$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \frac{\partial f_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial v_1} & \frac{\partial f_2}{\partial v_2} \end{pmatrix}$$

Analytische und Numerische Methoden in der LRT

Formelsammlung

A. Fischer
F. Frank
H. Zeihsel
L. Kuhn
M. Höller
P. Weig
et. al.

11. April 2023, 10:16:40 MESZ

Diese FS
mit Ergänzungen
verwendet
(Flurus)
Übungen mit Musterlösungen
in Klausur dabei gehabt

1 2 3

Elliptische PDG, Stationäre Probleme, Tmp. Verteilung in festen Körper

$B^2(x_0,y_0) - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) < 0$

Laplace-Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Hyperbolische PDG. Wellenausbreitung, Ausbreitung von Signalen

$B^2(x_0,y_0) - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) > 0$

Welle-Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Parabolische PDG, Physikalische Modelle mit Dämpfung, Diffusion, Wärmeleitung

Zeitabhängig, keine Schockausbreitung $B^2(x_0,y_0) - 4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) = 0$

Wärmeleitungsgleichung: $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Allgemeine Form lineare partielle DGL 2. Ordnung

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

Kotrafo um PDG in Normalform zu transformieren

$\xi = \xi(x,y)$ $\quad J^{-1} = \left| \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \right|$

$\eta = \eta(x,y)$, zweifach diffbar im Gebiet und Jacobideterminante J^{-1} verschwindet nirgends. "Natur" der Gleichung bleibt erhalten

Charakteristische Gleichungen

$\frac{dy}{dx} = (B + \sqrt{(B^2 - 4AC)})/2A$ DGL für Familie von Kurve in

$\frac{dy}{dx} = (B - \sqrt{(B^2 - 4AC)})/2A$ der x-y-Ebene, für die $\xi = \eta = const.$

Integrale hiervon sind die Charakteristike der DGL

Wiederstand eines Kugel W abhängig von U, D, η, ρ $\quad W/\rho U^2 D^2$

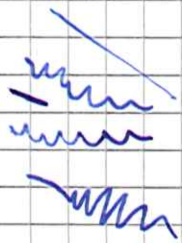
	W	U	η	ρ	D
L	1	1	-1	-3	1
M	1		1	1	0
T	-2	-1	-1	0	0

$\Longrightarrow$

	~~W~~	~~U~~	η	ρ	D
L	0	0	-1	-3	1
M	0	0	1	1	0
T	0	0	-1	0	0

$UD\rho/\eta$

Anzahl der Dimensionlose Größen $d = n - r = 5 - 3 = 2$



→ ~~Funktionaler Zusammenhang~~ Funktionelle Abhängigkeit für den Wiederstand des Kugel: $\frac{W}{\rho U^2 D^2} = f\left(\frac{UD\rho}{\eta}\right)$

4.1 **Kollokation**: Näherung muss an einzelnen Punkten mit der Funktion übereinstimmen

Lagrange-Darstellung eines Interpolationspolynoms

$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i L_i^N(x) = y_0 L_0^N(x) + y_1 L_1^N(x) + \dots + y_N L_N^N(x)$

$L_i^N \mathrel{\hat=}$ Lagrangesche Stützpolynome vom Grad N

$L_i^N(x_j) = 1 \,, \quad i = j \,, \qquad L_i^N(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$

$ = 0 \,, \quad i \neq j$

nodale Darstellung: Lagrange-Darstellung: Koeff. identisch mit Stützstellenwerten

modale Darstellung: Monombasis-Darstellung: Polynom muss ausgewertet werden.

Numerische Integration / Quadratur $\quad Q = \int_a^b f(x)\,dx$

Gewichtete Mittelwertformel: $\quad Q_h = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i f(x_i)$

Klasse von Integrationsformeln durch Wahl der Stützstellen der Interpolationspolynome

- Newton-Cotes ; Sehnentrapez ; Simpson-Regel
- Gauß-Quadraturformeln

Lösen von Eigenwertproblemen $\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v} \quad ; \quad \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$

numerisch lösen, finden des größten EW λ_{max} mit Vektoriteration

$\underline{v}^{(k+1)} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}^{(k)}$ ist Iterationsvorschrift

Nehmen wir an, dass der Startvektor $v^{(0)}$ eine Komponente des Eigenvektors zum größten Eigenwert λ_{max} enthält, dann wird in jedem Iterationsschritt die Iterierte mehr in die Richtung des Eigenvektors I_{max} zeigen.

