1 Dimensionsanalyse

$f(p_1,\dots,p_n) = 0 \iff f(\pi_1,\dots,\pi_d)$

$p_j \hat{=}$ Physikalische Größen $\quad \pi_i \hat{=}$ dimensionslose Größen

jedes Dimensionslose Produkt

$\pi = \prod_{j=1}^{n} p_j^{k_j}$ Exponenten k_j nach denen wir suchen

Dimensionsloses Produkt $[\pi] = 1 = \prod^{n} [p_j]^{k_j}$

wobei $[p_j] = \prod_{i=1}^{m} X_i^{a_{ij}}$ — Anzahl der Basisgrößen; Dimensionsexponent; i-te Basisgröße

$\to [\pi] = 1 = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} X_i^{a_{ij} k_j} - 2$

m Basisgrößen voneinander unabhängig $\forall\, i = 1,\dots,m$

~~log~~

$0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j \cancel{\log}(X_i)$, $\neq 0$

$\to$ LGS: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j = 0 \quad \forall i = 1,\dots,m$

m ist max. 7 ; n ist bis ∞ groß

Einschub LGS:

$Ax = b$

1) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad \det(A) \neq 0$ ($\to Rg(A) = n$) "bestimmtes LGS" $x = A^{-1} b$

2) $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad Rg(A) = r$ "überbestimmtes LGS" $r > n$

3) $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad Rg(A) = r$ "unterbestimmtes LGS" $r < n$

Dimensionsmatrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$n \hat{=}$ Anzahl phys. Größen

$m \hat{=}$ Anzahl Basisgrößen

Im allgemeinen gilt: $n > m$ $\qquad Rg(A) \overset{=r}{} \max. m$

\# Phys. Größen > \# Basisgrößen

$\boxed{n > r \text{, damit gültiger physikalischer Prozess beschrieben wird.}}$

LGS unterbestimmt $\quad d = n - r \quad \to d$ dimlose Produkte

1) $Ax = 0 \quad A \in \mathbb{R}^{r\times n} \quad x \in \mathbb{R}^n$

2) Aufspalten in invertierbare Teilmatrix C und Rest B

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$A = [B \mid C]\, r$

$C \in \mathbb{R}^{r\times r}$

$x = \left[\frac{y}{z}\right]$

$B \in \mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, d

$z \in \mathbb{R}^r$

$y \in \mathbb{R}^{(n-m)}$, d

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j = 0 \quad \forall i = 1,\dots,r$

$\sum_{j=1} a_{ij} k_j + \sum_{j=d+1}^{n} a_{ij} k_j = 0$

$\sum_{j=d+1}^{n} a_{ij} k_j = -\sum_{j=1}^{d} a_{ij} k_j$

$Cz = -By$

$z = -C^{-1} B y$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{1d} \\ k_{d1} & k_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

$Ax = 0$

$By + Cz = 0$

$Cz = -By$

3) C Investieren

$C^{-1} C z = -C^{-1} B y$

$\boxed{z = -C^{-1} B y}$

4) Um ~~[illegible]~~ representative Lösung zu erhalten

Für y die Einheitsmatrix

$\to$ Eine Fundamentallösung

Lösung: $\pi_1 = p_1 \, p_2 \ldots p_d \, p_{d+1}^{k_{1,d+1}} \ldots p_n^{k_{1,n}}$

$\pi_2 = p_1 \, p_2 \ldots p_d \, p_{d+1}^{k_{2,d+1}} \ldots p_n^{k_{2,n}}$

$\vdots$

$\pi_d = p_1 \, p_2 \ldots p_d \, p_{d+1}^{k_{d,d+1}} \ldots p_n^{k_{d,n}}$

$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$

~~$f(\pi_1, \pi_2, \ldots, p_n)$~~

$f(\pi_1, \ldots, \pi_d, p_{d+1}, \ldots, p_n) = 0$

Wir ändern das Einheitensystem

$p_j' = p_j \prod_{i=1}^{r} c_i^{a_{ij}} \quad \forall j = 1, \ldots, n$

$f(\pi_1, \ldots, \pi_d, p_{d+1}' \prod_{i=1}^{r} c_i^{-a_{i,d+1}}, \ldots, p_n' \prod c_i^{-a_{in}}) = 0$

$\ln(p_j') - \cancel{\ln(p_j)}^{\,p_j = 1} = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} \ln(c_i) \quad \forall j = \underbrace{d+1, \ldots, n}_{r}$

Maßstabsfaktoren c, so dass $p_j = 1$ ~~[illegible]~~ $\forall j = d+1, \ldots, n$

$\to \boxed{f(\pi_1, \ldots, \pi_d) = 0}$

Formeller Weg: $W = f(v, \eta, \rho, d)$

	W k_1	v k_2	η k_3	ρ k_4	d k_5
L	1	1	-1	-3	1
M	1	0	1	1	0
T	-2	-1	-1	0	0

$n = 5$

$r = 3$

$d = n - r = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

Inverse

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Π_1 Π_2

	W k_1	v k_2	η k_3	ρ k_4	d k_5
Π_1	1	0	-2	1	0
Π_2	0	1	-1	1	1

$\Pi_1 = \frac{W \rho}{\eta^2}$ $\qquad \Pi_2 = \frac{v \rho d}{\eta}$

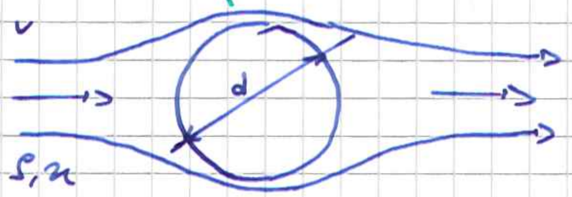
$\hookrightarrow \Pi_1' = \frac{\Pi_1}{\Pi_2^2} = \frac{W\rho}{\eta^2} \left(\frac{\eta}{v \rho d} \right)^2 = \frac{W}{\rho v^2 d^2}$ ebenfalls eine mögliche Lösung!

