \frac{\pi}{2} \cos(t) - \frac{4}{3\pi} \cos(3t) + \frac{4}{5\pi} \cos(5t) - \dots$$

$$\frac{1+(s-5)(s-2)}{(s-2)(s^2-3s+2)} = \frac{1+s^2-2s-5s+10}{s^3-3s^2+2s-2s^2+6s-4}$$

$$= \frac{s^2-7s+11}{s^3-5s^2+8s-4} \qquad s^2-3s+2=0 \qquad s_1=1,\ s_2=2$$

$$= \frac{s^2-7s+11}{(s-2)^2(s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s-1}$$

$$s^2-7s+11 = A(s-2)(s-1) + B(s-1) + C(s-2)^2$$

$$= A(s^2-3s+2) + Bs - B + Cs^2 - 4Cs + 4C$$

$$= s^2(A+C) + s(-3A+B-4C) + 2A-B+4C$$

$$A+C=1 \ ; \ -3A+B-4C=-7 \ ; \ 2A-B+4C=11$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} I+3\,Z_1 \\ I-2\,Z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right) \quad I+Z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} B-5=-4 \\ C=5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=-4 \\ B=1 \end{array}$$

$$Y(s) = -\frac{4}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{5}{s-1}$$

Rücktransformation liefert

$$y(t) = -4e^{2t} + te^{2t} + 5e^{t}$$

Probe:

$$y'(t) = -8e^{2t} + 2te^{2t} + e^{2t} + 5e^{t} = e^{2t}(-8+2t+1)+5e^{t}$$

$$y''(t) = -16e^{2t} + 4te^{2t} + 2e^{2t} + 2e^{2t} + 5e^{t} = e^{2t}(-16+4t+2+2)+5e^{t}$$

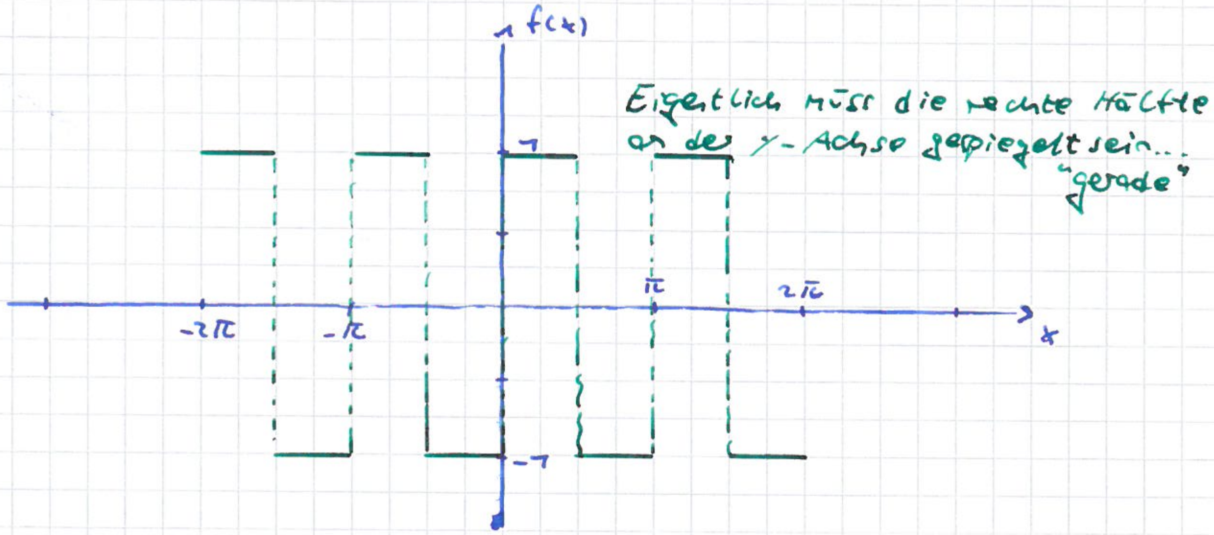
$$e^{2t}(-12+4t)+5e^{t} - 3(e^{2t}(-7+2t)+5e^{t}) + 2(e^{2t}(-3+t)+5e^{t}) \overset{!}{=} e^{2t}$$

$$= e^{2t}(-12+4t+21-6t+2t-6) + 0$$

$$= e^{2t} \quad \checkmark$$

⑤ $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$

a)



b)

$$f(t) \sim \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \underbrace{\cancel{\sin(k\omega t)}}_{=0}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \cos(k\omega t) f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\, f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos(kt)\, f(t)\, dt \right) \cdot 2$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \cos(kt)\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(kt)\,dt \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{k} \sin(kt) \right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{1}{k} \sin(kt) \right]_{\pi/2}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi k} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \left(\underbrace{\cancel{\sin(k\pi)}}_{\to 0} - \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right)$$

$$= \frac{4}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ 1 & \text{für } k = 2l+1 \quad \text{für } l = 0, 2, \ldots \\ -1 & \text{für } k = 2l+1 \quad \text{für } l = 1, 3, \ldots \end{cases}$$

$$f(t) \sim \frac{\pi}{2} \cos(t) - \frac{4}{3\pi} \cos(3t) + \frac{4}{5\pi} \cos(5t) - \ldots$$

c) $x_0 = 0$; $\cos(0) = 1$

$$f(x_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3\pi} + \frac{4}{5\pi} - \frac{4}{7\pi} + \frac{4}{9\pi} - \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad = 1 \quad (?)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{l}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \overset{!}{=} \frac{4}{\pi} \sum_{l}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} \overset{!}{=} 1$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1} = \frac{\pi}{4}$$

6) $n = 400$ $p = 0{,}8$ $q = 1 - p = 0{,}2$

a) $E(X) = 400 \cdot 0{,}8 = \frac{4}{5} \cdot 400 = \frac{1600}{5} \approx 320$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ ~~$= \dots 0{,}8 - 320^2$~~

$= n \cdot q \cdot p = 64$? ~~$\frac{640000}{5} - 102400$~~

$= (n \cdot q)^2 = 64$! ~~$= (640000 - 512000)/5$~~

~~$= \frac{128000}{5} =$~~

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 8$

b) $P(312 \leq X \leq 324) =$ ~~$\int_{312}^{324} \Phi_{0,1}(t)\,dt$~~

$N_{320,8}$ ~~$= \int_0^{324} \Phi_{0,1}(t)\,dt - \int_0^{312} \Phi_{0,1}(t)\,dt$~~

Zentrieren und normieren: $\frac{324 - 320}{8} = 0{,}5$

$\frac{312 - 320}{8} = -1$

$$P(312 \leq X \leq 324) = \int_0^{1} \phi_{0,1}(t)\,dt + \int_0^{0,5} \phi_{0,1}(t)\,dt$$

$$= 0{,}34134 + 0{,}19146$$

$$\approx 53\%$$

c) $P(X \geq k) \overset{!}{=} 0{,}998 =$ ~~$0{,}499$~~ $0{,}5 + 0{,}498$

$= \int_{-\infty}^{-2,88} = -0{,}998 + 1 = 0{,}002$

~~$\frac{k}{8} = 2{,}88$~~

$\frac{k - 320}{8} = -2{,}88 \longrightarrow k = -2{,}88 \cdot 8 + 320$ ~~$343{,}2$~~ $\approx 296{,}8$

Universität Stuttgart
Fachbereich Mathematik

Prof Dr F. Witt

HM 3 aer/mawi
Modulprüfung
01.03.2017

Name:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Σ	Note
Punkte:								

Hinweis:

- Auf dieser Klausur sind maximal 66 Punkte zu erreichen.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich fünf eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausureinsicht ist voraussichtlich in der ersten Vorlesungswoche. Den genauen Termin finden Sie zeitnah auf der ILIAS Seite zur Vorlesung.
- Die Klausurergebnisse werden über das LSF bekannt gegeben.

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 4 + 2 Punkte).

Lösen Sie die folgenden kurzen Aufgaben.

a) *Parametriseren Sie den Ellipsoiden*

$$K = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1\}.$$

Ersetzen Sie hierfür die Platzhalter ? und $*$ sinnvoll.

$$\Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x(\varphi, \theta) \\ y(\varphi, \theta) \\ z(\varphi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ ?\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ * \end{pmatrix}.$$

b) *Lösen Sie für $u(x, y) = y^2 + \cos(x)$ das Anfangswertproblem $y(0) = 1$ mit*

$$\frac{\partial u}{\partial y} y^{\cancel{0}} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

c) *Sie werfen einunddreißig mal mit einer fairen Münze. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens fünfzehn mal Kopf?*

d) *Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:*

$$y^{0} = \frac{e^{-y}}{2} \cos(x), \quad y(0) = 1.$$

e) *Bestimmen Sie das Gleichungssystem der Charakteristiken $(x(t), y(t))$ der partiellen Differentialgleichung*

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + e^x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Aufgabe 2 (10 Punkte).

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y^{00} - y^{0} - 2y = 2x + e^{2x}.$$

Aufgabe 3 (9 Punkte).

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y^{0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung

$$v = y(0) = (1, 0, 0)^T$$

.

Aufgabe ~~4~~ (11 Punkte).

Es ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1 + \sin(x), & x \in [0, \pi) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

gegeben.

