1

a) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = A_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\, B_{km}\,(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ij} B_{jm}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$ ✓

b) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = A_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot B_{km}\,(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ij} B_{ij}$ ✓

c) $\underline{v}\,\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}} = v_o\, \underline{e}_o\, B_{ji} A_{jm}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

$= v_i B_{ji} A_{jm}\, \underline{e}_m$ ✓

d) $\underline{v} \cdot \underline{v} = v_i\, \underline{e}_i \cdot v_j\, \underline{e}_j$

$= v_i v_i$ ✓

e) $\underline{\underline{A}} \cdot \mathbb{C} = A_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot \mathbb{C}_{kmop}\,(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{ij}\, \mathbb{C}_{ijop}\,(\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$ ✓

f) $\operatorname{div}(\underline{v}) = \operatorname{grad}(\underline{v}) \cdot \underline{\underline{I}}$; $\operatorname{grad}(\underline{v}) = v_{i,j}$

$= v_{i,i}$ ✓ Komma steht hier für Ableitung

2 $\Phi(\underline{\underline{X}}) = 2\underline{\underline{X}}^2 + \underline{\underline{Y}}$

$\underline{\underline{X}} = X_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$; $\underline{\underline{Y}} = Y_{ij}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$

Ableitung gesucht nach $\underline{\underline{U}} = U_{ik}\,(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_k)$

a) $D\Phi(\underline{\underline{X}}) = \frac{d}{d\epsilon}\left[\Phi(\underline{\underline{X}} + \epsilon \underline{\underline{U}})\right]_{\epsilon=0}$

$= \frac{d}{d\epsilon}\left[2(\underline{\underline{X}} + \epsilon\underline{\underline{U}})^2 + \cancel{\underline{\underline{Y}}}\right]_{\epsilon=0}$ =0, keine Funktion von $\underline{\underline{X}}$

$= \frac{d}{d\epsilon}\left[2(\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}\epsilon\underline{\underline{U}} + \epsilon\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}} + \epsilon\underline{\underline{U}}\epsilon\underline{\underline{U}})\right]_{\epsilon=0}$

$= \left[2\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{U}} + 2\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}} + 2\epsilon\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}\right]_{\epsilon=0}$

$= 2\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{U}} + 2\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}}$

$= 2(\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}})$ Nicht sicher ob das stimmt, weicht von anderer Lösung $2(\underline{\underline{X}}4 + \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}})$ ab.

↓ soll vermutlich ein $\underline{\underline{U}}$ sein...

b) $D\Phi(\underline{\underline{X}}) = \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial X_{kl}} U_{kl}$

$= \frac{\partial\, 2X_{ij}X_{jm} + Y_{op}}{\partial X_{kl}} U_{kl}$

$= 2(X_{ij}\,\delta_{jk}\,\delta_{ml} + X_{jm}\,\delta_{ik}\,\delta_{jl})\,U_{kl}$

$= 2(X_{ik}\,\delta_{ml} + X_{lm}\,\delta_{ik})\,U_{kl}$

$= 2(X_{ik} U_{km} + U_{il} X_{lm}) = 2(\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{X}})$

I

③

a) $$x(t) = x_i(t)\, e_i = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 + (2\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\, t \\ \bar{X}_2 + (\bar{X}_1 + 2\bar{X}_2)\, t \\ \bar{X}_3 + (\bar{X}_1 \bar{X}_2 + 1)\, t \end{pmatrix}$$

a) nicht in Repetitorium vorgerechnet...

$Q_{1,t=0} = (0,\ 0,\ 0) \rightarrow Q_{1\ t=t} = \cancel{(\ldots)}\ (0,\ 0,\ t)$

$Q_{2,t=0} = (1,\ 0,\ 0) \rightarrow Q_{2\ t=t} = (1+2t,\ t,\ t)$

$Q_{3,t=0} = (1,\ 1,\ 0) \rightarrow Q_{3\ t=t} = (1+t,\ 1+3t,\ 3t)$

$Q_{4,t=0} = (0,\ 1,\ 0) \rightarrow Q_{4\ t=t} = (-t,\ 1+2t,\ t)$

$Q_{1\ t=1} = (0,\ 0,\ 1)$

$Q_{2\ t=1} = (3,\ 1,\ 1)$

$Q_{3\ t=1} = (2,\ 4,\ 3)$ (2,1,2) nach Brodi !

$Q_{4\ t=1} = (-1,\ 3,\ 1)$

b) $$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1+2t & -t & 0 \\ t & 1+2t & 0 \\ \bar{X}_2 t & \bar{X}_1 t & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1+2t & -t \\ t & 1+2t \\ \bar{X}_2 t & \bar{X}_1 t \end{matrix}$$

c) $\det(\underline{\underline{F}}) \overset{!}{>} 0$

$\det(\underline{\underline{F}}) = (1+2t) + t^2 > 0$

t ist immer größer $0 \rightarrow \det(\underline{\underline{F}}) > 0$

d) $C = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$ d) nicht in Repetitorium gerechnet...

$$= \begin{pmatrix} 1+2t & +t & \bar{X}_2 t \\ -t & 1+2t & \bar{X}_1 t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2t & -t & 0 \\ t & 1+2t & 0 \\ \bar{X}_2 t & \bar{X}_1 t & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+2t)^2 + t^2 + (\bar{X}_2 t)^2 & -t-2t^2+t+2t^2+\bar{X}_1 t \bar{X}_2 t & \bar{X}_2 t \\ -t-2t^2+t+2t^2+\bar{X}_1\bar{X}_2 t^2 & t^2+(1+2t)^2+(\bar{X}_1 t)^2 & \bar{X}_1 t \\ \bar{X}_2 t & \bar{X}_1 t & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+4t+5t^2+\bar{X}_2^2 t^2 & \bar{X}_1 \bar{X}_2 t^2 & \bar{X}_2 t \\ \bar{X}_1 \bar{X}_2 t^2 & 1+4t+5t^2+\bar{X}_1^2 t^2 & \bar{X}_1 t \\ \bar{X}_2 t & \bar{X}_1 t & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1+4t+5t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+4t+5t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FEM Rep ~~Absenza~~
WiSe 23-24

④

a) $\Phi^I(\eta) = \prod_{J=1, J\neq I}^{k+1} \frac{\eta - \eta^J}{\eta^I - \eta^J}$

Ordnung der Ansatzfunktion $k = 1 \rightarrow k+1 = 2$

$\eta^1 = -1 \quad \eta^2 = 1$

$\Phi^1_{1D}(\eta_1) = -\frac{1}{2}(\eta_1 - 1)$
$\Phi^2_{1D}(\eta_1) = \frac{1}{2}(\eta_1 + 1)$
Nebenrechnung

$\Phi^1(\eta) = +\frac{1}{2}(\eta_1 - 1)\frac{1}{2}(\eta_2 - 1)$

$\Phi^2(\eta) = -\frac{1}{2}(\eta_1 + 1)\frac{1}{2}(\eta_2 - 1)$

$\Phi^3(\eta) = -\frac{1}{2}(\eta_1 - 1)\frac{1}{2}(\eta_2 + 1)$

$\Phi^4(\eta) = \frac{1}{2}(\eta_1 + 1)\frac{1}{2}(\eta_2 + 1)$

b) $A_{verzerrt} = 4$

$A_{referenz} = 2$

b) nicht im Repetitorium gerechnet...

$\rightarrow \frac{A_{ver}}{A_{ref}} = \frac{1}{2} \int 1 \cdot \underbrace{\det(\underline{J})}_{= \frac{A_{ver}}{A_{ref}}} d\eta$

c) $P_\eta(-1, 0{,}5)$

$\Phi^1(P_\eta) = \frac{1}{4}$

$\Phi^2(P_\eta) = 0$

$\Phi^3(P_\eta) = \frac{3}{4}$ hier steht im Aufschrieb $\frac{1}{3}$... ~~Fehler~~?
↳ Es wird mit $\frac{3}{4}$ weitergerechnet, also vermutlich Schreibfehler.

$\Phi^4(P_\eta) = 0$

$\underline{X}^h = \sum \underbrace{\hat{\underline{X}}^I}_{} \cdot \Phi^I(\eta)$
↳ Knotenpunkt Position im physikalische System (x_1, x_2)

$\underline{X}^h\left(\begin{pmatrix}-1\\0{,}5\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

d) $\underline{J} = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{\eta}} \approx \frac{\partial \underline{X}^h}{\partial \underline{\eta}}$

$\underline{J}^h = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sum_I \hat{\underline{X}}^I \Phi^I(\underline{\eta})\right)$

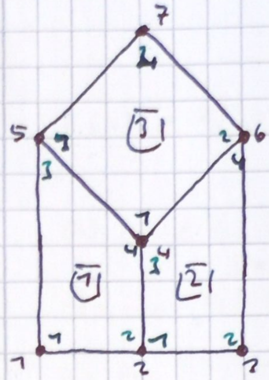
$= \sum_I \hat{\underline{X}}^I \cdot \frac{\partial \Phi^I}{\partial \underline{\eta}}$

Mit dieser Zelle gleich weiterrechnen

↳ Für 2D: $\underline{J} = \begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial X_1^h}{\partial \eta_1}} & \frac{\partial X_1^h}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial X_2^h}{\partial \eta_1} & \frac{\partial X_2^h}{\partial \eta_2} \end{pmatrix}$

3

5



$\boxed{i}$	$\hat{=}$	Elementnummer
i	$\hat{=}$	Globale Knotennummer
i	$\hat{=}$	Lokale Knotennummer
(i)	$\hat{=}$	Globaler Freiheitsgradindex
(i)	$\hat{=}$	Lokaler Freiheitsgradindex

Berechnung mit zwei Freiheitsgraden pro Knoten

a) LGS : $\underset{14\times 14}{\underline{K}} \cdot \overset{14\times 1}{\underline{U}} = \underset{14\times 1}{\underline{F}}$ (mit 14 Unbekannten)

b) ges.:

$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \end{array}$
$[U_{x1}; U_{y1}; U_{x2}; U_{y2}; \dots]^T$

Der Lösungsvektor enthält abwechselnd die Freiheitsgrade für die x- und y-Verschiebung, angefangen am 1. globalen Knoten.

x-Verschiebung am Knoten k:

$i_x(k) = 2k - 1$

Um die Position i_x bzw. i_y der Freiheitsgrade des k-ten Knotens in $\underline{U}$ zu bestimmen, können folgende Formeln verwendet werden.

y-Verschiebung am Knoten k

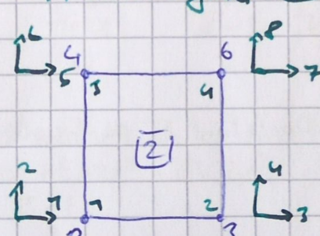
$i_y(k) = i_x(k) + 1 \quad = 2k$

c) $\underline{\underline{k}}^e$ für Element 2 mit den Einträgen k_{ij} und lokalen Freiheitsgradindizes i, j

$\mathrm{Dim}(\underline{\underline{k}}^e) = n_{DOF} \cdot n_{Elementknoten} = 2 \cdot 4 = 8$

Am lokalen Knoten 1 ist der Index für den x-Freiheitsgrad (1) und für den y-Freiheitsgrad (2) usw...