Im [LMT]-System gilt $F = m \cdot a$ $\quad [F] = \frac{kg\, m}{s^2} \quad [F] = MLT^{-2}$

Im [LMFT]-System gilt $F = C m \cdot a$ $\quad [F] = N \quad [F] = F$

↑ Dimensionsbehaftete Konstante, damit dimensionshomogen

Interneller Weg $\qquad C = \frac{F}{ma} \quad [C] = M^{-1} L^{-1} T^{2} F^{1}$ (1)



$W = f(v, \eta, \rho, d, C)$

$[\eta] = \frac{[\tau]}{[\frac{dv}{dr}]} = \frac{[F/A]}{T^{-1}} = FTL^{-2}$

	W	v	η	ρ	d	C
L	0	1	-2	-3	1	-1
M	0	0	0	1	0	-1
F	1	0	1	0	0	1
T	0	-1	1	0	0	2

$n = 6$

$r = 4$

$d = 2$

	W/η	v	η	ρC	d	C
L	2	1	-2	-4	1	-1
M	0	0	0	0	0	-1
F	0	0	1	1	0	1
T	-1	-1	1	2	0	2

Fehlende Spalten werden nicht mehr gebraucht, man darf sie aber noch aufschreiben

	W/(vηd)	v	ρC/η	d
L	0	1	-2	1
M	0	0	0	0
F	0	0	0	0
T	0	-1	1	0

$\Pi_1 = \frac{W}{v \eta d}$

$\Pi_2 = \frac{\rho C v d}{\eta}$

Sowohl im [LMT]- als auch im [LMFT]-System ist $d = 2$ (2)

Fall, dass C als Variable nicht mitgeführt wird:

	W	v	η	ρ	d
L	0	1	-2	-3	1
M	0	0	0	1	0
F	1	0	1	0	0
T	0	-1	1	0	0

$n = 5$

$r = 4$

$d = 1$

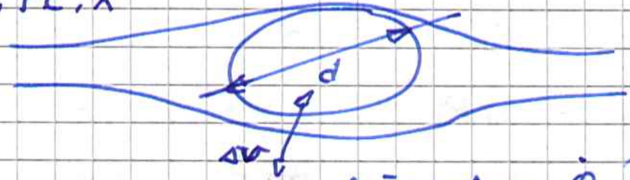
Wird C weggelassen, wird die zugrundeliegende Gesetzmäßigkeit gebrochen!

$F = C m a$

$\Pi_1 = \frac{W}{v \eta d} \stackrel{!}{=} const \rightarrow W \sim v \eta d$

Das [LMTΘ] - System

$u, \rho c, \lambda$



Wärmestrom $\dot{Q}$?

$\dot{Q} = f(\Delta\vartheta, u, \lambda, \rho c, d)$

	$\dot{Q}$	$\Delta\vartheta$	u	λ	ρc	d
L	2	0	1	1	-1	1
M	1	0	0	1	1	0
T	-3	0	-1	-3	-2	0
Θ	0	1	0	-1	-1	0

$\dot{Q} = \frac{J}{s} = \frac{kg\frac{m^2}{s^2}}{s}$

$\frac{\dot{Q}}{A} = \dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dx}$

$[\lambda] = \frac{W/m^2}{\Theta/m} = \frac{W}{mK}$ Watt

$[c] = \left[\frac{Q}{m\Theta}\right] = \frac{J}{kgK} = \frac{m^2}{s^2K}$

$n = 6 \quad r = 4$

	$\dot{Q}/\lambda$	$\Delta\vartheta$	u	λ	$\frac{\rho c}{\lambda}$	d
L	1	0	1	/	-2	1
M	0	0	0	/	0	0
T	0	0	-1	/	1	0
Θ	1	1	0	/	0	0

	$\frac{\dot{Q}}{\lambda\Delta\vartheta d}$				$\frac{\rho c u d}{\lambda}$	
L	0	/	/	/	0	/
M	0	/	/	/	0	/
T	0	/	/	/	0	/
Θ	0	/	/	/	0	/

$\Pi_1 = \frac{\dot{Q}}{\lambda\Delta\vartheta d}$

$\Pi_2 = \frac{\rho c u d}{\lambda}$

$\dot{Q} = \lambda\Delta\vartheta d \, f\left(\frac{\rho c u d}{\lambda}\right)$

$Pe = Re Pr$

Was ist Temperatur?

$k_B \vartheta = \left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle$

↳ Boltzmann-Konstante

↳ Darstellbar im [LMT] - System

$[\vartheta] = L^2 M T^{-2}$

	$\dot{Q}$	$\Delta\vartheta$	u	λ	ρc	d
L	2	2	1	-1	-3	1
M	1	1	0	0	0	0
T	-3	-2	-1	-1	0	0

$n = 6$

$r = 3$

$d = 3$

$\Pi_1 = \frac{\dot{Q}}{\lambda\Delta\vartheta d} \quad \Pi_2 = \frac{\rho c u d}{\lambda} \quad \Pi_3 = \rho c d^3$

$Q = \lambda\Delta\vartheta d \, f\left(\frac{\rho c u d}{\lambda}, \rho c d^3\right)$ Wie kann das sein? $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$

Seien P_i - physik. größe des Originals

P_j' - " " " modells

$P_j' = M_j P_j \qquad j = 1, \dots, n$

↳ Maßstabs~~größe~~ - / Skalierungsfaktor

Vollständige physikalische Ähnlichkeit zu erhalten, muss:

$\Pi_i \stackrel{!}{=} \Pi_i' \qquad i = 1, \dots, d$

nun gegeben

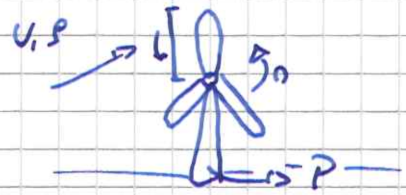
$\prod_{j=1}^{n} P_j^{k_{ij}} \stackrel{!}{=} \prod_{j=1}^{n} P_j'^{k_{ij}} = \prod_{j=1}^{n} M_j^{k_{ij}} P_j^{k_{ij}} \quad \forall i = 1, \dots, d$

$\rightarrow \boxed{\prod_{j=1}^{n} M_j^{k_{ij}} = 1 \qquad \forall\ i = 1, \dots, d}$ Bedingung für Vollständige Ähnlichkeit

Vollständige Ähnlichkeit: Alle dimensionslosen Produkte zwischen Modell und Original sind gleich.