~~a)~~ *Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.*

~~b)~~ *Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f.*

~~c)~~ *Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.*

Aufgabe 5. *Wir betrachten den Körper*

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 8 - z^3, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Der Rand ∂K besteht aus dem Boden

$$B := \{(x, y, z) \in K | z = 0\}$$

und dem Mantel

$$M := \{(x, y, z) \in K | x^2 + y^2 = 8 - z^3\} \quad \text{Kegel}$$

Weiter sei f das Vektorfeld

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} -xz \\ yz \\ x^2 + y \end{pmatrix}. \qquad \cancel{\mathrm{div}(f) = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix}} = 0$$

~~a)~~ *Skizieren Sie den Körper K und seine Randkomponenten B und M.*

~~b)~~ *Parametrisieren Sie den Mantel M mit Hilfe von Zylinderkoordinaten.*

c) *Berechnen Sie den Fluss von f durch den Boden B nach Außen.*

~~d)~~ *Berechnen Sie die Divergenz von f.*

e) *Schließen Sie ohne erneute Rechnung auf den Fluss von f durch den Mantel M nach Außen.*

Aufgabe 6 (12 Punkte).

Auf einer Oberfläche befindet sich eine große Bakterienpopulation. Die einzelnen Bakterien sind zufällig und unabhängig von einander auf der Fläche verteilt. Wir gehen davon aus, dass die Anzahl der Bakterien, die Sie mit dem Mikroskop auf einem genügend kleinen Flächenausschnitt beobachten, poissonverteilt ist. Im Durchschnitt sehen Sie auf einer Fläche von einem Quadratmillimeter zwei Bakterien.

a) *Bestimmen Sie die Parameter μ_1 und μ_2 der Poissonverteilungen der Anzahlen von Bakterien, die Sie auf Flächenausschnitten der Größen $1\,mm^2$ und $2\,mm^2$ beobachten.*

b) *Mit welcher Wahrscheinlichkeit beobachten Sie auf einem Ausschnitt von zwei Quadratmillimetern mindesten zwei Bakterien? Runden Sie auf eine ganze Prozentzahl.*

? c) *Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt die Fläche, die Sie absuchen müssen, um die erste Bakterie zu finden? Wieviel Fläche müssen Sie im Mittel absuchen, um auf die erste Bakterie zu stoßen?*

Sie entdecken auf der selben Oberfläche zusätzlich eine neue Sorte von Bakterien, deren Anzahl ebenfalls poissonverteilt sei und die unabhängig von der ersten Sorte vorkommt. Im Durchschnitt sehen Sie auf einem Ausschnitt von einem Quadratmillimeter drei Bakterien der neuen Sorte.

d) *Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt die Gesamtzahl der Bakterien, die Sie auf einem Ausschnitt von einem Quadratmillimeter vorfinden? Mit welcher Wahrscheinlichkeit sehen Sie dort höchstens zwei Bakterien? Runden Sie auf eine ganze Prozentzahl.*

$k \backslash \mu$	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
0	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041	0.0025
1	0.2707	0.2052	0.1494	0.1057	0.0733	0.0500	0.0337	0.0225	0.0149
2	0.2707	0.2565	0.2240	0.1850	0.1465	0.1125	0.0842	0.0618	0.0446
3	0.1804	0.2138	0.2240	0.2158	0.1954	0.1687	0.1404	0.1133	0.0892
4	0.0902	0.1336	0.1680	0.1888	0.1954	0.1898	0.1755	0.1558	0.1339
5	0.0361	0.0668	0.1008	0.1322	0.1563	0.1708	0.1755	0.1714	0.1606
6	0.0120	0.0278	0.0504	0.0771	0.1042	0.1281	0.1462	0.1571	0.1606
7	0.0034	0.0099	0.0216	0.0385	0.0595	0.0824	0.1044	0.1234	0.1377
8	0.0009	0.0031	0.0081	0.0169	0.0298	0.0463	0.0653	0.0849	0.1033
9	0.0002	0.0009	0.0027	0.0066	0.0132	0.0232	0.0363	0.0519	0.0688

Tabelle 0.1: Werte der Poisson-Dichtefunktion $p_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}$

2017 1 HM3 klausur

1

a) $k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+4y^2+9z^2 = 1\}$

$x^2 + (2y)^2 + (3z)^2 = 1^2$

Parametrisierung Einheitskugel: $\begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$z = \frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{3}\sin\theta$

b) $u(x,y) = y^2 + \cos(x)$ $\quad y(0) = 1$

$\frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad u = c$

$y(x) = \pm\sqrt{c - \cos(x)}$

$y(0) = 1 \longrightarrow c = 2$

$y(x) = \sqrt{2 - \cos(x)}$ auf $\mathbb{R}$ definiert

c) Gegenwahrscheinlichkeit: mindestens 16 mal ~~...~~ Kopf, also

höchstens 15 mal Zahl $\longrightarrow P(x) = \frac{1}{2}$

d) $y' = \frac{e^{-y}}{2} \cos(x) \quad y(0) = 1$

~~...~~ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y}}{2}\cos(x)$

~~...~~ $\quad e^{+y} dy = \frac{1}{2}\cos(x)\, dx$

$\int_{y_0}^{y} e^{+y} dy = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2}\cos(x)\, dx$

$+e^{+y} - e^{+1} = \frac{1}{2}\sin(x)$

$y(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\sin(x) + e\right)$

e) $\dot{x} = y(t)$

$y' = e^{x(t)}$

2 $\quad y'' - y' - 2y = 2x + ~~\ldots~~ e^{2x}$

Homogene Gleichung: $x^2 - x - 2 = 0 = (x-2)(x+1)$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} = u(x)$

Partikuläre Lösung Ansatz: Greensche Formel

$u(0) = 0$ $\quad u'(0) = 1 \longrightarrow c_1 = \frac{1}{3} \quad c_2 = -\frac{1}{3}$

$c_1 + c_2 = 0$ $\quad 2c_1 - c_2 = 1$

$y(x) = \int_{t=0}^{x} u(x)(x-t)(2t + e^{2t})\, dt$

$$y_p(x) = \int_0^x \left(\frac13 e^{2(x-t)} - \frac13 e^{-(x-t)}\right)(2t)\,dt \quad +$$

$$+ \int_0^x \left(\frac13 e^{2(x-t)} - \frac13 e^{-(x-t)}\right)(e^{2t})\,dt$$

$$= \frac13 \left[\left(\frac12 e^{2(x-t)} - e^{-(x-t)}\right)(2t) + \left(e^{2(x-t)} - e^{-(x-t)}\right)\cdot 2\right]_0^x +$$

$$+ \frac13 \left[\left(\frac12 e^{2(x-t)} - e^{-(x-t)}\right)(e^{2t}) + \left(e^{2(x-t)} - e^{(-x+t)}\right)\cdot 2e^{2t}\right]_0^x$$

$$= \frac13\Big(\left(\frac12 - 1\right)(2x) + \cancel{(1-1)\cdot 2)} - \cancel{\left(\frac12 e^{2x} - e^{-x}\right)\cdot 0} + \left(e^{2x}-e^{-x}\right)\cdot 2\Big) +$$

$$+ \left(\frac12 - 1\right)(e^{2x}) + \cancel{(1-1)\cdot 2e^{2x})} - \left(\frac12 e^{2x} - e^{-x}\right)\cdot 1 + \left(e^{2x}-e^{-x}\right)\cdot 2\Big)$$

$$= \frac13\left(-x + 2(e^{2x}-e^{-x}) - \frac12 e^{2x} - \frac12 e^{2x} - e^{-x} + 2(e^{2x}-e^{-x})\right)$$

$$= \frac13\left(-x + 3e^{2x} - 5e^{-x}\right) \quad ↯$$

$$y(x) = \int_0^x u(x-t)\, b(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac13 e^{2(x-t)} - \frac13 e^{-(x-t)}\right)(2t + e^{2t})\,dt$$

$$= \frac13 \int_0^x \left(e^{2x}\cdot e^{-2t} - e^{-x}\cdot e^{t}\right)(2t + e^{2t})\,dt$$

$$= \frac13 \int_0^x \left(e^{2x} e^{-2t} - e^{-x} e^{t}\right)\cdot 2t\,dt + \frac13 \int_0^x \underbrace{\left(e^{2x} e^{-2t} - e^{-x} e^{t}\right) e^{2t}}_{e^{2x} - e^{-x}e^{3t}}\,dt$$

$$= \frac23 \int e^{2x} e^{-2t}\, t\,dt - \frac23 \int e^{-x} e^{t}\, t\,dt + \frac13 e^{2x}\int dt - \frac13 e^{-x}\int e^{3t}\,dt$$

$$= \frac23 e^{2x}\left[-\frac14(2t+1)e^{-2t}\right]_0^x - \frac23 e^{-x}\left[te^{t} - e^{t}\right]_0^x \quad +$$

$$+ \cancel{\frac13 e^{2x}[1]_0^x} - \frac13 e^{-x}\left[\frac13 e^{3t}\right]_0^x$$

$$= \left(-\frac12 x - \frac12\right)e^{-2x}\cancel{e^{2x}}\cdot \overset{-\frac14\cdot\frac23}{\frac23} - \frac23 e^{-x}\left(xe^{x} - e^{x}\right) + \frac23 e^{-x}(-1) - \frac13 e^{-x}\left(\frac13 e^{3x} - \frac13\right)$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - x + \frac12 + \frac13 x e^{2x}$$

$$= \left(-\frac12 x - \frac12\right)\cdot\frac23 - \frac14\cdot\frac23 - \frac23 x + \frac23 - \frac13 e^{-x} - \frac19 e^{2x} + \frac19 e^{-x}$$

$$= \frac26 x - \frac23 x - \frac26 - \frac{1}{12} + \frac23 + \left(-\frac39 + \frac19\right)e^{-x} - \frac19 e^{2x}$$

$$= -\frac13 x - \frac12 + \frac13 e^{-x} - \frac13 e^{2x}$$

$$= \frac13\left(-x - \frac16 + e^{-x} - e^{2x}\right) \quad ↯$$

2011-1 HM3 Klausur 21

2) $y'' - y' - 2y = 2x + e^{2x}$

homogene Lösung

$x^2 - x - 2 = 0$

$\frac{+1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{2} = -1 \; ; = +2$