$\lambda_{max} = \| \underline{\underline{A}}\,\underline{v}^{(\infty)} \|_2$ und $I_{max} = \underline{v}^{(\infty)}$

Mathematiker der Verdichtungsstöße vorhergesagt hat: Pierre-Henri-Hugoniot

Bell X1 : Erster Überschallflug 1948

5 Raum- und Zeit Approximation

Beispiel mit alle typen von PDG: lineare Konvektion-Diffusion-Reaktion-Gleichung

$u_t + \underline{a} \cdot \nabla u = d \Delta u + r$ Beschreibt Änderung von skalarer Größe u

gesucht, Diffusionskoeff, Quellterm

Parabolische ~~Gleichung~~ DGL

für $\underline{a} = 0$: Diffusionsgleichung

$d = 0$ und $\underline{a}$ reell: hyperbolische DGL

für u in der Zeit konstant nach einer Weile: elliptische DGL

Linienmethode: Problem erst in Raum, dann in Zeit approximieren

Bsp in einer Dimension, Gleichung von oben:

$u_t + a u_{xx} - d u_{xx} = r$ in $[x_a, x_e] \times [0, T]$

$u(x_a, 0) = u^0(x)$ für $x \in [x_a, x_e]$

$u(x_a, t) = u_a(t)$ und $u(x_e, t) = u_e(t)$ für $t \in [0, T]$ $a, d = \text{konst}$

Approximation im Raum

$d(u_h)_{xx} - a(u_h)_x = (u_h)_t - r_h$ in $[x_a, x_e]$

$u_h(x_a) = u_a$ und $u_h(x_e) = u_e$

$u_h = u_h(t)$ ist raumabhängige, in der Zeit approximierte Lösung

Zeitapproximation Lösung eines Anfangswertproblems

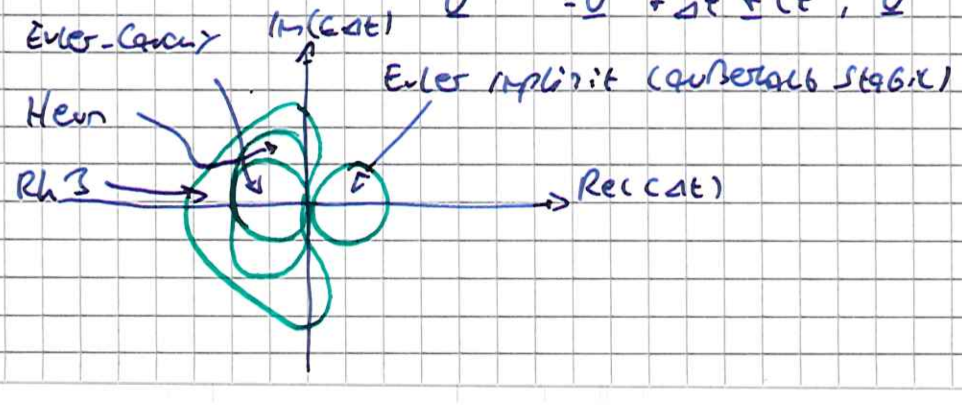
Raumapproximation Lösung eines Randwertproblems

Explizites Verfahren: Gesuchte Werte auf linker Seite, lassen ~~sich~~ sich durch Auswertung der rechten Seite mit den Werten vom vorherigen Zeitlevel berechnen

Implizites Verfahren: Berechnung der Werte mit Wert des Integrandes auf dem neuen Zeitlevel t_{n+1}

Bsp Explizit: Euler-Cauchy Verfahren $\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \Delta t \, \underline{f}(t^n, \underline{u}^n)$

Bsp Implizit: $\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^n + \Delta t \, \underline{f}(t^{n+1}, \underline{u}^{n+1})$



5

Drei Klassen von Näherungsverfahren für Partielle DGL:

- Differenzenverfahren (1) - Approximation von Ableitungen durch Differenzenquotienten
- Finite Elemente Verfahren (2) - Approximation der Lösung durch einfache Funktionen
- Finite Volumen Verfahren (3) - Approximation der Integralen Erhaltungsgleichung über Raum-Zeit-Gitterzelle