Bsp: Leistung eines Windrads

$P = f(L, v, n, \rho)$



	P	L	v	n	ρ
L	2	1	1	0	-3
M	1	0	0	0	1
T	-3	0	-1	-1	0

$n = 5$

$r = 3$

$d = 2$

	$\frac{P}{\rho v^3 L^2}$	L	$\frac{v}{nL}$	n	ρ
L	0	1	0	0	-3
M	0	0	0	0	1
T	0	0	0	-1	0

$\frac{P}{\rho v^3 L^2} = f\left(\frac{v}{nL}\right)$

$\frac{P}{\rho v^3 L^2} = \frac{P'}{\rho' v'^3 L'^2} \qquad \frac{v}{nL} = \frac{v'}{n' L'}$

$\frac{P'}{P} = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)\left(\frac{v'}{v}\right)^3\left(\frac{L'}{L}\right)^2 \qquad \left(\frac{v'}{v}\right) = \left(\frac{n'}{n}\right)\left(\frac{L'}{L}\right)$

$\boxed{M_P = M_\rho M_v^3 M_L^2} \qquad \boxed{M_v = M_n M_L}$

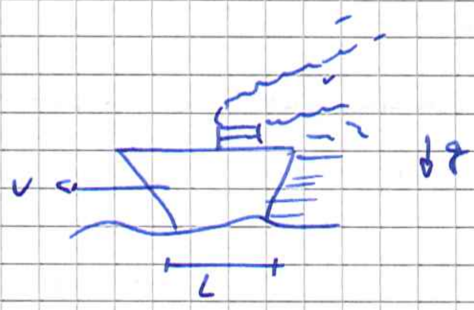
$M_\rho = 1$

$M_P = M_v^3 M_L^2 \qquad M_n = \frac{M_v}{M_L}$

Im Windkanal: $M_L = \frac{1}{100}$; $M_v = 1 \longrightarrow M_P = \frac{1}{100^2}$

$M_n = 100$

Unvollständige Ähnlichkeit : Bsp Schiff



$W = f(v, L, \eta, \rho, g)$

$n = 6, \quad r = 3, \quad d = 3$

$$\frac{W}{\rho v^2 L^2} = f\left(\frac{vL}{\eta}, \frac{v^2}{gL}\right)$$

$\downarrow$ C_W $\qquad$ $\downarrow$ Re $\qquad$ $\downarrow$ Fr

Für vollständige Ähnlichkeit müsste gelten

$Re = Re' \qquad Fr = Fr' \qquad C_W = C_W'$

$$\frac{M_v M_L}{M_\eta} = 1 \; ; \quad \frac{M_v^2}{M_g M_L} = 1 \quad ; \quad \frac{M_W}{M_\rho M_v^2 M_L^2} = 1$$

Gleiches Fluid : $M_\eta = M_\rho = 1$

$M_g = 1$

$M_v M_L = 1 \; ; \; \frac{M_v^2}{M_L} = 1 \; ;$

$\hookrightarrow M_v = M_L \overset{!}{=} 1$

Modell müsste gleich groß und schnell sein wie Original ↯

$\longrightarrow$ Abwägen, welcher Effekt wichtiger ist : Hier $Fr' \overset{!}{=} Fr$

$\longrightarrow M_v^2 = M_L$

Ansatz

$$\boxed{C_W = \underbrace{C_{WR}(Re)}_{\text{Reibungswiederstand}} + \underbrace{C_{Ww}(Fr)}_{\text{Wellenwiederstand}}}$$

hier wäre $C_{Ww}(Fr) = C_{Ww}'(Fr')$

Für Modell : $C_W' = C_{Ww}'(Fr') + C_{WR}'(Re')$

Für Original : $C_W = C_{Ww}(Fr) + C_{WR}(Re)$

$$C_W - C_W' = \underbrace{(C_{Ww}(Fr) - C_{Ww}'(Fr'))}_{=0} + (C_{WR}(Re) - C_{WR}'(Re'))$$

$$C_W - C_W' = C_{WR}(Re) - C_{WR}'(Re')$$

$$C_W = C_W' + C_{WR}(Re) - C_{WR}'(Re')$$

$$C_{WR} = \text{Const } Re^m \qquad \text{turbulent: } m \approx -0{,}2$$

$$\underbrace{C_W = C_W' - C_{WR}'(Re')\left[1 - \left(\frac{Re'}{Re}\right)^m\right]}_{}$$

Aufwertungsansatz

Beispiele

- Schallgeschwindigkeit von Gasen

$a = f(p, \rho)$

	a	p	ρ
L	1	-1	-3
M	0	1	1
T	-1	-2	0

$n = 3$

$r = 2 \qquad d = 1$

	a	p/ρ	ρ
L	1	2	-3
M	0	0	1
T	-1	-2	0

$\Pi_1 = a^2 \cancel{\frac{\rho}{\rho}} \frac{\rho}{p} \overset{!}{=} const$

$\Pi_1' = a \cancel{\sqrt{\tfrac{\rho}{\rho}}} \sqrt{\frac{\rho}{p}} \overset{!}{=} const$

$a = const \sqrt{\frac{p}{\rho}}$

↳ Für kalorisch ideales Gas $\sqrt{\kappa}$

- Schallgeschwindigkeit in einem elastischen Körper

$a = f(E; \rho)$

E-Modul Dichte

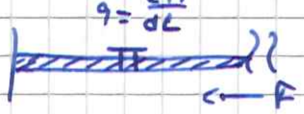
	a	E	ρ
L	1	-1	-3
M	0	1	1
T	-1	-2	0

$n = 3$

$r = 2 \qquad d = 1$

$\Pi_1 = a^2 \frac{\rho}{E} \overset{!}{=} const \qquad a = const \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

- Eigenfrequenz einer gespannten Saite



$n = f(F, q, L)$

	n	F	q	L
L	0	1	-1	1
M	0	1	1	0
T	-1	-2	0	0

$n = 4$

$r = 3 \qquad d = 1$

$\Pi_1 = \frac{F}{q n^2 L^2} \longrightarrow n = const \cdot \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{q}}$