$(x+1)(x-2) = 0$

$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{+2x}$

Partikulär 1: e^{2x} 2: $2x$

$y_{p1}(x) = \frac{1}{2x-1} \cdot e^{2x} \cdot x$

$= \frac{1}{3} x e^{2x}$

$y_{p2}(x) = (ax+b)x^0 e^{0x} = ax+b$

$y'_{p2}(x) = a$

$y''_{p2}(x) = 0$

$-a - (2ax+2b) \overset{!}{=} 2x$

$a = -1 \qquad b = \frac{1}{2}$

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3} x e^{2x} + (-x + \frac{1}{2})$

3) $y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 6 & 5 \\ 3 & 3 \end{matrix} \qquad v = y(0) = (1,0,0)^T$

homogene Gleichung, weil $b(t) = 0$

Eigenwerte: $(-1-\lambda)(5-\lambda)(-4-\lambda) - (-1-\lambda)(-6)\cdot(3) = 0$

$(-1-\lambda)\left((5-\lambda)(-4-\lambda) + 18\right) = 0$

Nebenrechnung: $-20 - 5\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 18 = 0$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$

$(-1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -1 \quad \lambda_3 = 2$

Eigenvektoren

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & -6 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -6 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem $y_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{y_2(t)}$; $\underbrace{e^{2t}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}_{y_3(t)}$

$$Y(t) = c_1\begin{pmatrix}e^{-t}\\0\\e^{-t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\e^{-t}\\e^{-t}\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\2e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&2&0\\1&1&1&0\end{array}\right) \quad |-Z_1 \quad |-Z_2$$

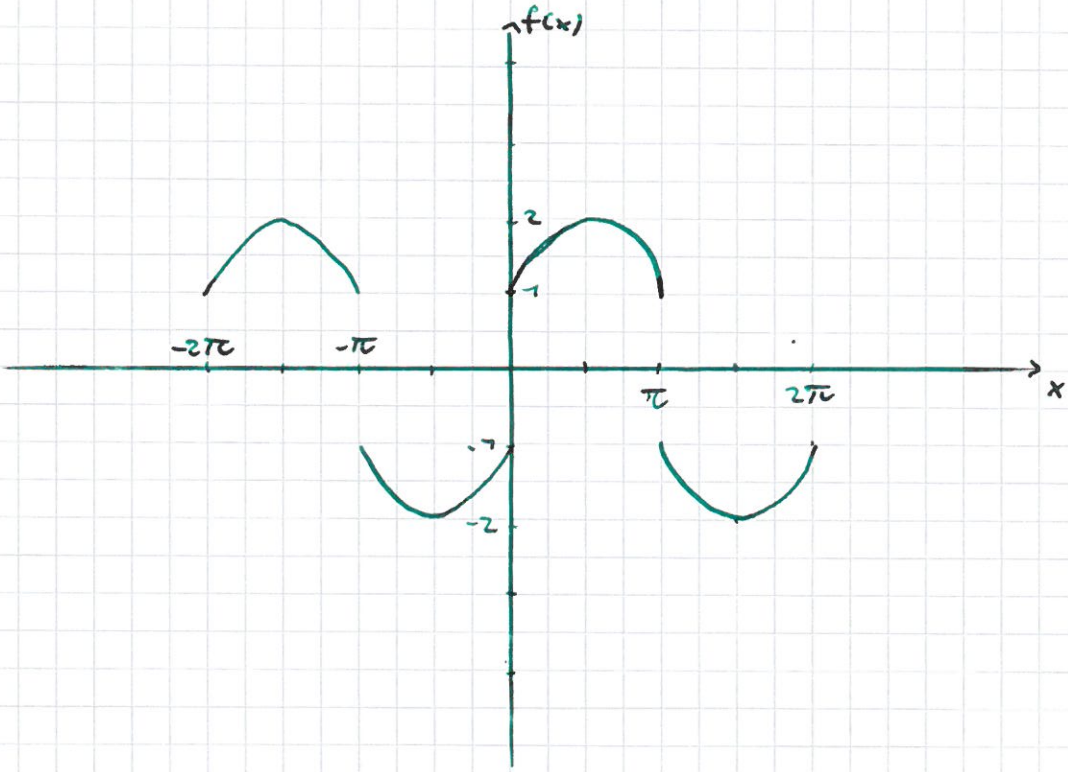
$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&2&0\\0&0&-1&-1\end{array}\right) \quad \begin{array}{l}|-Z_3\cdot 2\\ |\cdot(-1)\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{array}\right) \quad \rightarrow c = (1,-2,1)^T$$

$$y(t) = \begin{pmatrix}e^{-t}\\-2e^{-t}+2e^{2t}\\e^{-t}-2e^{-t}+e^{2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-t}\\2(-e^{-t}+e^{2t})\\-e^{-t}+e^{2t}\end{pmatrix}$$

④ $f(x) = \begin{cases}\sin(x)-1, & x\in[-\pi,0)\\ 1+\sin(x), & x\in[0,\pi)\end{cases}$ und $f(x+2\pi) = f(x)$

a)



$$a_n = \frac{2}{3\pi}\int_0^{3\pi} \cos(nt)\,(1+\sin(t))\,dt + \int \dots = 0 \quad \text{weil ungerade}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,(1+\sin(t))\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin(nt)\,(\sin(t)-1)\,dt$$

$$f(x) = \underbrace{\sin(x)}_{\text{einfache Fourier-Reihe}} + g(x) \quad ; \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-\pi, 0) \\ +1 & \text{für } x \in [0, \pi) \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)\,g(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{0}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(+\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) \quad \text{für } n \text{ ungerade}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) \quad \text{für } n \text{ gerade}$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)t)$$

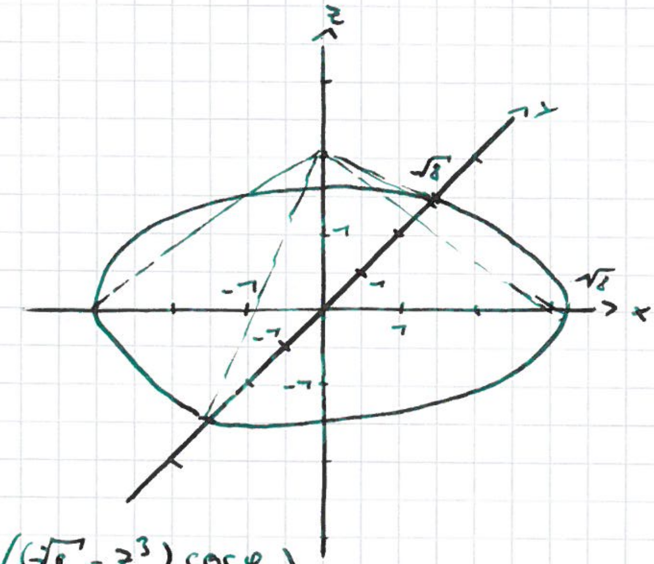
c) f stetig in $\{x \in \mathbb{R} \mid -n\pi < x < n\pi\}$ und differenzierbar mit endlichen ~~Rand~~ links- Rechtsseitigen Grenzwerten.