(1)
1 - Diskretisierung des Rechengebiets
2 - Auswahl der Differenzenquotienten
3 - Sortieren der Differenzengleichungen
4 - Lösen des Systems der Differenzengleichungen

(2) Näherung wird dargestellt in der Form $u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i \varphi_i(x)$

Mit Basisfkt $\varphi_i = \varphi_i(x)$ für $i = 1, 2, \dots N$ und Freiheitsgraden $\hat{u}_i$

Einfachste Approximation mit Polynome - Polynome höherer Grades neigen zur Oszillation, daher Näherungslösung stückweise aus Polynomen niederer Grades zusammensetzen.

Freiheitsgrade so berechnen, um das Residuum zu minimieren!
↳ Minimierung im Quadratischen Mittel
↳ Galerkin-Verfahren: Residuum soll senkrecht auf Funktionenraum stehen
1 - Diskretisierung des Rechengebiets, Wahl der Basisfunktionen
2 - Wahl der Berechnungsmethode der Freiheitsgrade
3 - Einsetzen der ~~[illegible]~~ Ansatzfunktionen, Sortieren der Gleichungen
4 - Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems

(3) Zentraler Baustein: Berechnung der Approximation des numerischen Flusses

Vorteile sind:
- Stetigkeit keine Voraussetzung für Approximation
- Exakte integrale Erhaltung wird reproduziert
- lokale Lösung bringt sehr gute Stabilität

↳ Insbesondere gut für kompressible Strömungen

7 Finite-Elemente-Verfahren

Galerkin-Verfahren – Testfunktionen identisch mit Basisfunktionen

- (7.2) mit Testfunktion multiplizieren
- über das Rechengebiet integrieren
- Partielle Integration – Liefert Kopplung mit dem Rand und eliminiert den Term mit der Ableitung 2. Ordnung
- Annahme, dass Testfunktion am Rand entfällt wegen homogenen Randbedingungen

↳ Randterm von der partiellen Integration entfällt

~~Approximation des Lösungsraumes ...~~

Näherungslösung mit Gestalt $u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N} \hat{u}_j(t)\, \varphi_j(x)$

$\varphi_i(x)$ ≙ i-te Basisfunktion

$\hat{u}_j(t)$ ≙ Koeffizienten der Linearkombination der Basisfunktionen / Freiheitsgrade

FE-Verfahren benötigen (im Gegensatz zu den Differenzen-Verfahren) auch bei expliziter Zeitapproximation die Lösung eines Gleichungssystems. Eine Zeitschrittweiten-beschränkung zur Sicherung der Stabilität tritt ebenfalls auf

Bei parabolischen Problemen: Zeitschritt proportional zum Quadrat der Raumschrittweite

Randbedingungen

(1) Ansatzfunktionen so wählen, dass sie die ~~Ra~~ Randwerte schon erfüllen: Zur Linearkombination der Basisfunktionen zwei weitere Funktionen hinzufügen "Starke Erfüllung"

(2) Zwei Randfunktionen φ_0 und φ_N zur Basis mit dazunehmen "Schwache Erfüllung"

(1) $u_h(x,t) = u_0(t)\varphi_0(x) + u_{N+1}(t)\varphi_{N+1}(x) + \sum_{1}^{N} \hat{u}_i(t)\varphi_i(x)$

(2) $u_h(x,t) = \sum_{0}^{N+1} \hat{u}_i(t)\varphi_i(x)$

↳ Hier dann Randterm aus der schwachen Formulierung nicht rausstreichen!

FV-Verfahren nicht geeignet hier, weil stückweise konstante Approximation für Differentialgleichung 2. Ordnung nicht geeignet. Auch Flussberechnung nach Godunov geht nicht gut, weil Ableitung für Lösung des Riemann-Problems benötigt, welche bei t=0 nicht existiert

7 Numerische Lösung von parabolischen Differentialgleichungen

Standardbeispiel: Lineare Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung

$u_t = k\,\Delta u + f(x,t)$ $\qquad$ $k \;\hat{=}\;$ Diffusionskoeffizient / Temperaturleitzahl

$\downarrow$

$u_t = k\,u_{xx}$ $\quad (7.2)$ $\qquad$ Eindimensionales Problem ohne Quellterm
Anfangsrandwertproblem, Parabolisch