- Widerstand einer Kugel

$W = f(v, \rho, \eta, D)$

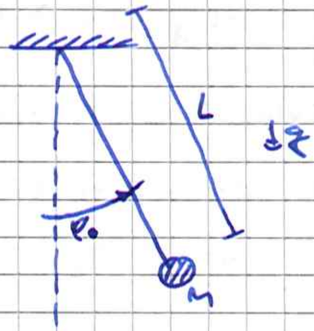
$\nu = \frac{\eta}{\rho}$

	W	v	d	ν
L	1	1	1	2
M	1	0	0	0
T	-2	-1	0	-1

Basisgröße taucht nur in einer Variable auf -> Masse kann für Problem keine Rolle spielen ↯

-> Nicht wohl gestellte Aufgabe! Es fehlt die Dichte um W zu entdimensionalisieren

- Pendel



$\tau = f(L, m, g, \varphi_0)$

	τ	L	m	g	φ_0
L	0	1	0	1	0
~~M~~	~~0~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
T	1	0	0	-2	0

$n = 5$

$r = 3 \qquad d = 2$

Masse nur in der Kugelmasse – kann rausgestrichen werden, spielt für das Problem keine Rolle

$\Pi_1 = \tau\sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \Pi_2 = \varphi_0$

$f\left(\tau\sqrt{\frac{g}{L}}, \varphi_0\right) = 0 \qquad \tau\sqrt{\frac{g}{L}} = f(\varphi_0) = f(-\varphi_0)$

Für kleine Winkel $\varphi_0 \to 0$

Taylorreihenentwicklung um $\varphi_0 = 0 \qquad f(\varphi_0) = a_0 + a_0\varphi_0^2 + a_0\varphi_0^4 + \dots$

$\hookrightarrow \quad f(\varphi_0) \approx a_0$

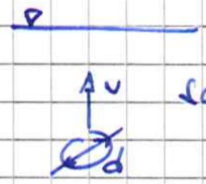
$\tau\sqrt{\frac{g}{L}} = a_0 \stackrel{!}{=} \text{const} \longrightarrow \tau = a_0\sqrt{\frac{L}{g}}$

nicht aus der Dimensionsanalyse, weitere physikalische Betrachtung nötig

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\varphi = 0$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \longrightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

- Aufstiegsgeschwindigkeit einer Luftblase



$v = f(d, g, \rho_W, \rho_L)$

	v	d	g	ρ_W	ρ_L
L	1	1	1	-3	-3
M	0	0	0	1	1
T	-1	0	-2	0	0

$n = 5$

$r = 3 \qquad d = 2$

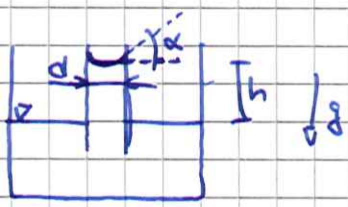
$\Pi_1 = \frac{v}{\sqrt{gd}} \qquad \Pi_2 = \frac{\rho_L}{\rho_W} \longrightarrow \frac{v}{\sqrt{gd}} = f\left(\frac{\rho_L}{\rho_W}\right) \qquad \frac{\rho_L}{\rho_W} \ll 1$

$\hookrightarrow \frac{v}{\sqrt{gd}} = f\left(\frac{\rho_L}{\rho_W}\right) \approx f(0) \stackrel{!}{=} \text{const.} \approx 0{,}35$

$v = 0{,}35\sqrt{gd}$

- Steighöhe in Kappilarröhre

Oberflächenspannung ist <u>nicht</u> Flächenspezifisch, sondern Längenspezifisch!!!



$h = f(d, \sigma, g, \rho, \alpha)$

	h	d	σ	g	ρ	α
L	1	1	0	1	-3	0
M	0	0	1	0	1	0
T	0	0	-2	-2	0	0

$n = 6$

$r = 3 \qquad d = 3$

$\Pi_1 = \frac{h}{d} \qquad \Pi_2 = \frac{\sigma}{\rho g d^2} \qquad \Pi_3 = \alpha$

Laplacesche Länge $a = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$; ca. 4mm für Wasser
was ist eine Größenordnung, in der sowohl Gravitation als auch Oberflächenspannung eine Rolle spielen

$$\frac{h}{d} = f\left(\frac{\sigma}{\rho g d^2}, \alpha\right)$$

Beobachtung aus Messungen: $h \sim \frac{1}{d}$

Wie kann dieser Zusammenhang eingearbeitet werden in Dimensionslose Produkte?

$$\Pi_1^* = \Pi_1 \Pi_2^{-1} = \frac{\rho g h d}{\sigma}$$

$$\Pi_1^* = f(\alpha) \longrightarrow \frac{\rho g h d}{\sigma} = f(\alpha)$$

- Elektrischer Schaltkreis

	τ	L	C	R
L	0	2	-2	2
M	0	1	-1	1
T	1	-2	4	-3
I	0	-2	2	-2

$n = 4$

$r = 2 \quad d = 2$

	τ	LC	C	RC
L	0	0	-2	0
M	0	0	1	0
T	1	2	4	1
I	0	0	2	0

$$\Pi_1 = \frac{\tau}{\sqrt{LC}} \qquad \Pi_2 = \frac{\tau}{RC} \qquad \frac{\tau}{\sqrt{LC}} = f\left(\frac{RC}{\sqrt{LC}}\right)$$

Dimensionsanalyse Übung 1 $\boxed{1}$

a)

	V	g	$\Delta\varrho$	t	D	η	m
L	1	1	-3	0	1	-1	0
M	0	0	1	0	0	1	1
T	-1	-2	0	1	0	-1	0

b) Voller Rang 3, E_{22} D m t bilden die Einheitsmatrix

$d = n - r = 7 - 3 = 4$

c)

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

	V	g	$\Delta\varrho$	t	D	η	m
Π_1	1	0	0	0	-2	-1	+1
Π_2	0	1	0	0	-3	-2	+2
Π_3	0	0	1	0	+3	-0	-1
Π_4	0	0	0	1	+1	+1	-1

$\cancel{\Pi_1 = \frac{VD^2\eta}{m}}$

$\cancel{\Pi_2 = \frac{gD^3\eta^2}{m}}$

$\cancel{\Pi_3 = \frac{\Delta\varrho m}{D^3}}$

$\cancel{\Pi_4 = \frac{tm}{D\eta}}$

$\Pi_1 = \frac{Vm}{D^2\eta}$ $\quad \Pi_2 = \frac{gm^2}{D^3\eta^2}$ $\quad \Pi_3 = \frac{\Delta\varrho D^3}{m}$ $\quad \Pi_4 = \frac{tD\eta}{m}$

d) Mit $t \to \infty$ geht Π_4 auch gegen unendlich, kann also keinen Einfluss auf die Endgeschwindigkeit haben!