→ $f(t)$ konvergiert innerhalb der Intervalle gegen $f(t)$

→ an den Grenzen macht $f(t)$ einen Sprung von zwei → Grenzwert an diesen Stellen $x \in \pi n$ $= 0$

⑤ $K := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 8 - z^3,\ 0\le z\le 2\}$

a)



Kegel mit Spitze bei $z=2$

b) $g(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix}(\sqrt{8}-z^3)\cos\varphi\\(\sqrt{8}-z^3)\sin\varphi\\ z\end{pmatrix}$ $0\le\varphi\le 2\pi$; $0\le z\le 2$ ↯ nicht linear

$= \begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ \sqrt[3]{8-r^2}\end{pmatrix}$ $0\le\varphi\le 2\pi$; $0\le r\le\sqrt{8}$

c) $z=0$ $\qquad (8-r^3)^{\frac{1}{3}}$

$\cancel{\int_B \ldots \int_{S\in T} \begin{pmatrix}\sqrt{8}\cos\varphi\\ \sqrt{8}\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} \times}$

$\int_B f\cdot d\Phi := \int_{(x,y)\in B} f(g(r,\varphi))\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial r}\times\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right) d(r,\varphi)$

$$\begin{array}{cc} r & -r\sin\varphi \\ r & r\cos\varphi \\ -\frac{2r}{3}(r^2-8)^{-\frac{2}{3}} & 0 \\ r & -r\sin\varphi \\ r & r\cos\varphi \end{array}$$

$\cancel{= \int_{(r,\varphi)\in B} \begin{pmatrix} -r\cos\varphi\sqrt[3]{8-r^2}\\ r\sin\varphi\sqrt[3]{8-r^2}\\ (r\cos\varphi)^2 + r\sin\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} r\cos\varphi\cdot\frac{2r}{3}(r^2-8)^{-\frac{2}{3}}\\ r\sin\varphi\cdot\frac{2r}{3}(r^2-8)^{-\frac{2}{3}}\\ r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\end{pmatrix}}$

Normalenvektor von g: $\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ -\frac{2r}{3}(r^2-8)^{-2/3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2r}{3}(r^2-8)^{-2/3}\cdot r\cos\varphi\\ +\frac{2r}{3}(r^2-8)^{-2/3}\, r\sin\varphi\\ \cos\varphi^2\cdot r+\sin\varphi^2\cdot r\end{pmatrix}$

$\cancel{\int_A \ldots \overset{Gauß}{=} \int_V \ldots}$

$\int_{(r,\varphi)\in B} -r\cos\varphi\sqrt[3]{8-r^2}\cdot\left(-\frac{2r}{3}(r^2-8)^{-2/3}\cdot r\cos\varphi\right) + r\sin\varphi\sqrt[3]{8-r^2}\left(\frac{2r}{3}(r^2-8)^{-2/3}\, r\sin\varphi\right) +$

$+ \left((r\cos\varphi)^2 + r\sin\varphi\right)\left(\cos\varphi^2\cdot r + \sin\varphi^2\cdot r\right)\, dr\, d\varphi$

$= \int$ ~~~ – ~~~

d) Siehe Blatt

e) – ~~~ ~~~

(6)

a) $\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 4$

b) $P(X \leq 1) = 1{,}83 + 7{,}33\,\% = 9{,}16\,\%$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 90{,}84\,\%$

c) Exponentialverteilt ... Warum?

Im Mittel $\frac{1}{2}$ km²

d) Poissonsverteilung ... Warum?

$0{,}224 + 0{,}1494 + 0{,}0498 =$

0,224
0,1494
0,0498
0,4232 $\rightarrow P(X \leq 2) = 42{,}32\,\%$

ϟ $\mu = 5$, nicht $\mu = 3$

②

a) Ja, denn das Gebiet U ist einfach zusammenhängend und das Vektorfeld rotationsfrei.

b) Nein, denn die Koeffizienten sind nicht Quadratsummierbar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

c) Ja. Beispiel
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

d) Das Residuum der holomorphen Fkt $f(z) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \underline{\frac{1}{3!z}} + \frac{1}{4!z^2}$

Polstelle bei $z = 0$

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{6}$$

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = \frac{1}{3}\pi i \quad \text{für } 0 \in \mathring{R}$$
$$= 0 \quad \text{für } 0 \in \mathbb{C} \setminus R$$

e) Ja, z.B. $y(x) = x^3$ und $y(x) = 0$

f) Nein, Lösungsintervall im allgemeinen nur Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$, nicht ganz $\mathbb{R}$

③

a) $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$, $P(C) = 0{,}3$

$n = 10\,000$

Binomialverteilung approximiert durch Normalverteilung

$E = 2000$, $\sigma = \sqrt{10000 \cdot 0{,}2 \cdot (1-0{,}2)} = 40$

$$P(x \geq 1950) = \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(t)\, dt$$

$$\alpha = \frac{1}{\sigma}\left(a - \frac{1}{2} - \mu\right) = \left(1950 - \frac{1}{2} - 2000\right) \cdot \frac{1}{40}$$

$$\alpha = -1 - \underbrace{\frac{10}{40}}_{0{,}25} - \underbrace{\frac{0{,}5}{40}}_{0{,}0125} = -1{,}2625$$

$$P(x \geq 1950) = 0{,}5 + \int_0^{1{,}2625} \varphi(t)\, dt$$

$= 0{,}5 + 0{,}39677$

$= 89{,}677\%$

2

b) ~~Matrix~~

$P(A|Be) = 0{,}85 \quad P(B|Be) = 0{,}2 \quad P(C|Be) = 0{,}7$

$$P(Be) = P(Be|A)\cdot P(A) + P(Be|B)\cdot P(B) + P(Be|C)\cdot P(C)$$

$$= 0{,}85 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}3$$

$$= 0{,}17 + 0{,}1 + 0{,}03$$

~~[illegible]~~

$$= 30\%$$

$$P(C|Be) = \frac{P(Be|C)\cdot P(C)}{P(Be)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{0{,}3} = 0{,}7 \to 70\%$$

c) Binomialverteilung angenähert mit Normalverteilung:

Exakte Formel: $t = 0{,}7\% = 0{,}007$

~~$P(2) = \binom{2000}{2} 0{,}7^2 (1-0{,}7)^{1998}$~~

$$P(2) = \binom{2000}{2} 0{,}007^2 \; 0{,}999^{1998}$$

~~Normalverteilung mit $\mu = 2$, $\sigma = \sqrt{2000\cdot 0{,}007\cdot(0{,}999)} = \sqrt{1{,}998}$~~

~~$P(X=2) = \int_0^{\alpha_2} \ldots - \int_0^{\alpha_1} \ldots \approx 7{,}9$~~

~~$\alpha_2 = \frac{1}{\sigma}(\frac{1}{2}) \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sigma}(-\frac{1}{2})$~~

Poissonverteilung, $\lambda = 2 \quad k = 2 \quad n = 2000$

$$P(2) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{4}{2!} e^{-2} = \frac{4\cdot 0{,}135}{2!} = 27\%$$

4

$$y'(t) = A\,y(t) \;; \quad A = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4-\lambda & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0-\lambda & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\cdot v_1 \to \text{EV zu EW } 2$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + 2\cdot v_2$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Av_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\cdot v_4 \qquad {}_BA_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

~~$P_A(\lambda) = \det$~~

$$P_A(\lambda) = -(2-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ 4 & 4-\lambda & -2\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}-\lambda & 0\\ 4 & 4-\lambda\\ 4 & 4\end{matrix}$$

$$= -(2-\lambda)\left((-\lambda)^2(4-\lambda)+16-4(4-\lambda)-8\lambda\right) = 0$$

$$= -(2-\lambda)\left(+4\lambda^2-\lambda^3+\cancel{16}-\cancel{16}+4\lambda-8\lambda\right)$$

$$= -(2-\lambda)\left(-\lambda^3+4\lambda^2-4\lambda\right)$$

$$= -\lambda(2-\lambda)\left(-\lambda^2+4\lambda-4\right)$$

$$\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}$$

$$\lambda_{1,2} = 2$$

$$= -\lambda(2-\lambda)(\lambda-2)^2$$

$$= \lambda(\lambda-2)^3$$

$$Y_4(0) = V_4$$

$$Y_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$Y_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\\1+2t\\0\end{pmatrix}$$

$$Y_3(t) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$Y_4(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

c)

$$u'(t) = Au(t) + 2te^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$u(t) = c(t)\,Y_1(t)$$

$$\rightarrow u'(t) = c(t)\,Y_1'(t) + c'(t)\,Y_1(t)$$

$$= c(t)\,AY_1(t) + c'(t)\,Y_1(t)$$

$$= c(t)\,AY_1(t) + c'(t)\,e^{2t}V_1 \overset{!}{=} A\,c(t)\,Y_1(t) + 2te^{2t}V_1$$

$$\rightarrow c'(t) = 2t$$

$$c(t) = t^2$$

$$u(t) = t^2\,Y_1(t) = t^2e^{2t}V_1$$

5

a) $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$

$P = x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

$x_1 = 2$ (durch probieren)

$(x-2)(x^2+1) = 0$

$(x-2)(x-i)(x+i) = 0$

$y(t) = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) + C_3 e^{2t}$

b) $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$

$y_p(t) = Ce^t$

$y_p'(t) = ce^t \qquad y_p''(t) = ce^t \quad \dots$

$ce^t - 2ce^t + ce^t - 2ce^t = e^t$

$-2ce^t = e^t \qquad c = -\frac{1}{2}$

$y_p(t) = -\frac{1}{2}e^t$

c) $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^{it}$ 1-fache Resonanz (1)

$y_p(t) = Cte^{it}$

c) $y_p(t) = cte^{it}$

$y_p'(t) = ce^{it} + icte^{it}$

$y_p''(t) = ice^{it} + ice^{it} + -cte^{it} = 2ice^{it} - cte^{it}$

$y_p'''(t) = -2ce^{it} - ce^{it} - icte^{it} = -3ce^{it} - icte^{it}$

Einsetzen:

$-3ce^{it} - i\cancel{cte^{it}} - 4ice^{it} + \cancel{2cte^{it}} + ce^{it} + i\cancel{cte^{it}} - \cancel{2cte^{it}} = e^{it}$

$-2ce^{it} - 4ice^{it} = e^{it}$

$-2c - 4ic = 1$

$c(-2-4i) = 1 \quad \to c = \frac{1}{-2-4i} = \frac{-2+4i}{4+16} = \frac{-2+4i}{20} = \frac{-1+2i}{10}$

$y_p(t) = \frac{-1+2i}{10} t e^{it}$

Für $10\cos(t)$

$y(t) = Re\left(\frac{-1+2i}{10} t e^{it}\right) \cdot 10$ Wie rechnet man den Realteil aus?