Element 2 :



$$\hookrightarrow \underline{\underline{k}}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (1) & (2) & \dots & (8) \end{array} \\ \begin{pmatrix} k^2_{11} & k^2_{12} & \dots & k^2_{18} \\ k^2_{21} & k^2_{22} & \dots & k^2_{28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k^2_{81} & k^2_{82} & \dots & k^2_{88} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ \vdots \\ (8) \end{array}$$

$\mathbb{C} \hat{=}$ Materialtensor

$$\underline{\underline{k}}^e = \int_E \varepsilon(v) \cdot \mathbb{C} \cdot \varepsilon(u)\, dV \quad \text{Schwache Form}$$

$$= \int_E \sum_i \sum_j \underbrace{(\underline{\underline{B}}^I)^T \cdot [\mathbb{C}]^V \cdot \underline{\underline{B}}^J}_{(k^e)^{IJ} \to 2\times 2} dV \quad \text{Starke Form}$$

d) ges: $(k^e)_{ij}$

Beispiel: $i=1,\ j=1 \rightarrow I=3,\ J=3$

$i=1,\ j=2 \rightarrow I=3,\ J=4$

$1 \to 2$: $1 \to 3$ $2 \to 4$

$2 \to 3$: $3 \to 5$ $4 \to 6$

$3 \to 4$: $5 \to 7$ $6 \to 8$

$4 \to 6$: $7 \to 11$ $8 \to 12$

Einträge in globaler Steifigkeitsmatrix:

$$
K = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2_{11} & k^2_{12} & k^2_{13} & k^2_{14} & k^2_{15} & k^2_{16} & 0 & 0 & k^2_{17} & k^2_{18} & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2_{21} & k^2_{22} & k^2_{23} & k^2_{24} & k^2_{25} & k^2_{26} & 0 & 0 & k^2_{27} & k^2_{28} & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2_{31} & k^2_{32} & k^2_{33} & k^2_{34} & k^2_{35} & k^2_{36} & 0 & 0 & k^2_{37} & k^2_{38} & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} & k^2_{45} & k^2_{46} & 0 & 0 & k^2_{47} & k^2_{48} & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2_{51} & k^2_{52} & k^2_{53} & k^2_{54} & k^2_{55} & k^2_{56} & 0 & 0 & k^2_{57} & k^2_{58} & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2_{61} & k^2_{62} & k^2_{63} & k^2_{64} & k^2_{65} & k^2_{66} & 0 & 0 & k^2_{67} & k^2_{68} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2_{71} & k^2_{72} & k^2_{73} & k^2_{74} & k^2_{75} & k^2_{76} & 0 & 0 & k^2_{77} & k^2_{78} & 0 & 0 \\
0 & 0 & k^2_{81} & k^2_{82} & k^2_{83} & k^2_{84} & k^2_{85} & k^2_{86} & 0 & 0 & k^2_{87} & k^2_{88} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}
$$

1

a) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = A_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\, B_{km}(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ij} B_{km} \delta_{jk} \, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

Brodi lässt das ⊗ hier weg

$= A_{ij} B_{jm} \, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

b) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = A_{ij}(e_i \otimes e_j) \cdot B_{km}(e_k \otimes e_m)$

$= A_{ij} B_{km} \delta_{ik} \delta_{jm}$

$= A_{ij} B_{ij}$

$\underline{v}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}$ Eigentlich so, in Indexnotation aber egal

c) $\underline{v}\,\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}} = v_i \underbrace{\underline{e}_i \, B_{kj}(\underline{e}_j}_{\text{dann das}} \otimes \underbrace{\underline{e}_k) \, A_{mo}(\underline{e}_m}_{\text{zuerst}} \otimes \underline{e}_o)$

$= v_i B_{kj} A_{mo} \delta_{ij} \delta_{km}$

$= v_i B_{ki} A_{ko} \, \underline{e}_o$

Punkt setzen oder nicht spielt hier keine wirkliche Rolle, es impliziert nur die gleiche Zahl an Basen

e) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}} \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}} = A_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\, C_{kmop}(\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{ij} C_{kmop} \delta_{ik} \delta_{jm} \, (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{ij} C_{ijop} \, (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

Bonus Aufgabe

$\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}} = C_{ijkm} \cancel{A_{op}} \, (e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_m) A_{op} (e_o \otimes e_p)$

$= C_{ijkm} A_{km}$

f) $\mathrm{div}(\underline{v}) = v_{i,i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$

Komma steht für Ableitung

$\mathrm{grad}(\underline{v}) = v_{i,j} = \begin{pmatrix} \partial v_1/\partial x_1 & \cdots & \partial v_1/\partial x_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial v_3/\partial x_1 & \cdots & \partial v_3/\partial x_3 \end{pmatrix}$

d) $\underline{v} \cdot \underline{v} = v_i v_i$

c) In Absolutschreibweise

$v_i B_{ki} A_{ko} \, \underline{e}_o = \underline{v}\,\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{A}}$

$\underline{v}\underline{\underline{B}}$ wäre $v_i B_{ij}$ -> Es muss ein ^{T} im Spiel sein

$(AB)^T = B^T A^T$

FEM Rep WiSe 24-25

(2)

(2)

a) $\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{X}}) = 2\underline{\underline{X}}^2 + \underline{\underline{Y}}$

$D\Phi_{\underline{\underline{X}}} = \frac{d}{d\varepsilon}\left[\Phi(\underline{\underline{X}} + \varepsilon \underline{\underline{u}})\right]_{\varepsilon=0}$ ε ist skalare Größe

$= \frac{d}{d\varepsilon}\left[(2(\underline{\underline{X}} + \varepsilon \underline{\underline{u}})(\underline{\underline{X}} + \varepsilon \underline{\underline{u}})\right]$

$= \frac{d}{d\varepsilon}\left[2(\underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{X}} + \varepsilon \underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{X}} + \varepsilon \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{u}} + \varepsilon^2 \underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{u}})\right]_{\varepsilon=0}$

$= \left[2(\underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{u}} + 2\varepsilon\, \underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{u}}\right]_{\varepsilon=0}$

$= 2(\underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{u}})$

$E = \frac{1}{2}(C - I) \approx E(0) + DE_u$

b) $D\Phi_{\underline{\underline{X}}} = \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial X_{km}} U_{kl}$

$= \frac{\partial(2X_{im}X_{mj} + Y_{ij})}{\partial X_{kl}} U_{kl}$

$= (2\delta_{ik}\delta_{ml}X_{mj} + 2X_{im}\delta_{mk}\delta_{jl})U_{kl}$

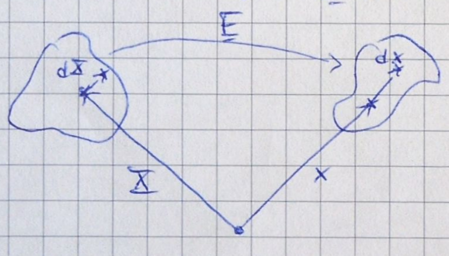
$= (2\delta_{ik}X_{lj} + 2X_{ik}\delta_{jl})U_{kl}$

$= 2X_{lj}U_{il} + 2X_{ik}U_{kj}$ In Indexschreibweise darf Reihenfolge getauscht werden (Summe von Skalaren)

$= 2U_{il}X_{lj} + 2X_{ik}U_{kj}$

$= 2(\underline{\underline{u}}\,\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}\,\underline{\underline{u}})$

(3)



$d\underline{x} = \underline{\underline{F}}\, d\underline{X} \longleftrightarrow \underline{\underline{F}} = \frac{d\underline{x}}{d\underline{X}}$

oder: $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})$

a) $\underline{q}_i = \underline{x}(\underline{Q}_i)$

$\underline{q}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad q_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad q_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ $\quad q_4 = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

b) $F = \underbrace{\frac{d\underline{x}}{d\underline{X}}}_{x_{i,j}} = \begin{pmatrix} 1+2t & -t & 0 \\ t & 1+2t & 0 \\ x_2 t & x_1 t & 1 \end{pmatrix}$

c) $\det(\underline{F}) = (2t+1)^2 + t^2$ Immer größer 0!

d) Rechter Cauchy-Green Tensor

↳ $\underline{\underline{C}} \to d\underline{x}\, d\underline{x} = d\underline{\underline{X}}\, \underline{\underline{C}}\, d\underline{\underline{X}}$

$C = F^T F$

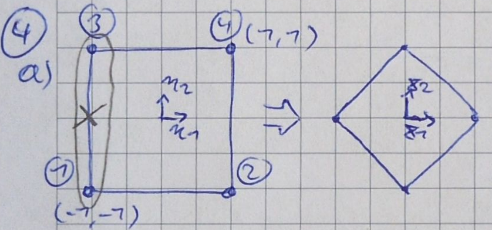
ges: $C(\underline{X} = \underline{0})$

$$F(\underline{X}=0) = \begin{pmatrix} 1+2t & -t & 0 \\ t & 1+2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

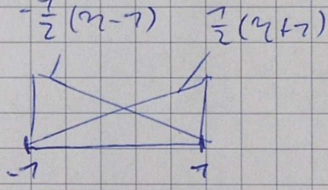
$$C(\underline{0}) = \begin{pmatrix} 5t^2+4t+1 & 0 & 0 \\ 0 & 5t^2+4t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nur Streckungen in Hauptrichtungen keine Scherung, weil nur Einträge auf Hauptdiagonalen.