Dimensionsanalyse Übung 2

a)

	M_λ	k	h	c	λ	T
L	-1	2	2	1	1	0
M	1	1	1	0	0	0
T	-3	-2	-1	-1	0	0
Θ	0	-1	0	0	0	1

b) $\det(h\,c\,\lambda\,T) \neq 0 \rightarrow$ Voller Rang 4

$d = n - r = 6 - 4 = 2$

c)
$$\left[\begin{array}{cc|cccc} -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = 0$$

	M_λ	k	h	c	λ	T
Π_1	1	0	-1	-2	5	0
Π_2	0	1	-1	-1	1	1

$$\Pi_1 = \frac{M_\lambda \lambda^5}{h c^2} \qquad \Pi_2 = \frac{k \lambda T}{h c}$$

Dimensionsanalyse Übung 1

a)

	g	m	A	v	ϱ_L	h
L	1	0	2	1	-3	1
M	0	1	0	0	1	0
T	-2	0	0	-1	0	0

b) $r = 3$, $[g\ m\ A]$ bilden eine Matrix mit Dreiecksgestalt

$d = n - r = 6 - 3 = 3$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

	g	m	A	v	ϱ_L	h
Π_1	1	0	0	-2	0	1
Π_2	0	1	0	0	-1	-3
Π_3	0	0	1	0	0	-2

$\Pi_1 = \frac{gh}{v^2}$ $\Pi_2 = \frac{m}{\varrho_L h^3}$ $\Pi_3 = \frac{A}{h^2}$

d) $g_Z = 0{,}5\, g_E$ $M_x = 2$ $M_E = 1$

$\cancel{M_g = \frac{g_Z}{g_E} = \frac{1}{2} \quad \frac{M_x}{M_E}}$ $m = V \cdot \varrho$ ← bleibt gleich

$V \sim x^3$ ⟶ Massenverhältnis $\frac{Z}{E} = 8$

$A \sim x^2$ ⟶ Flächenverhältnis $\frac{Z}{E} = 4$

e) ~~$v = \sqrt{\frac{g l}{\Pi_1}}$~~

~~$v_E = \sqrt{2} \, v_Z$ damit Sprunghöhe gleich bleibt~~

Für vollständige Ähnlichkeit:

$$\frac{M_g M_L}{M_v^2} = 1 \qquad \frac{M_m}{M_g M_L^2} = 1 \qquad \frac{M_A}{M_L^2} = 1$$

$M_A = M_L^2 \qquad M_g = 0{,}5 \qquad M_A = 4$

$M_L = \sqrt{4} = 2$

$M_v = \sqrt{M_g M_L} = 1$

f) $M_L = \sqrt{M_A} = 2$

$M_v = \sqrt{M_g M_L} = \sqrt{2}$

Dimensionsanalyse Übung 4 $\boxed{7}$

a)

	α	v	c_p	ρ	η	λ	L
L	0	1	2	-3	-1	1	1
M	1	0	0	1	1	1	0
T	-3	-1	-2	0	-1	-3	0
Θ	-1	0	-1	0	0	-1	0

b) $[c_p\ \eta\ \rho\ L]$ hat Dreiecksform $\rightarrow$ $r = 4$

$d = n - r = 7 - 4 = 3$

c)
$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \\ k_7 \end{bmatrix} = 0$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \cancel{k_4} \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \\ k_7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \\ k_7 \end{bmatrix}$$

$\Pi_1 = \frac{\alpha L}{\lambda}$ $\quad$ $\Pi_2 = \frac{v \rho L}{\eta}$ $\quad$ $\Pi_3 = \frac{c_p \eta}{\lambda}$

d) Π_1 ist Dim. loser Temperaturgradient = $\frac{\text{Wärmeübergang}}{\text{Wärmeleitung im Fluid}}$ Nusselt

Π_2 ist Reynolds Zahl = $\frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Zähigkeitskräfte}}$

Π_3 ist Prandtl Zahl = $\frac{\text{Wärmekapazität} \cdot \text{Dyn. Viskosität}}{\text{Wärmeleitfähigkeit}}$

a)

	ω	ρ	R	G
L	0	-3	1	3
M	0	1	0	-1
T	-1	0	0	-2

b) $[\omega\ \rho\ R]$ ist in Dreiecksform $\rightarrow$ $r = 3$

$d = n - r = 4 - 3 = 1$

c)
$$\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} k_1 \\ \hline k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_1 = \frac{\omega}{\sqrt{\rho G}}$$

d) Der Radius R hat keine Einfluss auf die Frequenz ω

e) $\cancel{\ldots \left(\frac{const.}{\sqrt{\rho G}}\right)}$

$$\frac{\omega}{\sqrt{\rho G}} = const \longrightarrow \omega = const \sqrt{\rho G}$$

f) $$\frac{M_\omega}{M_\rho^{1/2}\, M_G^{1/2}} = 1 \qquad M_\omega = 1{,}2 \qquad M_G = 1$$

$M_\rho = 1{,}44$

Der neue Stern hat die 1,44 fache Dichte unserer Sonne

Dimensionsanalyse Übung 6

a)

	Q	v	L	t	g	m
L	2	1	1	0	1	0
M	1	0	0	0	0	1
T	-2	-1	0	1	-2	0

b)

$[Q\ m\ L]$ Dreiecksmatrix $\rightarrow r = 3$

$d = n - r = 6 - 3 = 3$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

	Q	v	L	t	g	m
Π_1	1	0	0	-2	-2	-1
Π_2	0	1	0	-1	-1	0
Π_3	0	0	1	-2	-1	0

$\Pi_1 = \frac{Q}{t^2 g^2 m}$ $\qquad \Pi_2 = \frac{v}{t g}$ $\qquad \Pi_3 = \frac{L}{t^2 g}$

d) $\frac{M_Q}{M_t^2 M_g^2 M_m} = 1$ $\qquad M_g = 0{,}163 = \frac{g_M}{g_E}$ $\qquad M_m = 1$