$= Re((-1+2i)(te^{it}))$

$= Re(-te^{it} + 2ite^{it})$

$= Re(-t(\cos(t) + i\sin(t)) + 2it(\cos(t) + i\sin(t)))$

$= Re(-t(\cos(t) + \cancel{i\sin(t)}) + 2t(\cancel{i\cos(t)} - \sin(t)))$

$= -t\cos(t) - 2t\sin(t)$

d) $y(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + c_3 e^{2t} - t\cos(t) - 2t\sin(t) - 3e^{t}$

6

e) $\partial_x^2 u(x,y) + 10\,\partial_x u(x,y) = \partial_y^2 u(x,y)$

$u(x,y) = v(x)\cdot w(y)$

$\partial_x^2 u(x,y) - \partial_y^2 u(x,y) + 10\,\partial_x u(x,y) = 0$

$v''(x)w(y) - v(x)w''(y) + 10\,v'(x)w(y) = 0$

$v''(x) - v(x)\dfrac{w''(y)}{w(y)} + 10v'(x) = 0$

$\dfrac{w''(y)}{w(y)} = \dfrac{+v''(x) + 10v'(x)}{v(x)}$

$\dfrac{v''(x)+10v'(x)}{v(x)} = \lambda \quad \rightarrow v''(x) + 10v'(x) = \lambda v(x)$

$+w''(y) = \lambda w(y)$

f) $w(y) = \cos(4y) \quad \rightarrow w'(y) = -4\sin(4y)$

$w''(y) = -16\cos(4y)$

$-16\cos(4y) = \lambda\cos(4y) \quad \rightarrow \lambda = -16$

$v''(x) + 10v'(x) = -16\,v(x)$

$x^2 + 10x + 16 = 0$

$(x-2)(x+8) = 0$

$v(x) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}$

$\dfrac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 1\cdot 16}}{2} = \dfrac{-10 \pm 6}{2}$

$x_1 = -2 \quad x_2 = -8$

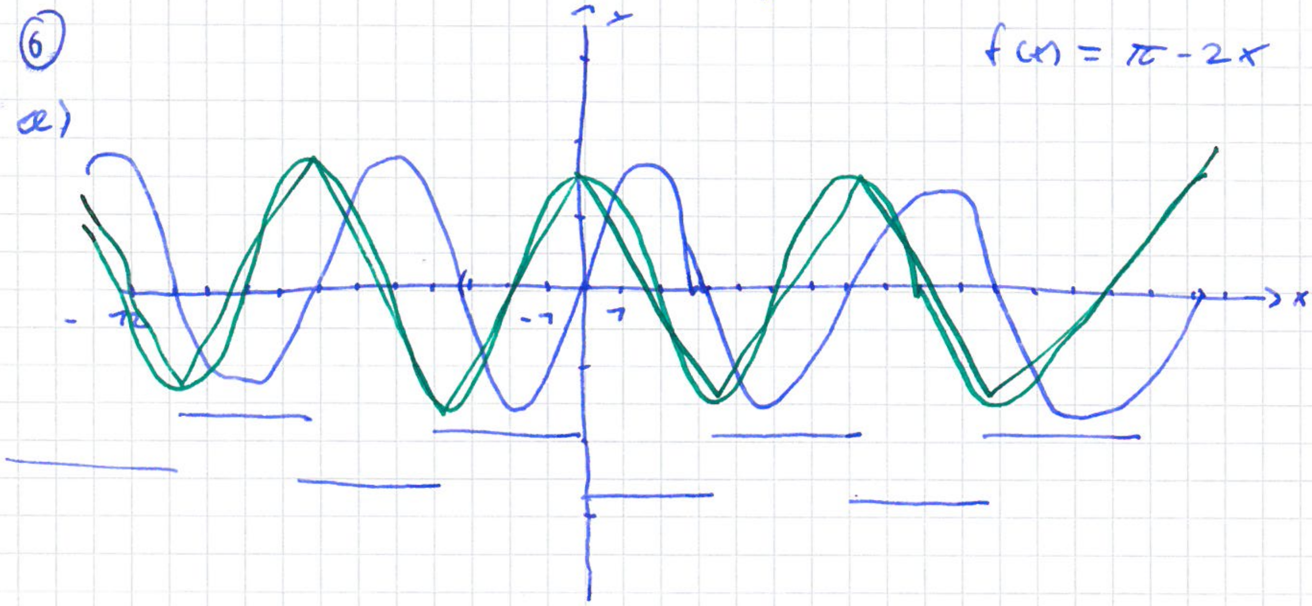
$u(x,y) = \cos(4y)\left(C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}\right)$

$F(x) = x\pi - x^2$

$f(x) = \pi - 2x$

6

a)



b) $g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T \sin(nt) f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\, x(\pi-x)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, x(\pi-x)\, dx$$

$$\cancel{= \frac{1}{\pi}\left[\ldots\right]_{-\pi}^{\pi}}$$

$$\cancel{= \frac{1}{\pi}\left(\ldots\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\pi x}_{g} \underbrace{\sin(nx)}_{f'}\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2}_{g} \underbrace{\sin(nx)}_{f'}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\pi x \cos(nx)\cdot \frac{1}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\pi}{n}\cos(nx)\, dx\right) -$$

$$- \frac{1}{\pi}\left(\left[x^2 \cos(nx)\frac{1}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} - \frac{x}{n}\cos(nx)\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cancel{\left(-\frac{\pi^2}{n}+\frac{\pi^2}{n}\right)\cos(nx)}^{=0}\right) - \left[\frac{\pi}{n^2}\cancel{\sin(nx)}^{=0}\right]_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\left(\cancel{(-\pi^2+\pi^2)}^{=0}\cos(nx)\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n}\left(\left[x\cancel{\sin(nx)}^{=0}\frac{1}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nx)\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n}\left(-\left[-\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}\right)\right)$$

$$= \frac{+1}{2n\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos(\pi n) - \frac{1}{n^2}\cos(-\pi n)\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \quad \lightning$$

$\lightning$

⑦ 8

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le z \le 2, 1 \le x^2+y^2 \le z^6\}$

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =: \phi\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}, \ 1 \le z \le 2, \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ 1 \le \rho \le z^3$

$M = \{(x,y,z) \in K \mid x^2+y^2 = z^6\}$, $\rho = z^3$

$\cancel{N = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}$

$n = \begin{pmatrix} -z^3\sin\varphi \\ z^3\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} +3z^2\cos\varphi \\ +3z^2\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^3\cos\varphi \\ z^3\sin\varphi \\ -z^5 3(\sin\varphi^2+\cos\varphi^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -z^2 \cdot 3 \end{pmatrix} z^3$

Guldinsche Regel für Rotationskörper

$\mathrm{Vol}_3(M) = (\mathrm{Vol}_2(M) \cdot 2\pi \cdot dA) - (\pi \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \cdot 1)$

$\mathrm{Vol}_3(M) = \int_{z=1}^{2} \int_{\rho=1}^{z^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz$

$= \int_1^2 \int_1^{z^3} 2\pi\rho \, d\rho \, dz$

$= \int_1^2 \pi z^6 - \pi \, dz$

$= (\tfrac{1}{7}\pi \cdot 2^7 - 2\pi) - (\tfrac{1}{7} \cdot \pi - \pi \cdot 1)$

$= \tfrac{128}{7}\pi - 2\pi - \tfrac{1}{7}\pi - \pi$

$= \tfrac{106}{7}\pi \ (-\pi \cdot \tfrac{1}{4})$

$\mathrm{Vol}_2(M) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=1}^{2} z^3 \, dz \, d\varphi$

$= \int_0^{2\pi} 4 - \tfrac{1}{4} \, d\varphi = 8\pi - \tfrac{1}{2}\pi$

$= \tfrac{\pi}{27}\left(\sqrt{145}^3 - \sqrt{10}^3\right)$

Anstelle von z^3 muss der Betrag des Normalenvektors genommen werden!

b) $f = \begin{pmatrix} x^2-1 \\ x^2+xy+y^2-1 \\ e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \end{pmatrix} \to \mathrm{div} f = 2x + x + 2y + 0 = 3x + 2y$