4) a)



$\underline{X}(\eta)$



$\Phi^1(\eta) = \frac{1}{4}(\eta_1-1)(\eta_2-1)$

$\Phi^2(\eta) = -\frac{1}{4}(\eta_1+1)(\eta_2-1)$

$\Phi^3(\eta) = -\frac{1}{4}(\eta_1-1)(\eta_2+1)$

$\Phi^4(\eta) = \frac{1}{4}(\eta_1+1)(\eta_2+1)$

c) $\underline{X}(\eta) = \sum_I \underline{X}^I \Phi^I(\eta)$ Knotenkoordinaten

ges: $P(\eta_1 = -1,\ \eta_2 = \frac{1}{2})$

Eingesetzt in Ansatzfunktionen:

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-1) + \frac{3}{4}\cdot 0 \\ \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{3}{4}\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Anderer Ansatz für d):
Ableitung der Fkt. nach η_1
Ableitung der Fkt nach η_2

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}, & 0, & \frac{3}{4}, & 0 \\ x & x & x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{cc} \text{X-Koordinaten der Knoten} & \text{Y-Koordinaten der Knoten} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= J$

Robert-Florin-Straße 1 · 46238 Bottrop
Telefon 0 20 41/74 64-0 · Telefax 0 20 41/74 64-99
info@beckelmann.de · www.beckelmann.de

FEM Rep ~~[illegible]~~
Live 24-25

4|

(4)

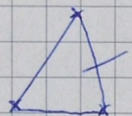
d) $\underline{\underline{J}} = \nabla_x (\underline{\underline{X}})$

$$= \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$X_{i,j} = \sum_I \overset{1}{X}{}_i^I \cdot \frac{\partial \Phi^I}{\partial x_j}$$

$$\text{Bsp}: \frac{\partial \Phi^1}{\partial x_1} = \frac{\partial \left(\frac{1}{4}(x_1 - 1)(x_2 - 1)\right)}{\partial x_1} = \frac{1}{4}(x_2 - 1)$$

$$\boxed{A = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \det(J)\, dx_1 dx_2}$$



$\Phi^I \sim 1, x, y$ Jacobi-Matrix im ganzen Element konstant in Dreieckselementen

(5) $-\Delta u = f$ für $\Omega \in \mathbb{R}^1$

$u = 0$ auf $\partial\Omega$ (Auf dem Rand)

Ansatzraum muss so aufgebaut sein, dass die Dirichlet Randbedingungen erfüllt sind! (Das in Prüfung schreiben!)

a) $\int_\Omega -u_{xx} \cdot v \, dx = \int_\Omega f \cdot v \, dx \quad \forall v \in H_0^1$

$\Leftrightarrow [u_x \cdot v]_{\partial\Omega} - \int -u_x v_x \, dx = \int f v \, dx$

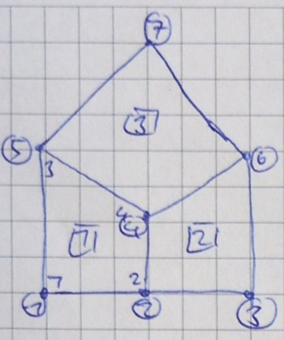
$\Leftrightarrow \underbrace{\int u_x v_x \, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int f v \, dx - [u_x v]_{\partial\Omega}}_{L(v) \text{ linear}}$

b) $u \to u_h = \sum_I \overset{\text{Knotenwerte}}{u^I} \Phi^I \Rightarrow \underline{\underline{K}}\, \underline{u} = \underline{L}$

[Poisson - Vorlesung mit zwei Übungen!]

FEM Rep WiSe 24/25

6)



a) Global : 14 Freiheitsgrade

~~(Jedes Element vier Knoten, acht Freiheitsgrade)~~

$\underline{\underline{K}} \in \mathbb{R}^{14 \times 14}$

$\underline{u}, \underline{f} \in \mathbb{R}^{14}$

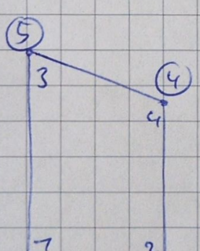
Lokal : 8 Freiheitsgrade

$\underline{\underline{k}} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$

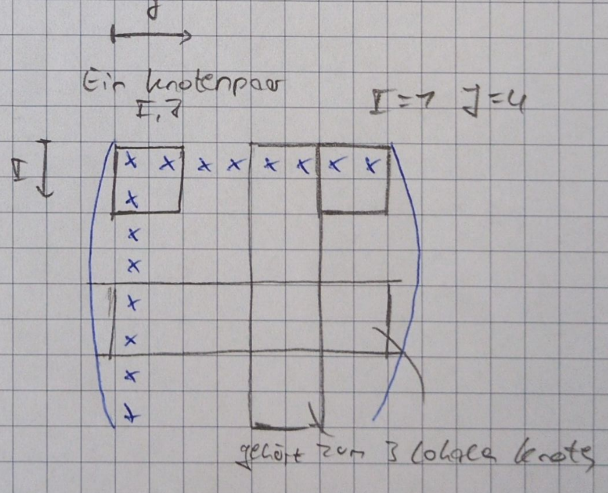
b)

$$\underline{\underline{u}} = \begin{pmatrix} u_{x11} \\ u_{y11} \\ u_{x12} \\ u_{y12} \\ u_{x13} \\ u_{y13} \\ \vdots \\ u_{x17} \\ u_{y17} \end{pmatrix}$$

c)



1
$\cancel{1} \to 1$
2
$\cancel{2} \to 2$
$3 \to 5$
$4 \to 4$



Lokal

d) $k^{l}_{55} \to K_{99}$

$k^{l}_{56} \to K_{9\,10}$

6

Globales Knoten (4) : ~~vier~~ drei lokale Knoten treffen sich

-> Überlappungen in der globalen Steifigkeitsmatrix durch Addition

Skript Kapitel 4.3 hat ähnliche Aufgabe! ≙ Klausur

Letzte Vortragsübung auch wichtig!

(1)

a) $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = A_{ji} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \underbrace{A_{nm} (\underline{e}_n \otimes \underline{e}_m)} \cdot b_o \underline{e}_o$

$= A_{ji} A_{jm} \underbrace{(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m) \cdot b_o \underline{e}_o}$

$= A_{ji} A_{jm} b_m \underline{e}_i$

b) $\frac{\delta \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}^T}{\delta \underline{\underline{A}}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}^T = A_{ji} (\underline{e}_i \otimes \underbrace{\underline{e}_j) A_{mn} (\underline{e}_n} \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ji} A_{mj} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

$\frac{\partial \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}^T}{\partial \underline{\underline{A}}} = \frac{A_{ji} A_{mj}}{A_{op}} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= (A_{ji} \delta_{mo} \delta_{jp} + A_{mj} \delta_{\cancel{m}jo} \delta_{ip}) (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{pi} \delta_{mo} + A_{mo} \delta_{ip} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

c) $= (\underline{\underline{A}}^T \otimes \underline{\underline{I}}^T)^{T_{24}} + (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{A}}^T)^{T_{24}}$

d) $\underline{b} + \underline{c} (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}^T =$

$\underline{c} (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}})^{T_{24}} = \delta_{mj} \delta_{ni} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_n \otimes \underline{e}_m)$

$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}^T = A_{ij} (\underline{e}_i \otimes \underbrace{\underline{e}_j) B_{mn} (\underline{e}_n} \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ij} B_{mj} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m) = A_{op} B_{Rp} (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_R)$

$\underline{c} (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}})^{T_{24}} = c_t \underbrace{\underline{e}_t \delta_{mj} \delta_{ni} (\underline{e}_i} \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_n \otimes \underline{e}_m)$

$= c_k \delta_{mj} (\underline{e}_j \otimes \underline{e}_n \otimes \underline{e}_m)$

$\underline{b} + \underline{c} (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}^T = b_v \underline{e}_v + c_n \delta_{mj} (\underline{e}_j \otimes \underbrace{\underline{e}_n \otimes \underline{e}_m) \cdot A_{op} B_{Rp} (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_R})$

$= b_v \underline{e}_v + A_{op} B_{Rp} c_n \delta_{mj} \delta_{no} \delta_{mR} \underline{e}_j$

$= b_v \underline{e}_v + A_{np} B_{jp} c_n \underline{e}_j$

(2)

$W = \mu \varepsilon \cdot \varepsilon + \ln[(tr(\varepsilon) + 1)^2] tr(\varepsilon)$

$\varepsilon = LIN(E)$

a) $T = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$

$T = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\mu \varepsilon \cdot \varepsilon + \ln((tr(\varepsilon) + 1)^2) tr(\varepsilon))$

2

b) $\underline{\underline{T}} = \frac{1}{\underline{\underline{J}}} \underline{\underline{P}} \, \underline{\underline{F}}^T$

FEM SoSe 24

(3)

(3)

a) Zeitliche Änderung des Impulses entspricht der Summe aller wirkenden Kräfte $I' = F$

$$\int_{\Omega t} \rho(x,t)\, x''\, dv = \int_{\Omega t} \rho(x,t)\, b\, dv + \int_{\partial\Omega t} t\, da$$

b) $$\int_{\Omega 0} \rho_0(X)\, x''\, dV = \int_{\Omega 0} \rho_0(X)\, b + \nabla_X \cdot (P)\, dV$$ (ref. konf.)

$$\int_{\Omega t} \rho(x,t)\, x''\, dv = \int_{\Omega t} \rho(x,t)\, b + \nabla_x \cdot (T)\, dv$$ (moment. konf.)

c) Skript hat nur Massenerhaltung · spezifisch ohne Quellterme...