$\frac{M_v}{M_t M_g} = 1$ $\qquad M_t = 1$

$\frac{M_L}{M_t^2 M_g} = 1$

e) $M_V = 1$; $M_L = 0,163$; $M_Q = 0,02657$; $M_t \overset{!}{=} 1$

f) $M_Q \overset{!}{=} 1$; $M_t = 6,135$; $M_V = 6,135$; $M_L = 6,135$

Balett-Vorführung dauert 552,2 Minuten ($M_t \cdot 90$ min)

g) Bühne muss mind. 61,35 m lang sein ($M_L \cdot 10$ m)

h) $M_L \overset{!}{=} 1$; $M_t = 2,477$; $M_V = 2,477$; $M_Q = 0,\cancel{1}63$

Vorführung dauert 222,9 min

i) Tänzer muss 16,3% der Sprungenergie aufbringen

j) M_V zwischen Erde und Mond ist $(2,477)^{-1} = 0,4037$

Dimensionsanalyse Übung 7 $\boxed{7}$

a) $$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\lambda(T) = \lambda_0\left(1 + \frac{(T-T_0)}{(T_w-T_0)}\right)$$

	$T-T_0$	T_w-T_0	a	x	t
L	0	0	2	1	0
M	0	0	0	0	0
t	0	0	-1	0	1
Θ	1	1	0	0	0

b) M kommt nicht vor, $x, t, T-T_0$ sind offensichtlich lin. unabhängig

$r = 3$

$d = n - 3 = 2$

c)
$$\begin{array}{ccccc} T-T_0 & x & T_w-T_0 & a & t \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

	$T-T_0$	x	T_w-T_0	a	t
Π_1	1	0	-1	0	0
Π_2	0	1	0	-1/2	-1/2

$$\Pi_1 = \frac{T-T_0}{T_w-T_0} = \Theta$$

$$\Pi_2 = \frac{x}{\sqrt{at}} = \eta$$

d) $\lambda(\Theta) = \lambda_0(1+\Theta)$

e) $T = \Theta(T_w-T_0)+T_0$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{-x}{2t\sqrt{at}}\frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{\eta}{2t}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{at}}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\rho c_p - \frac{\partial(\Theta(T_w-T_0)+T_0)}{\partial \eta}\frac{\eta}{2t} = \frac{1}{\sqrt{at}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\lambda(\Theta)\frac{\partial(\Theta(T_w-T_0)+T_0)}{\partial \eta}\frac{1}{\sqrt{at}}\right)$$

$$-\rho c_p \cancel{(T_w-T_0)}\frac{\eta}{2t}\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \frac{1}{at}\lambda(\Theta)\cancel{(T_w-T_0)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial \eta^2}$$

$$-\rho c_p \frac{\eta}{2}\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \frac{1}{a}\lambda(\Theta)\frac{\partial^2\Theta}{\partial \eta^2}$$ gewöhnliche DGL

$\eta \to \infty$: $\Theta = 0$

$\eta = 0$: $\Theta = 1$

Dimensionsanalyse Übung 8 $\boxed{E1}$

a)

	T	T_∞	r	t	a
L	0	0	1	0	2
~~M~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
τ	0	0	0	1	-1
Θ	1	1	0	0	0

b) $[r\ t\ T]$ bilden Einheitsmatrix, M Nullzeile

$r = 3$

$d = n - r = 2$

c)

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} T & r & T_\infty & t & a \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

	T	r	T_∞	t	a
Π_1	1	0	-1	0	0
Π_2	0	1	0	-1/2	-1/2

$\Pi_1 = \frac{T}{T_\infty} = \Theta$

$\Pi_2 = \frac{r}{\sqrt{at}} = \eta$

d)

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\eta}{2t}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{at}}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{1}{at}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{at}\,\eta}$$

$$\rho c_p \cdot \frac{\partial \Theta T_\infty}{\partial \eta}\left(-\frac{\eta}{2t}\right) = \lambda\left(\frac{1}{at}\frac{\partial^2 \Theta T_\infty}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Theta T_\infty}{\partial \eta}\frac{1}{\sqrt{at}}\right)$$

$$-\rho c_p \cancel{T_\infty}\frac{\eta}{2\cancel{t}}\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \lambda\left(\frac{\cancel{T_\infty}}{a\cancel{t}}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \frac{\cancel{T_\infty}}{at\eta}\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right)$$

$$-\frac{\rho c_p \eta}{2}\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = \lambda\left(\frac{1}{a}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{a\eta}\frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\right)$$ gewöhnliche DGL

$$\lambda T_\infty \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\frac{1}{\sqrt{at}}\Big|_{\eta=0} = -\dot{q} \longrightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} = -\frac{\dot{q}\sqrt{at}}{\lambda T_\infty}$$

$$\lim_{\eta \to \infty}(\Theta T_\infty) = T_\infty \longrightarrow \lim_{\eta\to\infty}(\Theta) = 1$$

② Dimensionsanalyse SS24

a)

$$\begin{array}{c|cccc} & V & G & R & M \\ \hline L & 1 & 3 & 1 & 0 \\ M & 0 & -1 & 0 & 1 \\ T & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

b) [GMR] bilden Dreiecksgestalt → voller Rang

$r = 3$

$d = n - r = 1$

c)

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} h_1 \\ \hline h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [h_1] + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} [h_1]$$

$$\Pi_1 = V \sqrt{\frac{R}{GM}}$$

d)

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \cdot \text{const.} = f(G, M, R)$$

e)

Einsetzen ergibt: $\text{const} = 1{,}476$

f) Einsetzen ergibt: $v_{Sonne} = 678{,}2 \ \frac{km}{s}$

g) Einsetzen ergibt: $R_{E,Schwarzschild} = 8{,}88 \ mm$

3

a)