$\int_K \mathrm{div} f \, dV = 0$ (weil Symmetrie

c) $z=2$

$$\int f(s)\cdot ds = \int_{\rho,\varphi} \begin{pmatrix} (\rho\cos\varphi)^2-1 \\ (\rho\cos\varphi)^2+\rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi)+(\rho\sin(\varphi))^2-1 \\ \exp(-(\rho\cos\varphi)^2)\cdot\exp(-(\rho\sin\varphi)^2)\end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix}8\cos\varphi\\8\sin\varphi\\-16\end{pmatrix}} \, d\rho\, d\varphi$$

$$\cancel{= \int_0^{2\pi}\int_1^8 \rho^2\cos\varphi^2\, 8\cos\varphi - 8\cos\varphi + \rho^2\cos\varphi^2 + \rho^2(\cos\varphi+\sin\varphi) + \rho^2\sin\varphi^2 - 1)(8\sin\varphi) +}$$

$$\cancel{+(-16)(\exp(-(\rho^2\cos\varphi^2))\cdot\exp(-(\rho^2\sin\varphi^2)) \, d\rho\, d\varphi}$$

$$\cancel{= \int_0^{2\pi}\int_1^8 8\rho^2\cos^3\varphi - 8\cos\varphi + \rho^2(\cos\varphi^2 + \cos\varphi + \sin\varphi + \sin\varphi^2) - 1)(8\sin\varphi) - 16\exp(-\rho^2)\, d\rho\, d\varphi}$$

$$\cancel{= \int_0^{2\pi}\int_1^8 [illegible] - 8\cos\varphi - 16\exp(-\rho^2) + \rho^2(8\cos^3\varphi + 8\cos\varphi^2\sin\varphi + 8\sin\varphi^2 + 8\cos\varphi\sin\varphi +}$$

$$\cancel{+ 8\sin\varphi^3 - 8\sin\varphi)}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^8 e^{-\rho^2}\cdot\rho \, d\rho\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\tfrac{1}{2} e^{-\rho^2}\right]_1^8 d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} -\tfrac{1}{2}e^{-64} + \tfrac{1}{2}e^{-1}\, d\varphi$$

$$= 2\pi\left(-\tfrac{1}{2}e^{-64} + \tfrac{1}{2}e^{-1}\right)$$

$$= \pi\left(e^{-1} - e^{-64}\right)$$

d) Zylinder mit $\rho = 1$ $\longrightarrow$ $\Phi = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi \\ z\end{pmatrix}$ $1\le z\le 2;\ 0\le\varphi\le\pi\cdot 2$

$$\int f(s)\cdot ds = \int_{\varphi,z} f(\Phi)\cdot(n)\cdot \text{fudet}\; d\varphi\, dz$$

$$= \int \begin{pmatrix}\cos\varphi^2-1\\ \cos\varphi^2+\cos\varphi\sin\varphi+\sin\varphi^2-1\\ \exp(-\cos\varphi^2)\cdot\exp(-\sin\varphi^2)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\-\sin\varphi\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{\sin\varphi} & 0 \\ -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \\ \sin\varphi & 0 \\ -\cos\varphi & 0 \end{array}$$

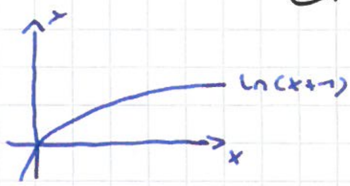
$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 -\cos\varphi^3 + \cos\varphi - \sin\varphi(\cos\varphi^2 + \cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi^2 - 1)\, dz\, d\varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos\varphi^3 + \cos\varphi^2(-\sin\varphi) + \cos\varphi(1-\sin\varphi^2) - \sin\varphi^3 + \sin\varphi\}\, d\varphi$$

$$= \cancel{[\ldots]_0^{2\pi}} = 0$$

e) $I_M = I_K - I_D - I_Z = \pi\left(e^{-64} - e^{-1}\right)$

2016 A HM3 Klausur



②

a) Nein, ~~[illegible]~~ folgendes Gegenbeispiel:

$f(x) = \frac{1}{(x+1)}$ $\int_{x=0}^{\infty} f(x)\, dx = [\ln(x+1)]_0^{\infty} = \infty$

b) $f(z) = \frac{\cos(3z)}{z^3}$

Residuum des Holomorphen Fkt. $f(z) = z^{-3} - \frac{3^2}{2!} z^{-1} + \frac{3^4}{4!} z^{1} \pm \dots$

$res_{z=0} = -\frac{9}{2}$ → Residuensatz:

$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 2\pi i \left(-\frac{9}{2}\right)$ für $0 \in R^{\circ}$

$= 0$ für $0 \notin R^{\circ}$ für $0 \in \mathbb{C} \setminus R$

c) $v(t) = \sqrt[3]{\cos(t)^2} \cdot \sin(u(t))$

Nein, weil Zwischenwertsatz besagt $u(t) = v(t)$ für mind. ein $t \in [0,1]$ → ~~[illegible]~~ Nach ~~[illegible]~~ Cauchys Eindeutigkeitssatz wäre dann auch $u(t) = v(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

d) $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2) = 0\}$ Raum ohne Koordinatenachsen.

Nein, Gegenbeispiel Wirbelfeld $f(x,y,z) = (-y, x, 0)/(x^2+y^2)$

Auf ganz U gilt $\operatorname{rot} f = 0$, aber dennoch kein Potential auf V.

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/\sqrt{k}$ stetig?

Quadratsummierbarkeit: $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ ↯

Reihe ist nicht stetig

f) $A \in \mathbb{C}^{5\times5}$ mit Hauptvektorkette Länge 5?

Ja, Beispiel Jordan Form: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Ist $v_1, \dots, v_5 \in \mathbb{C}^5$ eine Hauptvektorkette zu einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times5}$, so bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{C}^5$, und bezüglich dieser Basis stellt sich A wie oben dar.

(1)

a) $A: 0{,}1$

$B: 0{,}5$

$C: 0{,}4$

10 000 Teile, $t = 0{,}1$

Erwartung $\mu(X) = 10\,000 \cdot 0{,}1 = 1000$

Streuung $\sigma(X) = \sqrt{10000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = 30$

$p = P(X \geq 950) \approx \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(t)\,dt$ mit $\alpha = \frac{950 - \mu - \frac{1}{2}}{\sigma} = -1{,}683$

$p \approx \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt + \int_0^{1{,}683} \varphi(t)\,dt$

$= 0{,}5 + 0{,}\cancel{35729}\ 45352 = \cancel{85{,}729\%}\ 95{,}352\%$

$\approx 95\%$

b) $P(T \cap A) + P(T \cap B) + P(T \cap C)$

$P(A)P(T|A) + P(B)P(T|B) + P(C)P(T|C)$

$1 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}125 = 0{,}25 \to 25\% = P(\text{Bestest})$

~~$P(A \cap \text{Bestest})$~~

~~$= P(A) P(\text{Bestest}) = 2{,}5\%$~~

$P(A|T) = P(T \cap A)/P(T) = P(T|A)P(A)/P(T)$

c) $= 40\%$

$U110$, $P_{n,k} = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}) \leq \exp(-\frac{k(k-1)}{2n})$

$1 - P \leq \cancel{\exp(\ldots)}$

$\exp\left(-\frac{25(24)}{2 \cdot 500}\right) = \exp\left(-\frac{600}{1000}\right) \approx 0{,}55$

$P \geq 45\%$

④ $y'(t) = A\,y(t)$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},\; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$A v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)\, v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$A v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + (-2) v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$A v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + (-2) \cdot v_3$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Eigenwerte $-2, -2, -2$

Eigenvektoren: ~~[illegible]~~ $(-1, 4, 0)$

Hauptvektoren: ~~[illegible]~~ ; ~~[illegible]~~

$$y_1(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_2(t) = e^{-2t} (v_2 + t\, v_1) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 - t \\ -2 + 4t \\ -1 + 0t \end{pmatrix}$$

$$y_3(t) = e^{-2t} \left(v_3 + t v_2 + \frac{t^2}{2} v_1\right) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 - t^2/2 \\ -3 - 2t + 2t^2 \\ -t \end{pmatrix}$$

Für $t \to \infty$ geht $y_3(t) \to 0$

c) $u'(t) = A u(t) + 4 e^{2t} v_1$; $u(t) = c(t)\, y_1(t)$

$y_1'(t) = A y_1(t)$

$$\begin{aligned} u'(t) &= c'(t) y_1(t) + c(t)\, y_1'(t) \\ &= c'(t) y_1(t) + c(t) A\, y_1(t) \\ &= c'(t) e^{-2t} v_1 + c(t) A e^{-2t} v_1 \\ &\overset{!}{=} A\, c(t)\, y_1(t) + 4 e^{2t} v_1 \end{aligned}$$

$\to$ $c'(t) = 4 e^{4t}$ (Koeffizientenvergleich)

$\to$ $c(t) = e^{4t}$

~~[illegible]~~

d) $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (3x-4y)\partial_x u(x,y) + (2y-x)\partial_y u(x,y) = u(x,y)$

$u(x,0) = \sin(x)$

$t \to (x(t), y(t), z(t))$, so dass $u(x(t), y(t)) = z(t)$

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ \sin(x_0) \end{pmatrix}$$

5 $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0$

a) $P(t) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2$

$y(t) = x e^{-3t} + y t e^{-3t}, \quad x, y \in \mathbb{R}$

b) Partikuläre Lösung $y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = e^{-3t}$

Ansatz : $y(t) = c t^2 e^{-3t}$

Lösung : $y'(t) = -3ct^2 e^{-3t} + 2tce^{-3t} = e^{-3t}(t^2(-3)c + t\,2c)$

$y''(t) = 9ct^2e^{-3t} - 6cte^{-3t} - 6cte^{-3t} + 2ce^{-3t}$

$= \cancel{[illegible]}$

$= e^{-3t}(t^2 9c - t12c + 2c)$

$e^{-3t}(\cancel{t^2 9c} - \cancel{t12c} + 2c - \cancel{t^2 18c} + \cancel{t12c} + \cancel{t^2 9c})$

$2ce^{-3t} \overset{!}{=} e^{-3t}$

$c = \frac{1}{2}$

$y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-3t}$

Geht auch mit einer Lösungsformel?