FEM SoSe 24 (4)

4

a) 1 - Aufstellen der DGL mit Rand- / Anfangsbedingungen

2 - Herleitung der schwachen Form

3 - Diskretisieren des Gebiets Ω in endliche Zahl von Elementen

4 - Ansatzfunktionen, Testfunktionen wählen, gesuchte Lösung u durch Summe Basisfunktionen approximieren

$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i \varphi_i(x)$

5 - Ansatz in schwache Form einsetzen, GS der Form $AU = F$ aufstellen   A ≙ Steifigkeitsmatrix, F ≙ Lastvektor

6 - Gleichungssystem lösen

Anforderungen an Testfunktion: Muss Randbedingungen erfüllen, alle Integrale der schwachen Formulierung müssen definiert sein.
↳ dafür müssen die Funktionen in geeigneten Sobolev-Raum liegen

b) $u'' = \frac{-n}{EA}$

$u''\delta = -\frac{n}{EA}\delta$

$\int_0^1 u''\delta\, dx = -\int_0^1 \frac{n}{EA}\delta\, dx$

$\underbrace{[u'\delta]_0^1}_{=0?} - \int_0^1 u'\delta'\, dx = \cancel{[\ldots]} = \int_0^1 u'\delta' dx = \int_0^1 \frac{n}{EA}\delta dx$

$= [-\frac{n}{EA}\delta x]_0^1$

c) Der Fehler $e = u - u_h$ steht orthogonal zu alle Testfunktionen
↳ Fehler in Richtung der Basisfunktion minimiert

d) - Konvergenz: Bei Verfeinerung des Netzes $u_h \to u$
↳ $h \to 0$

- Lösung der schwachen Formulierung u_h auf Subräume stellt eine Effiziente Lösung dar.

FEM SoSe 24

5

(5)

a) - Lagrange-Funktion $\varphi_i(x)$ hat den Wert 1 am i-ten Knoten ($x = x_i$) und 0 an allen anderen Knoten

- Grad der Polynomfunktion entspricht Zahl der Knoten des Elements − 1

- Lokale Unterstützung (Basisfunktionen sind nur in ihrem Element aktiv)

b) $\Phi_i(\eta) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq I}}^{n+1} \frac{\eta - \eta^j}{\eta^I - \eta^j}$ $\quad \eta^1 = -1 \quad \eta^2 = 0 \quad \eta^3 = 1$

$\Phi^1(\eta_1) = \frac{\eta_1 + 1}{1+1} \frac{\eta_1 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}(\eta_1 + 1)\eta_1$

$\Phi^1(\eta_2) = \frac{\eta_2 + 1}{0 + 1} \frac{\eta_2 - 1}{0 - 1} = -(\eta_2 + 1)(\eta_2 - 1)$

$\Phi^1(\eta) = -\frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 + 1)(\eta_2 + 1)(\eta_2 - 1)$

$\Phi^4(\eta) = (\eta_1 + 1)(\eta_1 - 1)(\eta_2 + 1)(\eta_2 - 1)$

c) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^4(\eta)\, d\eta_1\, d\eta_2$

$\approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u^4(\eta^i, \eta^j)\, \alpha_i \alpha_j$ $\quad$ 1-D Quadraturregel

Quadraturpunkte

$\eta^i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Gewichtungen

$\alpha_4 = 1$

FEM SoSe 24

6

a) Isoparametr. Konzept

notwendig, weil die Reale Struktur oft gekrümmte Geometrie ~~[illegible]~~ aufweist, die sich mit der Grundgeometrie eines Elements (Linie / Dreieck / Viereck) nicht ausreichend approximieren lässt. Umsetzung: Approximation eines Elements mittels der gleichen Ansatzfunktion, die auch für die Lösung / Testfunktion benutzt wird.

b)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\eta_2-1), & \frac{1}{4}(\eta_2-1), & \frac{1}{4}(\eta_2+1), & \frac{1}{4}(\eta_2+1) \\ \frac{1}{4}(\eta_1-1), & \frac{1}{4}(\eta_1+1), & \frac{1}{4}(\eta_1-1), & \frac{1}{4}(\eta_1+1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3a & 0 \\ \frac{3}{2}a & 4b \\ \frac{9}{2}a & 4b \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{3a}{4}(\eta_2-1) + \frac{3a}{8}(\eta_2+1) + \frac{9a}{8}(\eta_2+1), & b(\eta_1+1)+b(\eta_2+1) \\ \frac{3a}{4}(\eta_1+1) + \frac{3a}{8}(\eta_1-1) + \frac{9a}{8}(\eta_1+1), & b(\eta_1-1)+b(\eta_1+1) \end{pmatrix}$$

bei $\eta = 0$:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{3a}{4} + \frac{3a}{8} + \frac{9a}{8} & b+b \\ \frac{3a}{4} - \frac{3a}{8} + \frac{9a}{8} & -b+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a & 2b \\ \frac{3}{2}a & 0 \end{pmatrix}$$

Robert-Florin-Straße 1 · 46238 Bottrop
Telefon 0 20 41/74 64-0 · Telefax 0 20 41/74 64-99
info@beckelmann.de · www.beckelmann.de

FEM SoSe 24

7

a) $\underline{\underline{k}}^e = \int_E \varepsilon(\underline{v}) \cdot \mathbb{C} \cdot \varepsilon(\underline{u}) \, dV$ (schwache Form)

$= \int_E \sum_i \sum_j \underbrace{(\underline{\underline{B}}^I)^T \cdot [\mathbb{C}]^V \cdot \underline{\underline{B}}^J}_{(\underline{k}^e)^{IJ} \Leftrightarrow 2\times 2} \, dV$ (starke Form)

$$[\mathbb{C}]^V = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $(k^e)^{1,1}$ bei $(\eta = 0 \quad \omega = 4)$ auswerten mit $\underline{\underline{B}}^I = \begin{pmatrix} \phi^I_{,1} & 0 \\ 0 & \phi^I_{,2} \\ \phi^I_{,2} & \phi^I_{,1} \end{pmatrix}$

$$= (\underline{\underline{B}}^1)^T \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B^1$$

$k^1 = [\;\ldots\;] \quad k^2 = [\;\ldots\;] \quad k^3 = [\;\ldots\;]$

Alles überlagern in k^e ... Aber geht das auch eleganter?
oder stimmt das überhaupt? In der b) kennen wir ~~den~~ die Abbildung
Ja noch garnicht... → Lösen mit Formel

~~Ku~~

Robert-Florin-Straße 1 · 46238 Bottrop
Telefon 0 20 41/74 64-0 · Telefax 0 20 41/74 64-99
info@beckelmann.de · www.beckelmann.de

~~Lösungsskizze~~

FEM WiSe 23-24

(1)

a) $\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}}^T = A_{ji} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) \cdot B_{mk} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)$

$= \cancel{A_{ij} B_{ji}}$

$= A_{ji} B_{ji}$ ✓

b) $\dfrac{\partial \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}}^T}{\partial \underline{\underline{B}}} \Rightarrow A^T B^T = A_{ji} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) B_{mk} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ji} B_{mj} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

$\dfrac{\partial A^T B^T}{\partial B} = \dfrac{\partial A_{ji} B_{mj}}{\partial B_{op}} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{ji} \delta_{mo} \delta_{jp} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{pi} \delta_{mo} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

c) $= (\underline{\underline{A}}^T \otimes \underline{\underline{I}}^T)^{\overset{24}{T}}$ (vlt. auch $((A \otimes I)^{\overset{13}{T}})^{-1}$

d) $\underline{b} + \underline{\underline{C}} \cdot (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}})^{\overset{14}{T}} \cdot A B^T$

$(\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}})^{\overset{14}{T}} = \delta_{ij} \delta_{mk} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_i)$

$A B^T = A_{ij} B_{mj} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

~~$(I \otimes I)^{\overset{14}{T}} \cdot A B^T = \delta_{ij} \delta_{mk} \ldots A_{ij} B_{mj} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_j) \otimes \ldots$~~

~~$= A_{ij} B_{kj} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_i)$~~

~~$\underline{\underline{C}} \cdot (I \otimes I)^{\overset{14}{T}} \cdot AB^T =$~~

$\underline{\underline{C}} \cdot (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}})^{\overset{14}{T}} = C_{op} (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p) \cdot \delta_{ij} \delta_{mk} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_i)$

$= C_{mi} (\underline{e}_m \otimes \underline{e}_i)$

$\underline{\underline{C}} \cdot (I \otimes I)^{\overset{14}{T}} \cdot AB^T = C_{mi} (\underline{e}_m \otimes \underline{e}_i) \cdot A_{xr} B_{zr} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z)$

$= C_{xz} A_{xr} B_{zr}$

$\underline{b} + \underline{\underline{C}} \cdot (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}})^{\overset{14}{T}} \cdot AB^T = b_i \underline{e}_i + C_{km} A_{kr} B_{mr}$

(vlt. auch $b_i \underline{e}_i + C_{jk} A_{jr} B_{kr}$)

(2)

a) Für kleine Verschiebungen gilt $\underline{\underline{F}} \approx \underline{\underline{I}} + \text{grad}(\underline{u})$

~~F beschreibt, wie sich ein infinitesimales Materialelement unter einer Deformation verändert, enthält Informationen über Streckung, Rotation und Scherung~~

$\underline{\underline{F}}$ bildet ~~ein~~ Linieninkrement in Referenzkonfiguration $d\underline{X}$ auf das zugehörige Element $d\underline{x}$ in Momentankonfiguration ab

②

21

a) F ist nicht invariant gegenüber Koordinatentransformation

→ Nutzung vom rechten Cauchy-Green-Tensor und

Green-Lagrange-Verzerrungstensor, welche unabhängig

von der Wahl des Koordinatensystems sind.

b) $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$

Für kleine Deformationen : $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \text{grad}(\underline{u})$