Näherungsverfahren für (7.2) mit expliziter Zeitapproximation:

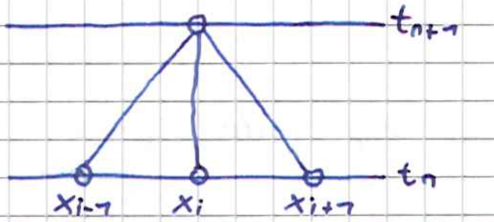
Differenzen-Verfahren

Unterer Index: Raumdiskretisierung
Oberer Index: Zeitdiskretisierung

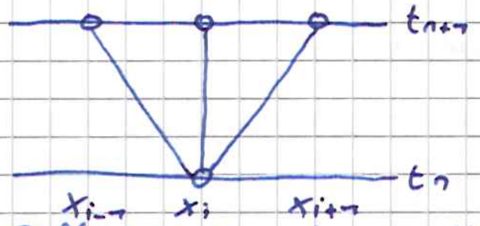
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = k\,\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$ Explizites Verfahren

$$u_i^n = -\frac{k\Delta t}{\Delta x^2}\,u_{i-1}^{n+1} + \left(1 + 2\frac{k\Delta t}{\Delta x^2}\right)u_i^{n+1} - \frac{k\Delta t}{\Delta x^2}\,u_{i+1}^{n+1}$$ Implizites Verfahren



Differenzenstern des expliziten Verfahrens mit zentralen Differenzen



Differenzenstern des impliziten Verfahrens mit zentralen Differenzen

Bedingung, dass explizites Verfahren stabil ist: $k\,\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$

Implizites Verfahren bedingungslos stabil

Implizites Verfahren 1. Ordnung: "Voll implizites Verfahren"

Implizites Verfahren 2. Ordnung: "Crank-Nic~~k~~olson-Verfahren"

Das Mehrdimensionale Problem

Diskreter Laplace-Operator: $\Delta u(x_i, y_j, t_n) \approx \frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n\right)$
$=: \tilde{\Delta} u_{i,j}^n$

Das nicht-Lineare Problem

Bsp. Wärmeleitung in Navier-Stokes-Gleichungen oder Wärmestrahlung

Lineare DGL meist nur für Probleme, bei denen keine größeren Änderungen in der Lösung auftreten

Nichtlineare Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung:

$u_t = \nabla \cdot (k(u)\,\nabla u)$ $\quad (7.25)$

System von nichtlinearen Gleichungen – Lösen mit Iterationsverfahren

$\Rightarrow$ Am einfachsten: eine einfache Linearisierung, SOR-Verfahren, Newton-Verfahren

77 Allgemeines Dreiecksgitter für kompliziertes Rechengebiet vereinfachen mit Ausführung der Berechnungen auf einem Referenz-Element.

Numerische Lösung von hyperbolischen Differentialgleichungen

Differenzenverfahren

1. Möglichkeit: Statt zentrale Approximation im Raum werden die einseitigen Approximationen 1. Ordnung genutzt. Dieses Verfahren ist dann stabil – CIR-Verfahren oder Upwind-Verfahren

Bedingt stabil, wenn $\frac{\Delta t}{\Delta x}|a| < 1$ (CFL-Bedingung) (4 Zeit 2 Raum)

2. Möglichkeit: Verbesserung der Approximation der Zeitableitung mit Einschritt- oder Mehrschrittverfahren (Linienmethode / Runge-Kutta 4. Or.)

Bei schlechter Auflösung des Problems kann es zu Oszillationen kommen

⟶ Stabilisierungsterme hinzufügen (Methode der künstlichen Diffusion)

Herleitung aus ~~Ableitungen~~ einer Taylorentwicklung in der Zeit gibt: Lax-Wendroff-Verfahren

↳ Hier werden Zeitableitungen durch Raumableitungen ersetzt. 2. Ordnung Raum und Zeit

Finite-Volumen-Verfahren

System von Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension $\underline{u}_t + f(\underline{u})_x = 0$

$\underline{u}$ ≙ Vektor der Erhaltungsgrößen

$f(\underline{u})$ ≙ Fluss

Exakte Evolutionsgleichung für die integralen Mittelwerte

$\underline{u}_i^{n+1} = \underline{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n)$ (11.47)

Ist erfüllt, wenn exakte Lösung eingesetzt wird.