	F	L	ΔT	α_L	E	A
L	1	1	0	0	-1	2
M	1	0	0	0	1	0
T	-2	0	0	0	-2	0
Θ	0	0	1	-1	0	0

b) ~~F-A zeigt: drei jeweils mit anderen abhängige Spalten~~

~~Kein Voller Rang~~ F-A zeigt: drei Spalte sind jeweils mit einer andere Spalte abhängig $\rightarrow r = 3$

$\Rightarrow d = n - r = 3$

c)

$$\begin{array}{l} \\ \\ \text{Lin. abh.} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{-2} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = 0$$

~~LGS lösen~~

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

	F	L	ΔT	α_L	E	A
Π_1	1	0	0	0	-1	-1
Π_2	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$
Π_3	0	0	1	1	0	0

$\Pi_1 = \frac{F}{EA}$

$\Pi_2 = \frac{L}{\sqrt{A}}$

$\Pi_3 = \Delta T \alpha_L$

d)

$$\Pi_1 = C\, \Pi_2^{e_1}\, \Pi_3^{e_2}$$

$$\frac{F}{EA} = C \left(\frac{L}{\sqrt{A}}\right)^{e_1} (\Delta T \alpha_L)^{e_2}$$

$$F = EAC \left(\frac{L}{\sqrt{A}}\right)^{e_1} (\Delta T \alpha_L)^{e_2} = f(E, A, L, \Delta T, \alpha_L, C, e_1, e_2)$$

15:05

Dimensionsanalyse WS 23/24 E1

1

a)

	F	ω	η	D	V	ρ
L	1	0	-1	1	1	-3
M	1	0	1	0	0	1
T	-2	-1	-1	0	-1	0

b) [V ρ D] Dreiecksgestalt → voller Rang

$r = 3$

$d = n - r = 3$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

	F	ω	η	D	V	ρ
Π_1	1	0	0	-2	-2	-1
Π_2	0	1	0	1	-1	0
Π_3	0	0	1	-1	-1	-1

$\Pi_1 = \frac{F}{D^2 V^2 \rho}$ $\qquad \Pi_2 = \frac{\omega D}{V}$ $\qquad \Pi_3 = \frac{\eta}{D V \rho}$

d) $\frac{M_F}{M_D^2 M_V^2 M_\rho} = 1$ $\qquad \frac{M_\omega M_D}{M_V} = 1$ $\qquad \frac{M_\eta}{M_D M_V M_\rho} = 1$

e) $M_D = 5 = \frac{M_{orig}}{M_{modell}}$ $\qquad M_\rho = 1$ $\qquad M_\eta = 1$ Einsetzen ergibt:

$M_V = \frac{1}{5}$ $\qquad M_\omega = \frac{1}{25}$ $\qquad M_F = 1$

f) $\frac{\eta_{orig}}{\eta_{modell}} = 2$ $\qquad \frac{\rho_{orig}}{\rho_{modell}} = 1,25$ Einsetzen ergibt:

$M_V = 0,32$ $\qquad M_\omega = 0,064$ $\qquad M_F = 3,2$

Dimensionsanalyse H22 $\boxed{3}$

a)

	N	ρ	L	σ	g
L	0	-3	1	0	1
M	0	1	0	1	0
T	0	0	0	-2	-2

b) $[\sigma\ \rho\ L]$ Dreiecksform $\rightarrow$ Voller Rang

$r = 3$

$d = n - r = 2$

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

	N	ρ	L	σ	g
Π_1	1	0	0	0	0
Π_2	0	1	3	-1	2

$\Pi_1 = N$

$\Pi_2 = \frac{\rho L^3 g^2}{\sigma}$

d) $\Pi_1 = c\,\Pi_2^{\epsilon} = \text{const}$

~~wenn bei doppelten g und halben N muss der doppelte herrschen~~

$N = c\left(\frac{\rho L^3 g^2}{\sigma}\right)^{\epsilon}$

$\frac{1}{2} = \frac{N'}{N} = \frac{c\left(\frac{\rho L^3 g'^2}{\sigma}\right)^{\epsilon}}{c\left(\frac{\rho L^3 g^2}{\sigma}\right)^{\epsilon}} = 2^{\epsilon} \longrightarrow \epsilon = -1$

e) $\rho\ \sigma\ g$ immer gleich $\rightarrow$ zu c zusammengefasst

~~Versuch~~ $L_{mess} = 1.8\,m$ $N_{mess} = 1$

~~$c = 5.822\,\frac{g^2\rho}{\sigma}$ $[c] = \frac{\frac{m^2}{s^4}\cdot\frac{kg}{m^3}}{\frac{N}{m}} = \frac{m^2}{s^4}\frac{kg}{m^3}\frac{m}{N} = \frac{kg}{s^4 N}$~~

~~$= \frac{kg}{s^4\frac{kg\,m}{s^2}} = \frac{1}{s^2 m}$~~

$N = c\,\frac{\sigma}{\rho L^3 g^2}$

$N = \frac{C}{L^3}$ mit $C = c\,\frac{\sigma}{\rho g^2}$ ϟ eig L, nicht L^3

$[C] = m^3 \longrightarrow [c] = \left(\frac{m}{s}\right)^2$

Dimensionsanalyse WS 23/24

3

a)

	v	Δp	g	R	ρ	η
L	1	-3	1	1	-3	-1
M	0	1	0	0	1	1
T	-1	0	-2	0	0	-1

b) $[\eta\ \rho\ R]$ Dreiecksform $\rightarrow$ voller Rang

$r = 3$

$d = n - r = 3$

c)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ +1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

	v	Δp	g	R	ρ	η
Π_1	1	0	0	1	+1	-1
Π_2	0	1	0	0	-1	0
Π_3	0	0	1	3	2	-2

$\Pi_1 = \frac{vR\rho}{\eta}$

$\Pi_2 = \frac{\Delta p}{\rho}$

$\Pi_3 = \frac{gR^3\rho^2}{\eta^2}$

d)

$$[\Pi_1] = \frac{\frac{m}{s}\, m\, \frac{kg}{m^3}}{\frac{kg}{ms}} = [1]$$

$$[\Pi_2] = \frac{p}{\rho} = [1]$$

$$[\Pi_3] = \frac{\frac{m}{s^2}\, m^3 \left(\frac{kg}{m^3}\right)^2}{\left(\frac{kg}{ms}\right)^2} = [1]$$

15:20 — 15:40

Fehler in GDP ?