$\underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{I}} + \text{grad}(\underline{u}))^T (\underline{\underline{I}} + \text{grad}(\underline{u}))$

$\approx \underbrace{I + I\,\text{grad}(u) + \text{grad}(u)^T I}_{= I + 2 \cdot \varepsilon} + \underbrace{\text{grad}(u)^T \text{grad}(u)}_{\text{vernachlässigen}}$

~~Green-Lagrange-Verzerrung~~

c) $k(u) = J C$

Linearisierung → Terme höherer Ordnung vernachlässigen

$k(u) = J(I + 2\varepsilon)$

$= J(\underline{\underline{I}} + \text{grad}(\underline{u}) + \text{grad}^T(\underline{u}))$

mit $C = F^T F$ und $J = \det(F)$: $\frac{\partial J}{\partial F} = J F^{-1}$

$k(u) = \det(F) F^T F$ — Für kleine ∇u: $\det(I + \nabla u) \approx 1 + \text{tr}(\nabla u)$

$= \det(I + \nabla u)(I + 2\varepsilon)$

$\approx (1 + \text{tr}(\nabla u))(I + 2\varepsilon)$

$\text{LIN}(k(u)) = I + 2\varepsilon + \text{tr}(\nabla u) I + 2\,\text{tr}(\nabla u)\,\varepsilon$ (vlt. auch anders, komische Aufgabe)

③ $\overline{X}_1 = 1 - 2\overline{X}_1 + 4\overline{X}_2$

$\overline{X}_2 = 5 + 4\overline{X}_1 - 5\overline{X}_2$

$\overline{X}_3 = 2\overline{X}_3 + \overline{X}_1$

a) $C = F^T F$; $b = F F^T$

C bildet das Quadrat eines Linienelements in Referenz- auf

Momentankonfiguration ab. - Inverse b tut dies zwischen Momentan-

und Referenzkonfiguration

③

b) F ablesen: $F = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

$$C = F^T F = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -28 & 2 \\ -28 & 41 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} ✓$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\text{grad}(\underline{u}) + \text{grad}^T(\underline{u})) ✓$$

$$\text{grad}(\underline{u}) = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ✓$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 8 & 1 \\ 8 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ✓$$

④ $\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_T} \Phi \, dv$ mit $Y(t) = \int_{\Omega_T} \Phi \, dv$

a) gesucht: Materielle Zeitableitung $Y'(t)$ [nach Brodi Skript 2.36]

$$Y'(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_T} \Phi \, dv = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} J \Phi \, dV$$

$$= \int_{\Omega_0} J \frac{D\Phi}{Dt} + \frac{DJ}{Dt} \Phi \, dV$$

$$\frac{DJ}{Dt} = \frac{\partial J}{\partial F} \cdot \frac{DF}{Dt} \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial F} = J F^{-T}$$

$$= \int_{\Omega_0} J \frac{D\Phi}{Dt} + J F^{-T} \frac{DF}{Dt} \Phi \, dV$$

$$= \int_{\Omega_0} J (\Phi' + \Phi \, \nabla_x \cdot (x')) \, dV$$

$$= \int_{\Omega_t} \Phi' + \Phi \, \nabla_x \cdot (x') \, dv \quad ✓$$

c) zeitliche Änderung der Impulses I entspricht der Summe aller wirkenden Kräfte $I' = F$

b) $\rho(x,t)\,x'$, also $\int_{\Omega_t} \rho(x,t)\, x' \, dv = \int_{\Omega_0} \rho_0(X)\, x' \, dV$

d) $\int_{\Omega_0} \rho_0(X)\, x'' \, dV = \int_{\Omega_0} \rho_0(X)\, b + \nabla_X \cdot (P) \, dV$ (Ref. konfig)

$\int_{\Omega_t} \rho(x,t)\, x'' \, dv = \int_{\Omega_t} \rho(x,t)\, b + \nabla_x \cdot (T) \, dv$ (Mom. konfig)

a) 1 - Aufstellen der DGL mit Rand- / Anfangsbedingungen (starke Form)

2 - Herleitung der schwachen Form

3 - Diskretisierung des Gebietes Ω in eine endliche Zahl von Elementen

4 - Ansatzfunktionen, Testfunktionen wählen, gesuchte Lösung u durch Summe der Basisfunktionen approximieren

$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x)$

5 - Ansatz in schwache Form einsetzen - GS der Form $AU = F$ aufstellen

6 - GS lösen.

Anforderung an Testfunktion:

- Randbedingungen erfüllen ← vermutlich das wichtigste
- Alle Integrale der schwachen Formulierung müssen definiert sein
  ↳ Dafür muss die Funktion in geeigneten Sobolev-Raum liegen

b) $EAu'' = -\frac{n}{EA}$

→ Galerkin-Orthogonalität

Der Fehler $e = u - u^h$ steht orthogonal zu allen Testfunktionen

a-Priori-Fehlerabschätzung (Lösung der schwachen Formulierung V_h auf Subräumen stellt eine effiziente Lösung dar)

$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch^p \|u\|_{H^{p+1}}$ (vlt. auch einfach $\|u - u_h\| \leq Ch^p$)

↳ $\|u - u_h\| \hat{=}$ Fehler zwischen exakter (u) und FEM Lösung u_h

↳ $C \hat{=}$ Konstante

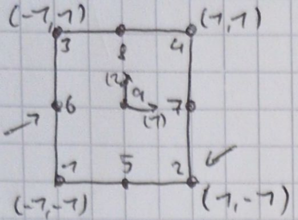
↳ $h \hat{=}$ Größe Finite-Elemente-Netz

↳ $p \hat{=}$ Ordnung Ansatzfunktionen

FEM WiSe 23-24

6

b)



$\eta^1 = -1 \quad \eta^2 = 0 \quad \eta^3 = 1$

$$\Phi^I(\eta) = \prod_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{n+1} \frac{\eta - \eta^J}{\eta^I - \eta^J}$$

$$\Phi^2(\eta_1) = \frac{\eta_1 + 1}{1+1} \cdot \frac{\eta_1 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 + 1)$$

$$\Phi^2(\eta_2) = \frac{\eta_2 - 0}{-1-0} \cdot \frac{\eta_2 - 1}{-1-1} = +\frac{1}{2}\eta_2(\eta_2 - 1)$$

$$\Phi^2(\eta) = \frac{1}{4}\eta_1(\eta_1+1)\eta_2(\eta_2-1) \quad ✓$$

$$\Phi^6(\eta_1) = \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1 - 1)$$

$$\Phi^6(\eta_2) = \frac{\eta_2+1}{0+1} \cdot \frac{\eta_2 - 1}{0-1} = -(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

$$\Phi^6(\eta) = -\frac{1}{2}\eta_1(\eta_1-1)(\eta_2+1)(\eta_2-1) \quad ✓$$

a) - Kontinuität (oder "Konformität"?)

- Interpolationseigenschaft

↳ Knotenpunkte Element = 1, alle anderen = 0 $\quad \Phi^I(\eta^J) = \begin{cases} 1 & I = J \\ 0 & I \neq J \end{cases}$

- Differenzierbarkeit

(7)

a) Siehe andere Altklausur

b) ges: Jacobi-Matrix J der Transformation zw. isoparametrischen und physikalischen Raum. $\eta = 0$

$$\underline{X} = (0, 0, \tfrac{1}{2}6a, 0, \tfrac{3}{2}a, 4b, \tfrac{9}{2}a, 4b)^T$$ sonst dim Fehler?

$$\underline{X}^h(\eta) = \sum_{I=1}^{n_n} \underline{X}^I \Phi^I(\eta)$$

$$\frac{\partial \underline{X}^h}{\partial \eta_1} = \sum_{I=1}^{n_n} \underline{X}^I \frac{\partial \Phi^I(\eta)}{\partial \eta_1}$$

$$\frac{\partial \underline{X}}{\partial \eta_1} = \begin{pmatrix} \Phi^1_{,1} & 0 & \Phi^2_{,1} & 0 & \Phi^3_{,1} & 0 & \Phi^4_{,1} & 0 \\ 0 & \Phi^1_{,1} & 0 & \Phi^2_{,1} & 0 & \Phi^3_{,1} & 0 & \Phi^4_{,1} \end{pmatrix} \cdot \underline{X}$$

$$= \begin{pmatrix} \tfrac{1}{4}(\eta_2-1) & 0 & -\tfrac{1}{4}(\eta_2-1) & 0 & -\tfrac{1}{4}(\eta_2+1) & 0 & \tfrac{1}{4}(\eta_2+1) & 0 \\ 0 & \tfrac{1}{4}(\eta_2-1) & 0 & -\tfrac{1}{4}(\eta_2-1) & 0 & -\tfrac{1}{4}(\eta_2+1) & 0 & \tfrac{1}{4}(\eta_2+1) \end{pmatrix} \underline{X}$$

$$= \begin{pmatrix} -\tfrac{6}{8}a(\eta_2-1) - \tfrac{3}{8}a(\eta_2+1) + \tfrac{9}{8}a(\eta_2+1) \\ -6(\eta_2+1) + 6(\eta_2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2\, a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \underline{X}}{\partial \eta_2} = \begin{pmatrix} \Phi^1_{,2} & 0 & \Phi^2_{,2} & 0 & \Phi^3_{,2} & 0 & \Phi^4_{,2} & 0 \\ 0 & \Phi^1_{,2} & 0 & \Phi^2_{,2} & 0 & \Phi^3_{,2} & 0 & \Phi^4_{,2} \end{pmatrix} \ldots\ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4\, a \\ 2b \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow J = \begin{pmatrix} 3/2\, a & 3/4\, a \\ 0 & 2b \end{pmatrix} \quad ; \quad \det(J) = 0$$

(8)

a)
$$k^e = \begin{pmatrix} (k^e)^{1,1} & (k^e)^{1,2} & \cdots & (k^e)^{1,n_n} \\ (k^e)^{2,1} & (k^e)^{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ (k^e)^{n_n,1} & \cdots & & (k^e)^{n_n,n_n} \end{pmatrix}$$