FV-Verfahren ist Approximation der Lösung in der gleichen Form (11.47)

Aber mit Bedeutung

$\underline{u}_i^n$ approximiert $\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \underline{u}(x,t_n)\,dx$

$g_{i+1/2}^n = g(\underline{u}_i^n, \underline{u}_{i+1}^n)$ heißt numerischer Fluss und approximiert $\frac{1}{\Delta t}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{f}(\underline{u}(x_{i+1/2},t))\,dt$

Problematik: Als Näherung werden integrale Mittelwerte approximiert, zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung aber lokale Randwerte nötig

9 Numerische Lösung von elliptischen Differentialgleichungen

Einfachste elliptische Gleichung: Poisson-Gleichung $\Delta u = f(\underline{x})$ in Ω (9.1)

mit den Dirichlet-Randwerten $u(\underline{x}) = u_r(\underline{x})$ auf $\partial\Omega$

Differenzen-Verfahren

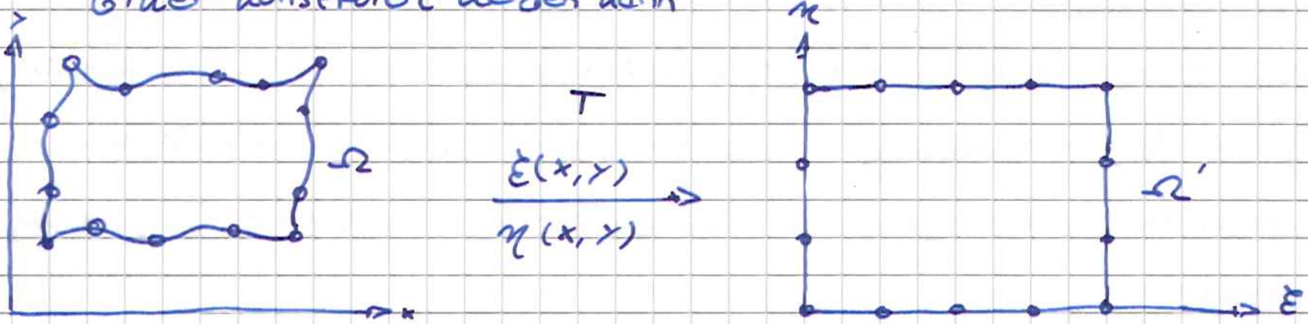
Angewand auf (9.1) am Punkt (x_i, y_j)

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right) = f(x_i, y_j)$$

Für Differenzenverfahren ist ein kartesisches Gitter nötig – nicht gut für die meisten physikalischen Probleme

↳ Umkehrbare Abbildung des physikalischen auf ein logisches Rechengebiet

Logisches Rechengebiet ist ein Rechteckgebiet, in dem ein kartesisches Gitter konstruiert werden kann



Transformation der Differentialgleichungen nötig

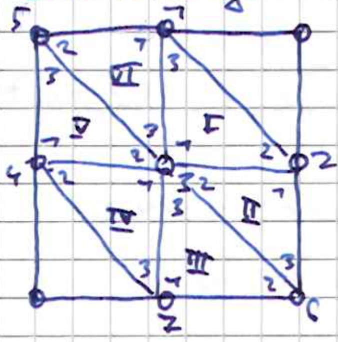
Finite-Elemente-Verfahren

- Wieder schwache Form herleiten, dieses Mal mit mehrdimensionaler part. Integration

Die Relevante Funktionenräume für schwache Lösungen und damit für die Finite-Elemente-Approximation ist der Raum der quadratisch integrierbare Funktionen $L_2(\Omega) = \{u \mid \text{es existiert} \int_\Omega (u(x))^2 dx < \infty\}$

Der Raum der Funktionen, deren schwache Ableitung quadratisch integrierbar ist, ist der Sobolev-Raum $H^1(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) \mid \text{es existieren schwache Ableitungen aus } L_2(\Omega)\}$