2

a)

	σ	D	ρ	E	v
L	-1	1	-3	-1	1
M	1	0	1	1	0
T	-2	0	0	-2	-1

b) $[\sigma\, \rho\, D]$ bilden Dreiecksform → Voller Rang

$r = 3$

$d = n - r = 2$

c)

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

	σ	D	ρ	E	v
Π_1	1	0	-1	-1	0
Π_2	0	1	0	-1	2

$\Pi_1 = \dfrac{\sigma}{\rho E}$ $\qquad \Pi_2 = \dfrac{D v^2}{E}$

d) Alle Größen sind relevant, da $\sigma \sim D, E$ in Π_2 und $\sigma \sim v, \rho$ in Π_2

e) $\Pi_1 = C\, \Pi_2^{\epsilon_1}\, \Pi_3^{\epsilon_2}$

$$\frac{vR\rho}{\eta} = C\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^{\epsilon_1} \cdot \left(\frac{gR^3\rho^2}{\eta^2}\right)^{\epsilon_2}$$

$$v = \frac{\eta}{R\rho} C\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^{\epsilon_1} \left(\frac{gR^3\rho^2}{\eta^2}\right)^{\epsilon_2} = f(R, \Delta\rho, \eta, \rho, g, C, \epsilon_1, \epsilon_2)$$

f) $F_A = F_R$

$$V\Delta\rho g = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta\rho g = 6\pi R\eta v$$

$$v = \frac{2}{9}\frac{g\Delta\rho R^3\rho^2}{\eta^2\rho} \stackrel{!}{=} C\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^{\epsilon_1}\left(\frac{gR^3\rho^2}{\eta^2}\right)^{\epsilon_2}$$

$$= \frac{2}{9}\frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{gR^3\rho^2}{\eta^2}$$

$C = \frac{2}{9}$ $\quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$

7 Dimensionsanalyse SS 24 16:30 7/1

a)

	L	f	v	g	H	t
L	1	0	1	1	1	0
M	0	0	0	0	0	0
T	0	-1	-1	-2	0	1

b) [L f] lin. unabhängig, M ist Nullzeile

$r = 2$

$d = n - r = 4$

c)
$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_5 \\ k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

	L	f	v	g	H	t
Π_1	1	0	0	0	-1	0
Π_2	0	1	0	0	0	1
Π_3	0	0	1	0	-1	1
Π_4	0	0	0	1	-1	2

$\Pi_1 = \frac{L}{H}$ $\Pi_2 = ft$ $\Pi_3 = \frac{vt}{H}$ $\Pi_4 = \frac{gt^2}{H}$

d) $\frac{M_L}{M_H} = 1$; $M_f M_t = 1$; $\frac{M_v M_t}{M_H} = 1$; $\frac{M_g M_t^2}{M_H} = 1$

e) $\frac{f_{Modell}}{f_{Original}} = \frac{120}{24} = 5 = M_f$; $M_g = 1$

$M_f M_t = 1 \longrightarrow M_t = \frac{1}{5}$

$\frac{M_g M_t^2}{M_H} = 1 \longrightarrow M_H = \frac{1}{25}$; $M_v = \frac{1}{5}$

$M_L = \frac{1}{25}$

f) $L_{Original} \cdot M_L = L_{Modell} = 16{,}8\,cm$

$V_{Original} \cdot M_v = V_{Modell} = 28\ \frac{km}{h}$

Dimensionsanalyse H22

1.1

a)

	f	m	D	ρ	g
L	0	0	1	-3	1
M	0	1	0	1	0
T	-1	0	0	0	-2

b) $[D\, m\, f]$ bilden Einheitsmatrix

$r = 3$

$d = n - r = 2$

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Π_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Π_2	0	1	-3	-1	0
	f	m	D	ρ	g

$\Pi_1 = f\sqrt{\frac{D}{g}}$

$\Pi_2 = \frac{m}{D^3 \rho}$

d) $M_f \sqrt{\frac{M_D}{M_g}} = 1$; $\frac{M_m}{M_D^3 M_\rho} = 1$

e) $M_D = \frac{1}{100}$ $\quad M_\rho = 0{,}78$ $\quad m_{orig.} = 18000\ t$

$\frac{M_m}{M_D^3 M_\rho} = 1 \longrightarrow M_m = 7{,}8 \cdot 10^{-7} = \frac{m_{modell}}{m_{orig.}}$

$m_{modell} = 14{,}04\ kg$

$f_{modell} = 0{,}68\ Hz$ $\quad$ mit $M_f \sqrt{\frac{M_D}{M_g}} = 1$; $M_g = 1$

$M_f = 10 = \frac{f_{modell}}{f_{orig.}}$

$f_{orig} = 0{,}068\ Hz$

1.2

a)

	α	D	λ	ΔT	v	ρ	η	c_p
L	0	1	1	0	1	-3	-1	2
M	1	0	1	0	0	1	1	0
T	-3	0	-3	0	-1	0	-1	-2
Θ	-1	0	-1	1	0	0	0	-1

b) $[\alpha\ v\ \rho\ D]$ bilden Matrix in Dreiecksform $\rightarrow$ Voller Rang

$r = 4$

$d = n - r = 4$

c)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_5 \\ h_6 \\ h_7 \\ h_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

	α	D	λ	ΔT	v	ρ	η	c_p
Π_1	1	0	0	0	-1	-1	0	-1
Π_2	0	1	0	0	1	1	-1	0
Π_3	0	0	1	0	0	0	-1	-1
Π_4	0	0	0	1	-2	0	0	1

$\Pi_1 = \frac{\alpha}{v \rho c_p}$ $\qquad \Pi_2 = \frac{D v \rho}{\eta}$ $\qquad \Pi_3 = \frac{\lambda}{\eta c_p}$ $\qquad \Pi_4 = \frac{\Delta T c_p}{v^2}$

d) $\frac{\Pi_1 \cdot \Pi_2}{\Pi_3} = \frac{\alpha D}{\lambda}$ $\hat{=}$ Nusselt-Zahl