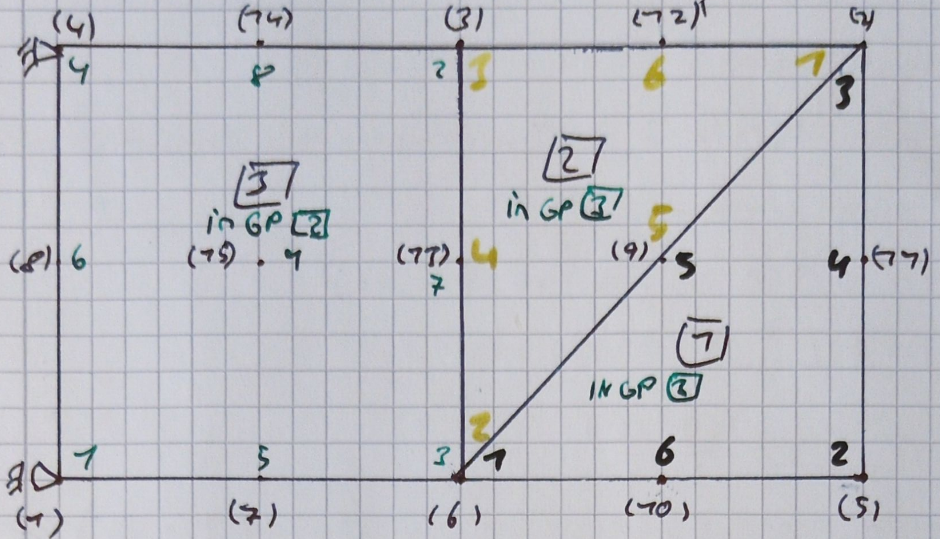
$$(k^e)^{I,J} = \int_{\Gamma e} (\underline{B}^I)^T \cdot [\underline{C}]^v \cdot \underline{B}^J \, dV$$

$$\text{mit } B^I = \begin{pmatrix} \Phi^I_{,1} & 0 \\ 0 & \Phi^I_{,2} \\ \Phi^I_{,2} & \Phi^I_{,1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi^I_{,i} = \frac{\partial \Phi^I}{\partial x_i}$$

$$[\mathbb{C}]^v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$ gegeben in Aufgabenstellung

$$k^e = \sum_{i=1}^{n_n} \sum_{J=1}^{n_n} \int (\underline{B}^I)^T [\underline{C}]^v \cdot \underline{B}^J \, dV$$

b) Bestimmen sie Eintrag $(k^e)^{I,J}$ mit $I=1$ $J=2$ $\eta=0$, $\omega=4$



$$\begin{array}{c} \\ \underline{\underline{k}}^1 = \end{array}
\begin{array}{cccccccccccc}
\multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{4} & \multicolumn{2}{c}{5} & \multicolumn{2}{c}{6} \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12
\end{array}$$

$$\underline{\underline{k}}^1 = \begin{bmatrix} k^1_{11} & k^1_{12} & \dots & & & & \\ & & & {}^{5\,3}k^1_{55} & {}^{6\,4}k^1_{56} & 5\,3 & \\ & & & k^1_{65} & k^1_{66} & 6\,4 & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\multicolumn{2}{c}{1} & \multicolumn{2}{c}{2} & \multicolumn{2}{c}{3} & \multicolumn{2}{c}{4} & \multicolumn{2}{c}{5} & \multicolumn{2}{c}{6} \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12
\end{array}$$

$$\underline{\underline{k}}^2 = \begin{bmatrix} k^2_{11} & k^2_{12} & & \\ k^2_{21} & k^2_{22} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18
\end{array}$$

$$\underline{\underline{k}}^3 = \begin{bmatrix} k^3_{11} & k^3_{12} & & \\ k^3_{21} & k^3_{22} & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} J \rightarrow 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array}$$

$$I\downarrow \quad k^e = \begin{bmatrix} k^3_{11} & k^3_{12} & k^1_{15} & k^1_{16} & \\ k^3_{21} & k^3_{22} & k^1_{25} & k^1_{26} & \\ & & k^2_{11}+k^1_{55} & k^2_{12}+k^1_{56} & \\ & & k^2_{21}+k^1_{65} & k^2_{22}+k^1_{66} & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array}$$

c) Einträge bestimmen

Bsp $K_{17,3}$

$= k^3_{9,1} + k^1_{9,5}$

	global	lokal
Knoten 9,2	5 1	5 3
Indice 17,3	9 1	9 5

$k_{1,19} = 0$, da nicht im selben Element

1 10		
1,19		

$k_{11,11} = k^1_{11} + k^2_{44} + k^3_{66}$

$k_{11,11}$	1	2	3
6 6	11	22	33
11,11	22	44	66

SoSe
FEM ~~[illegible]~~ 23

7

1

a) $\underline{\underline{A}}^T \underline{b} = A_{ji} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_i)\, b_k\, \underline{e}_k$

$= A_{ji}\, b_i$

b) $\dfrac{\partial \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}}^T}{\partial \underline{\underline{B}}} = \dfrac{\partial A_{ji} A_{mj}}{\partial B_{op}} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$A_{ij} B_{km}$
~~[illegible]~~
$A_{ji} A_{mk} \delta_{jk} \; (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

$= 0$?

Gabi Fragen ob er mir da zustimmt...
Vermutlich eigentlich $\underline{\underline{B}}$ oben oder $\underline{\underline{A}}$ unten

c) ϟ

d) $(\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}} = \delta_{ij} \delta_{km} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_m) \cdot A_{op} B_{pR} (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_R)$

$= A_{op} B_{pR} \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ko} \delta_{mR} \; (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$

$= A_{Rp} B_{pR} \delta_{ij} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$

2 Deformationsgradient $\underline{\underline{F}}$ bildet ein Linienelement in Referenzkonfiguration

a) $d\underline{X}$ auf ~~[illegible]~~ das zugehörige Element in der Momentankonfiguration $d\underline{x}$ ab.

$\underline{\underline{F}}\, d\underline{X} = d\underline{x}$; $\underline{\underline{F}} = \dfrac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \approx \underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})$

F ist nicht invariant gegenüber Koordinatentransformation

↳ Nutzung von Cauchy-Green und Green-Lagrange Tensoren, welche unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind.

b) $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$

$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$

$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$ wie E vereinfachen - Gabi fragen

↳ irgendwas mit C vermutlich

FEM SoSe 23

2

(3)

$x_1 = 1 - 2X_1 + 4X_2$

$x_2 = 5 + 4X_1 - 5X_2$

$x_3 = 2X_3 + X_1$

a)

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = F^T F = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & -28 & 2 \\ -28 & 41 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = F F^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & -28 & -2 \\ -28 & 41 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

b wird benötigt um von der Momentanen in die Referenzkonfiguration abzubilden

b)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\mathrm{grad}(u) + \mathrm{grad}^T(u)\right)$$

$$\mathrm{grad}(u) = F - \underline{I}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 8 & 1 \\ 8 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

FEM SoSe 23

[3]

(4)

a) Φ skalare Transportgröße ρ Dichte Ω_0 Referenzkonfiguration

Ω_t Momentankonfiguration eines Gebietes

Materielle Zeitableitung $\frac{D}{Dt}\int_{\Omega t} \rho \Phi dv = Y'$

$$\rho \frac{D}{Dt}\int_{\Omega t} \Phi dv = \rho \frac{D}{Dt}\int_{\Omega 0} J \Phi dV$$

$$= \rho \int_{\Omega 0} J \frac{D\Phi}{Dt} + \frac{DJ}{Dt} \Phi dV$$

$$Y' = \rho \int_{\Omega 0} J(\Phi' + \Phi \nabla_x \cdot (x')) dV = \rho \int_{\Omega t} \Phi' + \Phi \nabla_x \cdot (x') dv$$

b)

Impulserhaltung in Momentankonfiguration

$$\int_{\Omega t} \rho(x,t) x'' dv = \int_{\Omega t} \rho(x,t) b + \nabla_x \cdot (T) dv$$

Referenzkonfiguration

$$\int_{\Omega 0} \rho_0(X) x'' dV = \int_{\Omega 0} \rho_0 (X) b + \nabla_X \cdot (P) dV$$

c) Cauchy - Spannung T

- Wirkt auf momentane (deformierte) Konf. Ωt
- Gibt die Kraft pro Flächeneinheit in der momentanen Konf. an
- Symmetr. da keine inneren Momente existieren

Piola - Kirchhoff - Spannung $P = J T F^{-1}$

- Bezogen auf Referenzkonf.
- Gibt die Kraft in der Momentanen Konfiguration pro Flächeneinheit in der Referenzkonf. an.
- Im allgemeinen nicht symmetr.