Assemblierung



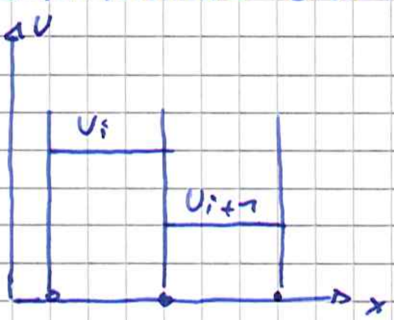
$$\underline{A} = \frac{1}{2}\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
1+2 & 0 & -1-1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1+2 & -1-1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-1-1 & -1-1 & 2+1+1+2+1+1 & -1-1 & 0 & 0 & -1-1 \\
0 & 0 & -1-1 & 1+2 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & -1 & 1+1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1+1 & -1 \\
0 & 0 & -1-1 & 0 & 0 & -1 & 1+1
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\end{array}$$

1.7.1 Godunovs Idee

Annahme, dass Näherungsfunktion stückweise konstant ist und somit gleich ihrem integralen Mittelwert. → Sprünge am Rand der Gitterzelle.

↳ Exakte Lösung zur Flussberechnung

Stückweise konstante Approximation →



Riemann-Problem: Anfangswertproblem für eine Partielle Differentialgleichung mit stückweise konstanten Anfangsdaten

Lineare, partielle Differentialgleichungen (PDGL) zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen

Allgemeine Form: $A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u = G$

Linear: Form der Koeffizienten

↳ Linear : $A, B, C, D, E, F, G = f(x, y, const)$

↳ nichtlinear : $A, B, C, D, E, F, G = f(u, u_x, u_y, \dots)$

↳ quasilinear : $A, B, C \neq f(u_{xx}, u_{yy}, u_{xy})$
aber $D, E, F, G = f(u, u_x, u_y \dots)$

Partiell: Es treten partielle Ableitungen auf, da die gesuchte Funktion von mehr als einer Variablen abhängt

2. Ordnung: Entspricht der höchsten vorkommenden Ableitungsordnung

Typ von linearen PDGL 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen

$B^2 - 4AC > 0 \rightarrow$ hyperbolisch

$B^2 - 4AC = 0 \rightarrow$ parabolisch

$B^2 - 4AC < 0 \rightarrow$ elliptisch

Koordinatentransformation

Allgemeine Form / Ausgangsgleichung in kurzer Schreibweise

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G \qquad (1)$$

Neue Koordinaten

$$\xi = \xi(x, y) \qquad \eta = \eta(x, y)$$

Transformation der Ableitungen in (1) [Skript Gl. 2.11]

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$u_{xx} = \dots$

$u_{yy} = \dots$

$u_{xy} = \dots$

Transformierte Gleichung [Skript Gl. 2.16]

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_\xi + E^* u_\eta + F^* u = G^*$$

mit ... siehe nächste Seite ...

... mit

$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$

$B^* = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y$

$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$

$D^* = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y$

$E^* = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y$

$F^* = F$

$G^* = G$

Normalform   Ziel: neue Koordinaten finden (ξ, η), sodass $A^* = C^* = 0$

Charakteristische Gleichungen $\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

Abhängigkeit von $B^2 - 4AC$:

> 0 ⟶ zwei Gleichungen ⟶ hyperbolisch

$= 0$ ⟶ eine Gleichung ⟶ parabolisch

< 0 ⟶ zwei komplex konjugierte Gleichungen ⟶ elliptisch

Integration der charakteristischen Gleichungen liefert ξ, η

Dimensionsanalyse

Buckingham-Theorem / Pi-Theorem besagt, dass jeder funktionale Zusammenhang von physikalischen Größen auch durch einen funktionalen Zusammenhang von dimensionslosen Größen beschrieben werden kann.

$f_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \longrightarrow f_n(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_d) = 0$

p := physikalische Größe $\qquad \Pi$:= dimensionslose Größe

n := Anzahl physikalische Größen $\qquad d$:= Anzahl dimensionslose Größen

Es gilt $d < n \longrightarrow$ Problem wird vereinfacht!