c) ~~[illegible] Ansatz~~: Ansatz : $y(t) = c e^{it}$

~~[illegible]~~

$y'(t) = ic e^{it}$

$y''(t) = -c e^{it}$

$-ce^{it} + 6ice^{it} + 9ce^{it} = e^{it}$

$e^{it}(-c + 6ic + 9c) = e^{it}$

$c(8+6i) = 1$

$y(t) = \frac{1}{8+6i} e^{it} = \left(\frac{4}{50} - \frac{3}{50} i\right) e^{it}$

2016 A HM3 Klausur

$y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 50\cos(t)$

$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

Realteil der vorherigen Lösung mal 50

$y(t) = (4-3i)e^{it}$

d) $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y'' + 6y' + 9y = 70e^{-3t} + 50\cos(t)$

$y(t) = (4-3i)e^{it} + \underbrace{C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}}_{\text{Homogene Lösung}} + \underbrace{5t^2 e^{-3t}}_{\text{Partikuläre}}$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

e) $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \partial_x^2 u(x,y) + 6\partial_x u(x,y) = \partial_y^2 u(x,y)$

$u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$

~~$\lambda(x)$~~

~~$v''(x)w(y) + 6v'(x)w(y) = v(x)w''(y)$~~

~~$v''(x) + 6v'(x) \, w(x) = x$~~

~~$\lambda w(y) = v''(x) + 6v'(x)$~~

~~$w(x)$~~

~~$\lambda w(y) + 6\lambda w(y) = \lambda w''(y)$~~

~~$\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda$~~

~~$\lambda w(x) = w''(y)$~~

Für $v(x)$:

$v''(x)w(y) + 6v'(x)w(y) = v(x)w''(y)$

$v''(x) + 6v'(x) = (v(x)w''(y)) : w(y)$

$v''(x) + 6v'(x) = v(x)\lambda(y)$

Für $w(y)$

$v''(x)w(y) + 6v'(x)w(y) = v(x)w''(y)$

$((v''(x) + 6v'(x)) : v(x)) \cdot w(y) = w''(y)$

$\lambda w(y) = w''(y)$

f) $w(y) = \cos(3y)$

$w'(y) = -3\sin(3x)$

$w''(y) = -9\cos(3y)$

$-9\cos(3y) = \lambda\cos(3y) \rightarrow \lambda = -9$

$v''(x) + 6v'(x) = \lambda v(x) = -9\, v(x)$

$u(x,y) = v(x) \cdot \cos(3y)$

$v''(x)\cos(3y) + 6v'(x)\cos(3y) = -9\, v(x)\cos(3y)$

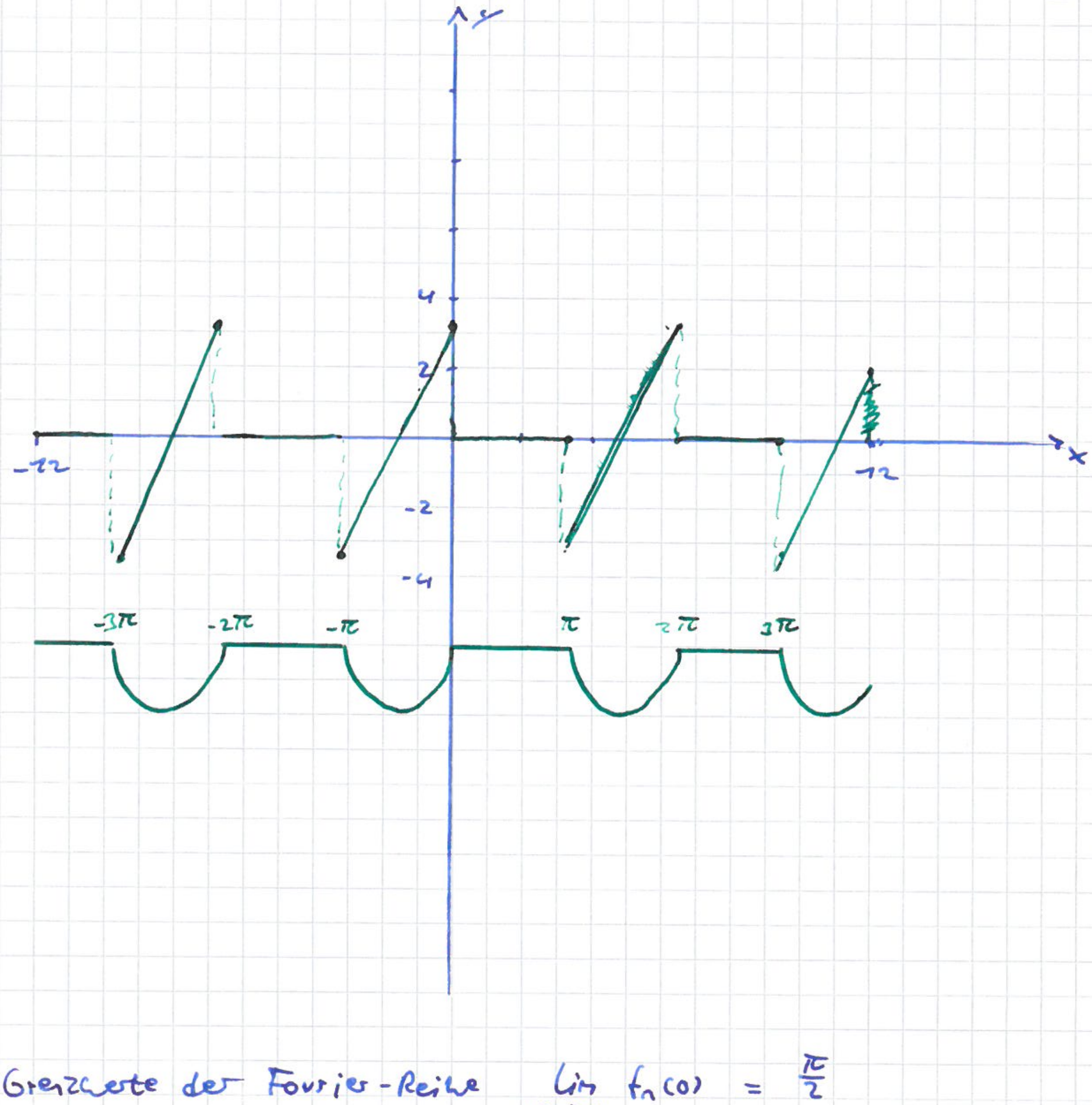
$v''(x)\cancel{\cos(3y)} + 6v'(x)\cancel{\cos(3y)} + 9\, v(x)\cancel{\cos(3y)} = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 = (\lambda+3)^2$

$= (c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x})\cos(3y) = u(x,y)$

6 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: 2π-periodisch mit

$f(x) = 2x + \pi$ für $-\pi < x < 0$ und $f(x) = 0$ für $0 \leq x \leq \pi$



Grenzwerte der Fourier-Reihe $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = -\frac{\pi}{2}$

c) $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq 0 \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n^2} & \text{für } n \geq 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \sin(n\omega t) f(t)\, dt$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin(nt) f(t)\, dt$$

Rest von 0 bis π

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \underbrace{\sin(nx)}_{v'} \underbrace{(2x+\pi)}_{u}\, dx + 0$$ partielle Integration

$$= \frac{1}{\pi} \left[(2x+\pi)\cdot(-\cos(nx))\frac{1}{n})\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} +2\cos(nx)\cdot\frac{1}{n}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[(2x+\pi\cdot(-\frac{1}{n}\cos(nx))\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{2}{n^2}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{0} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n} - (2\pi+\pi(\pm\frac{1}{n})) \pm \frac{2}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{n} + \cancel{\ldots} \pm \frac{1}{n} \cancel{\ldots}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq 2 \text{ gerade} \\ -\frac{2}{n} & \text{für } \underbrace{n \geq 1}_{?} \text{ ungerade} \end{cases}$$

d) $x = \pi \longrightarrow$ Ort der Grenzwerte aus b)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots$$

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n} + b_n \overbrace{\sin(\pi n)}^{0}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n (-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}(-1)^n + \frac{a_0}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2j+1)^2}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

e) Nullte Fourier-Koeffizient ist Mittelwert über eine Periode

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J(x)\, dx = \cancel{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2x+\pi\, dx = \frac{1}{\pi}\left[x^2+\pi x\right]_{-\pi}^{0}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x^2 + \pi x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi}{2}x^2\right]_{-\pi}^{0} = +\frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2$$

$$= -\frac{1}{6}\pi^2$$

$$A_n = -\frac{b_n}{n} = \begin{cases} \frac{2}{n^2} & n \geq 2 \text{ gerade} \\ 0 & n \geq 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$B_n = \frac{a_n}{n} = \begin{cases} 0 & n \geq 2 \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n^3} & n \geq 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

(7) $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1,\ 1 \le x^2+y^2 \le (3-z)^2\}$

a) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ z\end{pmatrix} =: \Phi\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\\ z\end{pmatrix},\ 0\le z\le 1;\ 0\le\varphi\le 2\pi;\ 1\le\rho\le 3-z$

$M = \{(x,y,z) \in K \mid x^2+y^2 = (3-z)^2\}$

$\cancel{\frac{\partial\Phi_M}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi_M}{\partial z} = \begin{pmatrix}-\rho\sin(\varphi)\\ \rho\cos(\varphi)\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = }$