FEM SoSe 23

4

5

a) - Aufstellen der DGL mit Rand- / Anfangsbedingungen

- Herleitung der schwachen Form

- Diskretisierung des Gebiets Ω in endliche Zahl von Elementen

- Ansatzfunktion / Testfunktion wählen, gesuchte u durch Summe der Basisfunktionen approximieren $u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \, l_i(x)$

- Ansatz in schwache Form einsetzen, GS der Form $AU = F$ aufstellen (A: Steifigkeitsmatrix, F: Lastvektor)

- GS lösen

Anforderung an Testfunktion: Muss Randbedingungen erfüllen, alle Integrale der schwachen Formulierung müssen definiert sein -> dafür müssen die Funktionen in geeigneten Sobolev-Raum liegen

$u'' = -\frac{n}{EA}$

b) Der Fehler $e = u - u_h$ steht orthogonal zu allen Testfunktionen

↳ Fehler in Richtung der Basisfunktionen minimiert

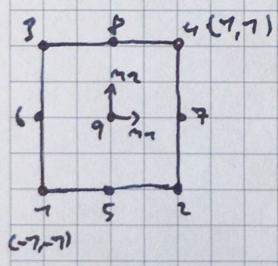
Konvergenz: Bei Verfeinerung des Netzes $(h \to 0)$ geht $u_h \to u$

a-Priori-Fehlerabschätzung: $\|u - u_h\| \leq C h^k$

6

a) - Kontinuität, Interpolationseigenschaften (Knotenpunkte Element = 1, alle anderen = 0 $\Phi^I(\eta^J) = \begin{cases} 1 & I = J \\ 0 & I \neq J \end{cases}$), Differenzierbarkeit

b)



$$\Phi^I(\eta) = \prod_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{k+1} \frac{\eta - \eta^J}{\eta^I - \eta^J}$$

$k = 2 \to k+1 = 3$ $\quad \eta^1 = -1 \quad \eta^2 = 0 \quad \eta^3 = 1$

FEM SoSe 23 $\boxed{5}$

6 b)

$$\Phi^6_{1D}(\eta_1) = \frac{\eta_2+1}{0+1}\cdot\frac{\eta_2-1}{0-1} = -(\eta_2-1)(\eta_2+1)$$

$$\Phi^2_{1D}(\eta_1) = \frac{\eta_1+1}{+1+1}\cdot\frac{\eta_1 \cancel{a} -0}{1-0} = \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1+1)$$

$$\Phi^2_{1D}(\eta_2) = \frac{\eta_2-0}{-1-0}\cdot\frac{\eta_2-1}{-1-1} = +\frac{1}{2}\eta_2(\eta_2-1)$$

$$\phi^2(\eta) = \frac{1}{4}\eta_1(\eta_1+1)\eta_2(\eta_2-1)$$

$$\phi^6(\eta) = -\frac{1}{2}\eta_1(\eta_1-1)(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

$$\phi^9(\eta) = (\eta_1+1)(\eta_1-1)(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

c)

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} v^h(\eta)\,d\eta_1\,d\eta_2 \approx \sum_{i=1}^{n_q}\sum_{j=1}^{n_q} v^h(\eta_k)\,\alpha_k$$

$\eta_k \hat{=} (\eta_i, \eta_j)$ $\alpha_k \hat{=} (\alpha_i, \alpha_j)$

7 a) Isoparametr. Konzept notwendig, weil die realen Struktur oft gekrümmte Geometrie aufweist, die sich mit der Grundgeometrie eines Elements (Linie / Dreieck / Viereck) nicht ausreichend approximieren lässt.

Umsetzung: Approximation eines Elements mittels der gleichen Ansatz-funktion, die auch für die Lösung / Testfunktion benutzt wird.

b)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\eta_2-1) & -\frac{1}{4}(\eta_2-1) & -\frac{1}{4}(\eta_2+1) & \frac{1}{4}(\eta_2+1) \\ \frac{1}{4}(\eta_1-1) & -\frac{1}{4}(\eta_1+1) & -\frac{1}{4}(\eta_1-1) & \frac{1}{4}(\eta_1+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3a & 0 \\ \frac{3}{2}a & 16 \\ \frac{9}{2}a & 16 \end{pmatrix}$$

~~[illegible]~~

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}a(\eta_2-1) - \frac{3}{8}a(\eta_2+1) + \frac{9}{8}a(\eta_2+1) & -6(\eta_2+1)+6(\eta_2+1) \\ -\frac{3}{4}a(\eta_1+1) - \frac{3}{8}a(\eta_1-1) + \frac{9}{8}a(\eta_1+1) & -6(\eta_1-1)+6(\eta_1+1) \end{pmatrix}$$

bei $\eta = 0$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a - \frac{3}{8}a + \frac{9}{8}a & 0 \\ -\frac{3}{4}a + \frac{3}{8}a + \frac{9}{8}a & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a & 0 \\ \frac{3}{4}a & 26 \end{pmatrix}$$

c) $\text{Volumen}_t = 1{,}5 \cdot \text{Volumen}_0$ Gabi fragen ob er zustimmen würde...

FEM WS 22-23

1

1

a) $\underline{\underline{A}}^T \underline{b} = A_{ji} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\, b_k\, \underline{e}_k$

$= A_{ji}\, b_k\, \delta_{jk}\, \underline{e}_i$

$= A_{ji}\, b_j\, \underline{e}_i$

b) $\dfrac{\partial \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}}}{\partial \underline{\underline{A}}} = \dots$

$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}} = A_{ji} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)\, B_{km} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)$

$= A_{ji}\, B_{km}\, \delta_{jk}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$ NR

$= A_{ji}\, B_{jm}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m)$

$\dfrac{\partial \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}}}{\partial \underline{\underline{A}}} = \dfrac{\partial A_{ji} B_{jm}}{\partial A_{op}} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= B_{jm}\, \delta_{jo}\, \delta_{ip}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= B_{om}\, \delta_{ip}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= (\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{B}})^{T_{24}}$

c) $(\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{B}})^{T_{24}} = \delta_{ij}\, B_{km}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_j)$

$= B_{km}\, \delta_{ij}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_j)$ ✓

d) $(\underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{A}} = \cancel{\delta_{ij}\, \delta_{km}\, A_{op}\, (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)}$ obwohl kein Vektorprod. ?

$= \delta_{ij}\, \delta_{km}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_m)\, A_{op}\, (\underline{e}_o \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{op}\, \delta_{ij}\, \delta_{km}\, \delta_{mo}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_p)$

$= A_{kp}\, \delta_{ij}\, (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_p)$

$= \underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{I}}$ ↯ eig $tr(\underline{\underline{A}}) \cdot \underline{\underline{I}}$, aber weiß noch nicht warum...

2 $S = 2\mu \underline{\underline{E}} + \lambda\, tr(\underline{\underline{E}}) \cdot \underline{\underline{I}}$

a) $E = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$; $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}$; $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \mathrm{Grad}(\underline{u})$

b) $\mathrm{Lin}(E) = E|_{u=0} + D_u E$

FEM WS 22-23

2

2

b) $LIN(\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{E}}|_{u=0} + D_u \underline{\underline{E}}$

$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$

Für kleine Verschiebungen: $\underline{\underline{F}} \approx \underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})$

$E \approx \frac{1}{2}((\underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u}))^T (\underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})) - \underline{\underline{I}})$ $\quad (\underline{\underline{I}}^T = \underline{\underline{I}})$

~~Höhere Ordnungen vernachlässigen~~

$(\underline{\underline{I}}^T \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}})$

$E \approx \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}}^T \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{I}}^T \mathrm{grad}(\underline{u}) + \mathrm{grad}(\underline{u})^T \underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})^T \mathrm{grad}(\underline{u}) - \underline{\underline{I}})$

$\approx \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u}) + \mathrm{grad}(\underline{u})^T + \underbrace{\mathrm{grad}(\underline{u})^T \mathrm{grad}(\underline{u})}_{\text{Höhere Ordnung der Verzerrung (quadratisch)}} - \underline{\underline{I}})$

Linearisierung: wenn die Verzerrungen klein sind, dann sind die Terme höherer Ordnung gegenüber den linearen vernachlässigbar

$E = \frac{1}{2}(\mathrm{grad}(\underline{u}) + \mathrm{grad}(\underline{u})^T) = \varepsilon$

c) $\underline{\underline{\sigma}} = LIN(\underline{\underline{S}})$ mit $LIN(tr(\underline{\underline{E}}) \cdot \underline{\underline{I}}) = \mathrm{div}(\underline{u})$

Anwendung der Linearisierung aus b)

$\sigma = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda\, \mathrm{div}(\underline{u})$

3 a) Der Deformationsgradient bildet ein Linienelement in Referenzkonfiguration $d\underline{X}$ auf das zugehörige Element in der Momentankonfiguration $d\underline{x}$ ab.

$F\, d\underline{X} = d\underline{x} \Rightarrow F = \frac{\partial x}{\partial \underline{X}} \approx \underline{\underline{I}} + \mathrm{grad}(\underline{u})$

b) F enthält Informationen über Dehnung und Verzerrung, und Rotation und Starrkörperbewegung → kein geeignetes Maß für die tatsächliche Deformation (wäre bei reiner Rotation z.B. trotzdem nicht die Einheitsmatrix)

FEM WS 22-23

3|

③

b) Für reine Verzerrung (keine Rotationsanteile) Cauchy-Green Tensor C oder Green-Lagrange-Verzerrungstensor verwenden

c) $C = F^T F$ eliminiert Rotation, misst Änderung der Länge, aber nicht Scherung

$E = \frac{1}{2}(C - I)$ misst Dehnung und Scherung unabhängig von Starrkörperbewegung

$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{grad}(u) + \text{grad}^T(u))$

d)

$$F = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad F^T = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 41 & -28 & 0 \\ -28 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{grad}(u) + \text{grad}^T(u))$$

$$\text{grad}(u) = F - I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{7}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④ $\frac{D}{Dt}\int_{\Omega_t} \Phi \, dv$ mit $Y(t) = \int_{\Omega_t} \Phi \, dv$

a) Materielle Zeitableitung Y' (Brodi Skript Seite 29 / 2.36)

$$Y' = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega_t} \Phi \, dv = \frac{D}{Dt}\int_{\Omega_0} J \Phi \, dV \qquad J = \det(F)$$

$$= \int_{\Omega_0} J \frac{D\Phi}{Dt} + \frac{DJ}{Dt}\Phi \, dV$$

$$\Rightarrow \frac{DJ}{Dt} = \frac{\partial J}{\partial F} \cdot \frac{DF}{Dt} \quad ; \quad \frac{\partial J}{\partial F} = J F^{-T}$$

~~steht so im Skript, vlt -1 -T ?~~

Definition des Geschwindigkeitsgradienten / dessen Spur

$L = \nabla_x(X') = F' F^{-1} \quad tr(L) F'_{ik} F^{-1}_{ki} = x'_{i,i}$

FEM WS 22-23

(4)

a) Einsetzen der vorherigen Gleichungen liefert:

$$\frac{DJ}{Dt} = J F_{ji}^{-T} F'_{km} \delta_{ik} \delta_{jm} = J F_{ji}^{-T} F'_{ij} = J x''_{i,i}$$

→ Materielle Zeitableitung von Y

$$Y' = \int_{\Omega_0} J \left(\Phi' + \Phi \nabla_x \cdot (x') \right) dV = \int_{\Omega_t} \Phi' + \Phi \nabla_x \cdot (x') \, dv$$

b) Impuls bilanz eines Kontinuums in Momentankonfiguration:

$$\int_{\Omega_t} \rho(x,t) x'' \, dv = \int_{\Omega_t} \rho(x,t) b + \nabla_x \cdot (T) \, dv$$

In Referenzkonfiguration:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 (X) x'' \, dV = \int_{\Omega_0} \rho_0 (X) b + \nabla_X \cdot (P) \, dV$$

c) Cauchy - Spannung T:

- Wirkt auf momentane (deformierte) Konfiguration Ω_t
- Gibt die Kraft pro Flächeneinheit in der aktuellen Form an
- Symmetr., da keine inneren Momente existieren ($T_{ij} = T_{ji}$)

Piola-Kirchhoff Spannung P:

- Bezogen auf Referenzkonfiguration Ω_0
- Gibt die Kraft in der momentanen Konfiguration pro Flächeneinheit in der Referenzkonfiguration an
- Im allgemeinen nicht symmetrisch

$$P = J T F^{-T}$$

~~d) schwache Form der DGL aufstellen~~

~~zum Gebiet Ω in endliche Anzahl von Elementen unterteilen (diskretisieren)~~

~~Unbekannte wird durch Summe von Basisfunktionen angenähert, also~~

~~$u(x) = \sum_i u_i \varphi_i(x)$~~

FEM WS 22-23

(5)

(5)

a) ~~Ansatzfunktionen und Testfunktionen wählen~~

1 - Aufstellen der DGL mit Rand- / Anfangsbedingungen (Starke Form)

2 - Herleitung der schwachen Form

3 - Diskretisierung des Gebietes Ω in endliche Zahl von Elementen

4 - Ansatzfunktionen Testfunktionen wählen, ~~gesuchte Lösung ... Element~~

gesuchte Lösung u durch Summe Basisfunktionen approximieren

$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i \, \varphi_i(x)$

steifigheitsmatrix Lastvektor

5 - Ansatz in schwache Form einsetzen - GS der Form $AU = F$ aufstellen

6 - Gleichungssystem lösen

Anforderungen an Testfunktion: muss Randbedingungen erfüllen

Alle Integrale der schwachen Formulierung müssen definiert sein

↳ dafür müssen die Funktionen in geeigneten Sobolev-Raum liegen.

b) Lösung erfüllt die Galerkin-Orthogonalität

Der Fehler $e = u - u_h$ steht orthogonal zu allen Testfunktionen v_h

a-priori-Fehlerabschätzung

$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C h^k \|u\|_{H^{k+1}}$

(6)

a) - Lagrangefunktion $\varphi_i(x)$ hat den Wert 1 an i-ten Knoten (bei $x = x_i$)

und 0 an allen anderen Knoten

$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ → $\varphi_i(x_j) = 1$ für $i = j$ und $\varphi_i(x_j) = 0$ für $i \neq j$

- Grad der Polynomfunktion entspricht Anzahl der Knoten des Elements minus 1

- Lokale Unterstützung (Basisfunktionen sind nur in ihrem Element aktiv)

FEM WS 22-23

(6)

(6)

b) Lagrangsche Ansatzfunktion :

$$\Phi^I(\eta) = \prod_{\substack{J=1 \\ J\neq I}}^{k+1} \frac{\eta-\eta^J}{\eta^I-\eta^J}$$

$I \hat{=}$ Knotennr. $k \hat{=}$ Ordnung der Ansatzfkt.

$\eta \hat{=}$ Positionen des Knoten im Element

Viereckelement zweiter Ordnung $\rightarrow k=2$, $k+1=3$

$\eta^1 = -1 \quad \eta^2 = 0 \quad \eta^3 = 1$ (Abgelesen aus Skript 3.31)

$$\phi^1(\eta_1) = \prod_{\substack{J=1 \\ J\neq I}}^{3} \frac{\eta_1-\eta^J}{\eta^I-\eta^J} = \frac{\eta_1-\eta^2}{\eta^1-\eta^2}\cdot\frac{\eta_1-\eta^3}{\eta^1-\eta^3}$$

$$= \frac{\eta-0}{-1-0}\cdot\frac{\eta-1}{-1-1}$$

$$= \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1-1)$$

$$\phi^1(\eta_2) = \frac{\eta_2-\eta^2}{\eta^1-\eta^2}\cdot\frac{\eta_2-\eta^3}{\eta^1-\eta^3} = \frac{1}{2}\eta_2(\eta_2-1)$$

$$\phi^1(\eta) = \frac{1}{4}\eta_1(\eta_1-1)\eta_2(\eta_2-1)$$

$$\phi^6(\eta_1) = \frac{1}{2}\eta_1(\eta_1-1)$$

$$\phi^6(\eta_2) = \frac{\eta_2-\eta^1}{\eta^2-\eta^1}\cdot\frac{\eta_2-\eta^3}{\eta^2-\eta^3}$$

$$= \frac{\eta_2+1}{+1}\cdot\frac{\eta_2-1}{-1}$$

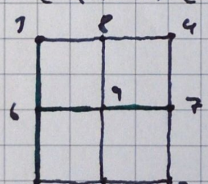
$$= -(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

$$\phi^6(\eta) = -\frac{1}{2}\eta_1(\eta_1-1)(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

$$\phi^9(\eta_1) = -(\eta_1+1)(\eta_1-1)$$

$$\phi^9(\eta_2) = -(\eta_2+1)(\eta_2-1)$$

$$\phi^9(\eta) = (\eta_1-1)(\eta_1+1)(\eta_2-1)(\eta_2+1)$$



vert. und hor. seperat, dann Multiplizieren!

FEM WS 22-23

6

c) Knoten 1 : $\phi_1(x) = \frac{1}{4}(x_1(x_1-1)x_2(x_2-1))$

$$u^h(x_k) = \sum_{i=1}^{n_k} \hat{u}_i^I \, \Phi_i(x_k$$

$$\frac{\partial u^h}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{1} \hat{u}_i^I \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}$$

hier : $x_k = (x_1, x_2) = (-1, -1)$

$\Phi_1(-1,-1) = 1$ (alle anderen Ansatzfunktionen hier gleich 0) "Lagrange Eigenschaft" der Ansatzfunktionen

$\Phi_2(-1,-1) = 0$

$\Phi_3(-1,-1) = 0$

$\vdots$

$\rightarrow u^h(-1,-1) = \hat{u}_1^I$

$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(-1,-1)$ hat bestimmten Wert

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}_{i \neq 1} \approx 0$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{4}(2x_1-1)(x_2-1)x_2$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(-1,-1) = \frac{1}{4}(2\cdot(-1)-1)(-1-1)(-1) = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial u^h}{\partial x_1}(-1,-1) = -\frac{3}{2}\hat{u}_1^I + \sum_{i=2}^{4} \hat{u}_i^I \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}(-1,-1)$$
$$\approx -\frac{3}{2}\hat{u}_1^I$$

Keine Lösung zum Vergleichen bei dieser Aufgabe... aber vielleicht stimmt meine Lösung

Robert-Florin-Straße 1 · 46238 Bottrop
Telefon 0 20 41/74 64-0 · Telefax 0 20 41/74 64-99
info@beckelmann.de · www.beckelmann.de

FEM WS 22-23

8

7

a) Isoparametrisches Konzept:

notwendig, weil reale Strukturen oft gekrümmte Geometrien aufweisen, die sich mit der Grundgeometrie eines Elements (Linie / Dreieck / Viereck) nicht zureichend approximieren lassen.

Es werden mittels einer Koordinatentransformation J die physikalischen Koordinaten eines Elements in den isoparametrischen Koordinaten η ausgedrückt. Umsetzung : Umsetzung noch nachtragen

~~als Koordinatentransformation~~

Aus Vorlesung : Approximation der Geometrie eines Elements mittels der selben Ansatzfunktion, die auch für die Lösung bzw. Testfunktion benutzt wird

- Approximation der physikalischen Komponenten eines Elements
- Definition der Jacobi-Matrix
- Bestimmung der einzelnen Matrixeinträge
- Transformation der Integration über ein Element
- Transformation von Ableitungen (z.B. Ansatzfunktionen)

Anwendung der Jacobi-Transformation

FEM gute Vorlesung von einem Inder

Weighted Integral and Weak formulations - youtube: Indian institute of technology kanpur

$-\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{du}{dx}\right] = g(x)$ for $0 < x < L$

$u(0) = u_0$ at $x=0$ Essential Boundary condition

$a\frac{du}{dx}\Big|_{x=L} = Q_0$ Natural boundary condition

($a(x)$ $q(x)$ u_0 Q_0 L ~~gegeben~~ known)

x - independent Variable

$u(x)$ - dependent Variable

~~Find~~
$(0,L)$ - domain of the Problem

Aim : Find $u(x)$

Weak Formulation

Strong Form

Step 1 : $\int_0^L \underbrace{w\left[-\frac{d}{dx} a(x)\cdot u' - q\right]dx}_{\text{Error (weighted)}} = 0$ in an weighted integral sense
" " " residual sense

step 2 : Integrate by parts to shift $\frac{d}{dx}$ operator from { } to w.

$\int_0^L \left[\frac{dw}{dx} a(x) u' - wq\right] dx - \left[w\, a(x)\, u'\right]_0^L = 0$ ← Weak Form

* Differentiability requirements on u get ~~reduced~~ reduced

* $\left[w\, a(x) u'\right]_0^L = \left[w\, a(x) u'\right]_{x=L} - \left[w\, a(x) u'\right]_{x=0}$

Step 3 : Choose $u = \sum_{j=1}^{N} U_j \phi_j(x)$ U_j - unknown constant

$\Rightarrow \int\left[\frac{dw}{dx}\left[a(x)\sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j'(x)\right] - wq\right]dx -$ ϕ_j - known shape function

$-\left[w\, a'(x)\, u'(x)\right]_0^L$

should satisfy essential bounding condition

has to be linearily independent