$\cancel{x+y = 3-z}$

$\cancel{x = 3-z-y \qquad y = 3-z-x}$

$\cancel{\Phi_M = \begin{pmatrix}3-z-y\\3-z-x\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-z-\rho\sin\varphi\\3-z-\rho\cos\varphi\\z\end{pmatrix}}$

$$\Phi_M = \begin{pmatrix}(3-z)\cos(\varphi)\\(3-z)\sin(\varphi)\\z\end{pmatrix};\ 0\le z\le 1;\ 0\le\varphi\le 2\pi$$

$$\frac{\partial\Phi_M}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi_M}{\partial z} = \begin{pmatrix}-(3-z)\sin(\varphi)\\(3-z)\cos(\varphi)\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\cos(\varphi)\\-\sin(\varphi)\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}(3-z)\cos(\varphi)\\(3-z)\sin(\varphi)\\+(3-z)\sin(\varphi)\sin(\varphi)+(3-z)\cos(\varphi)\cos(\varphi)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\\sin(\varphi)\\1\end{pmatrix}(3-z)$$

Länge des Normalenvektors: $\sqrt{(\cos\varphi(3-z))^2+(\sin\varphi(3-z))^2+(3-z)^2}$

$$= \sqrt{1(3-z)^2+(3-z)^2}$$

$$= \sqrt{2}\,(3-z)$$

$$\mathrm{Vol}_2(M) = \int_{z=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{2}(3-z)\,d\varphi\,dz = 5\sqrt{2}\,\pi$$

$$= \int_0^1 \left[3\varphi\sqrt{2} - \varphi\sqrt{2}z\right]_0^{2\pi} dz$$

$$= \int_0^1 6\pi\sqrt{2} - 2\pi\sqrt{2}z\, dz$$

$$= \left[6\pi\sqrt{2}z - \pi\sqrt{2}z^2\right]_0^1$$

$$= 6\pi\sqrt{2} - \pi\sqrt{2}$$

$$= \underline{5\sqrt{2}\,\pi}$$

c) $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq 0 \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n^2} & \text{für } n \geq 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T} \sin(n\omega t) f(t)\, dt$$

$$= \frac{2}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \sin(nt) f(t)\, dt$$

Rest von 0 bis π

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \overset{v'}{\sin(nx)}\ \overset{u}{(2x+\pi)}\, dx \quad + 0 \qquad \text{partielle Integration}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[(2x+\pi)\cdot(-\cos(nx))\tfrac{1}{n})\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} +2\cos(nx)\cdot\frac{1}{n}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[(2x+\pi\cdot(-\tfrac{1}{n}\cos(nx))\right]_{-\pi}^{0} + \left[\tfrac{2}{n^2}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{0} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} - (2\pi + \pi(\pm\tfrac{1}{n})) \pm \frac{2}{n^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{n} + \cancel{\ldots} \pm \frac{1}{n} \cancel{\ldots}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq 2 \text{ gerade} \\ -\frac{2}{n} & \text{für } \underbrace{n \geq 1}_{?} \text{ ungerade} \end{cases}$$

d) $x = \pi \longrightarrow$ Ort der Grenzwerte aus b)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \cdots$$

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n} + b_n \overbrace{\sin(\pi n)}^{0}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n (-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} (-1)^n + \frac{a_0}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2j+1)^2}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

e) Nullte Fourier-koeffizient ist Mittelwert über eine Periode

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, dx = \cancel{\ldots}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x^2 + \pi x\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{\pi}{2}x^2 \right]_{-\pi}^{0} = +\frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{2}\pi^2$$

$$= -\frac{1}{6}\pi^2$$

$$A_n = -\frac{b_n}{n} = \begin{cases} \frac{2}{n^2} & n \geq 2 \text{ gerade} \\ 0 & n \geq 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$B_n = \frac{a_n}{n} = \begin{cases} 0 & n \geq 2 \text{ gerade} \\ \frac{4}{\pi n^3} & n \geq 1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

⑦ $K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1 ,\ 1 \le x^2 + y^2 \le (3-z)^2 \}$

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}, 0 \le z \le 1 ; 0 \le \varphi \le 2\pi ; 1 \le \rho \le 3-z$

$M = \{ (x,y,z) \in K \mid x^2 + y^2 = (3-z)^2 \}$

$$\Phi_M = \begin{pmatrix} (3-z)\cos(\varphi) \\ (3-z)\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} ; 0 \le z \le 1 ; 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} = \begin{pmatrix} -(3-z)\sin(\varphi) \\ (3-z)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (3-z)\cos(\varphi) \\ (3-z)\sin(\varphi) \\ +(3-z)\sin(\varphi)\sin(\varphi) + (3-z)\cos(\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} (3-z)$$

Länge des Normalenvektors: $\sqrt{(\cos\varphi(3-z))^2 + (\sin\varphi(3-z))^2 + (3-z)^2}$

$$= \sqrt{(3-z)^2 + (3-z)^2}$$

$$= \sqrt{2}\,(3-z)$$

$$\mathrm{Vol}_2(M) = \int_{z=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{2}(3-z)\, d\varphi\, dz = 5\sqrt{2}\pi$$

$$= \int_0^1 \left[3\varphi\sqrt{2} - \varphi\sqrt{2} z \right]_0^{2\pi} dz$$

$$= \int_0^1 6\pi\sqrt{2} - 2\pi\sqrt{2} z \, dz$$

$$= \left[6\pi\sqrt{2} z - \pi\sqrt{2} z^2 \right]_0^1$$

$$= 6\pi\sqrt{2} - \pi\sqrt{2}$$

$$= \underline{\underline{5\sqrt{2}\pi}}$$

2016 4 HM Klausur

5

b) Normalenvektor zu Z mit $\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ $0 \le z \le 1$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $\rho = 1$

Flussintegral $\int_S f \cdot dS$ z-Koordinate unwichtig

$$= \int_{\rho,z\in D} f(\phi(\rho,z)) \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) d(\rho,z)$$

$$= \int \begin{pmatrix} -\sin\varphi^2\cos\varphi \\ \cos\varphi^2\sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi z$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Vektorfeld ist überall tangential zur Fläche des Zylinders

c) $\int_Z \operatorname{div} f \, d(x,y,z)$

$$\operatorname{div} f = -y^2 + x^2$$

$$= \rho^2(-\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$$\int_{z=0}^{1} \int_{\rho=1}^{3-z} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho^2(-\sin(\varphi) + \cos(\varphi)) \, d\varphi \, d\rho \, dz$$

$$\int_{z=0}^{1} \int_{\rho=1}^{3-z} \left[\rho^2(-\cos(\varphi) - \sin(\varphi))\right]_0^{2\pi} d\rho \, dz$$

$$= \int_0^1 \int_1^{3-z} \underbrace{0}_{-\rho^2+\rho^2} d\rho \, dz$$

$$= 0$$

d) Fluss von f durch Deckel $(z=1)$

~~$\int_D \ldots \int_D e^{x^2} e^{y^2} \ldots$~~ x und y egal

Parametrisierung: $\gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$

$\gamma' =$

$$\begin{array}{cc} 0 & x \\ 0 & y \\ 1 & 1 \\ 0 & x \\ 0 & y \end{array} \qquad \begin{pmatrix} x\cdot y \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Flussintegral

$$\int_{s\in D} f(s)\cdot dS := \int_{(\varphi,\rho)\in D} f(\gamma(\varphi,\rho))\cdot(\partial_\varphi \gamma(\varphi,\rho) \times \partial_\rho \gamma(\varphi,\rho))\, d(\varphi,\rho)$$

~~$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=1}^{\rho=2} \left(\rho^2 \ldots \sin\varphi^2 \, \rho\cos\varphi \ldots \rho^2 \cos\varphi^2 \, \rho\sin\varphi \ldots \right.$~~

Relevanter Teil von f ist nur z-Koordinate

$$\int_{(\varphi,\rho)\in D} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \exp(((\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2)/2) \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \rho(-\sin\varphi) \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\varphi\, d\rho$$

$$= \int_{(\varphi,\rho)\in D} +\rho \exp(((\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2)/2)\, d(\varphi,\rho) \qquad \hookrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +\rho\sin\varphi^2+\rho\cos\varphi^2 \end{pmatrix}$$

$$= +\int_{\rho=1}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} +\rho\, e^{\frac{\rho^2}{2}} = \int_{\rho=1}^{2} 2\pi\rho\, e^{\frac{\rho^2}{2}}$$

$\boxed{\text{„Gaußscher Kunstgriff"}}$

$$= 2\pi\left[e^{\frac{\rho^2}{2}} \right]_1^2 = 2\pi\left(e^2 - e^{\frac{1}{2}}\right)$$

e) ~~$I_{Deckel} \ldots I_{Boden} \ldots I_{Zylinder} \ldots = 2\pi(e^2 - e^{\frac{1}{2}}) - 2\pi(e^{1/2} - e^{9/2}) - 0$~~

~~$= 2\pi$~~

$$I_{Mantel} = I_{Quellstärke} - I_{Deckel} - I_{Boden} - I_{Zylinder}$$

$$= 0 - 2\pi(e^2 - e^{1/2}) - 2\pi(e^{1/2} - e^{9/2}) - 0$$

$$= -2\pi(e^2 - e^{1/2} + e^{1/2} - e^{9/2})$$

$$= -2\pi(e^2 - e^{9/2})$$