(1) $\underbrace{[P_i]_\pi}_{\text{Dimension von } P_j} = \underbrace{\prod_{i=1}^{m} (\overline{X}_i)^{a_{ij}}}_{\text{Produkt von Basisgrößen mit Exponenten } a_{ij}}$ — m: Anzahl der Basisgrößen

Bsp: Geschwindigkeit v:

$[v] = [P_2] = L^1 \cdot T^{-1} \qquad \overline{X}_1 = L \quad \overline{X}_2 = T \qquad a_{12} = 1 \quad a_{22} = -1$

Dimensionsloses Produkt

(2) $[\Pi] = 1 = \prod_{j=1}^{n} [P_j]^{b_j}$

Dimension von Π ist 1 und entspricht dem Produkt der Dimensionen der physikalischen Größe P_j mit den jeweiligen Exponenten b_j

(1) in (2) $[\Pi] = \prod_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{m} (\overline{X}_i)^{a_{ij}}\right)^{b_j} = \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} (\overline{X}_i)^{a_{ij} b_j}$

$\longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j = 0$

b_j: Exponenten der physikalischen Größe

a_{ij}: Dimensionsmatrix (bekannt)

Anzahl der dimensionslosen Produkte: $d = n - r$

r: Rang der Dimensionsmatrix

Analytik Zusammenfassung

Fourierreihen

Idee der Fourierreihe: Darstellung einer beliebigen reellen Funktion $f(x)$ durch trigonometrische Polynome (sin - kos - Funktionen)
Wer schreibt das mit k?

~~Verallgemeinerte~~
Verallgemeinerte Form der Fourierreihe für eine Funktion $f(x)$ mit Periodendauer $T = 2\pi/\omega$
Kreisfrequenz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$
a_0, a_n, b_n gesucht

Nützliche Werkzeuge

(1) Orthogonalitätsbeziehung: Zwei Funktionen sind über ein Intervall orthogonal, wenn das Integral in diesem Intervall über das Produkt der beiden Funktionen multipliziert mit einer Gewichtsfunktion $w(x)$ Null ergibt: $\int_I w(x)\, F_n(x)\, F_m(x)\, dx = 0$

Bsp: Sin- und cosinusfunktion und $w(x) = 1$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega m x) \cos(\omega n x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ T/2 & \text{für } n = m \end{cases} \rightarrow \text{orthogonal}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega m x) \sin(\omega n x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m \\ T/2 & \text{für } n = m \end{cases} \rightarrow \text{orthogonal}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega m x) \cos(\omega n x)\, dx = 0$$

(2) Integral von Sinus und Cosinus über eine Periode ist Null:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega m x)\, dx = 0 \quad ; \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega n x)\, dx = 0$$

Bestimmung von a_0 (Unter Verwendung von Werkzeug (2))

1. Integration über eine Periode $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega n x)\, dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega n x)\, dx}_{=0}\Big)$$

$$= \left[\frac{a_0}{2} x\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{a_0}{2}\left(\frac{T}{2} - \left(-\frac{T}{2}\right)\right) = \frac{a_0 T}{2}$$

2. $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx$

Bestimmung von a_n

1. Multiplikation mit $\cos(\omega m x)$ und Integration über $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(\omega m x)\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\cancel{\int_{-T/2}^{T/2}\cos(\omega m x)\,dx}}_{=0} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\cos(\omega n x)\cos(\omega m x)\,dx}_{=0 \text{ für } n\neq m\ ;\ =\frac{T}{2} \text{ für } n=m} + b_n \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2}\sin(n\omega x)\cos(\omega m x)\,dx}_{=0}\right)$$

2. Nur Term mit $n=m$ bleibt übrig $\longrightarrow n=m$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(\omega n x)\,dx = a_n\frac{T}{2}$$

3. $a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx$ ▨

Bestimmung von b_n

1. Multiplikation mit $\sin(m\omega x)$
2. Integration über $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$
3. Anwendung der Orthogonalitätsbeziehung
4. $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)\,dx$ ▨

Spezialfälle

Gerade Funktionen mit $f(x) = f(-x) \longrightarrow b_n = 0$, reine cos-Reihe

Ungerade Funktionen mit $f(x) = -f(-x) \longrightarrow a_n = 0$, reine sin-Reihe

Fouriersche Methode zur Lösung Hyperbolischer DGLs

- Produktansatz (Variablentrennung)
- Lösungsansätze aufstellen und VZ der Konstanten bestimmen
- Lösungsansätze in homogene RB/AB einsetzen um Koeffizienten bestimmen
- Superposition für inhomogene RB/AB
- Orthogonalitätsbeziehung nutzen
- Integrale auswerten
- Gesamtlösung

Beispiel Wärmestrom durch Wärmeleitung in Koordinatenrichtung: $q_{WL} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

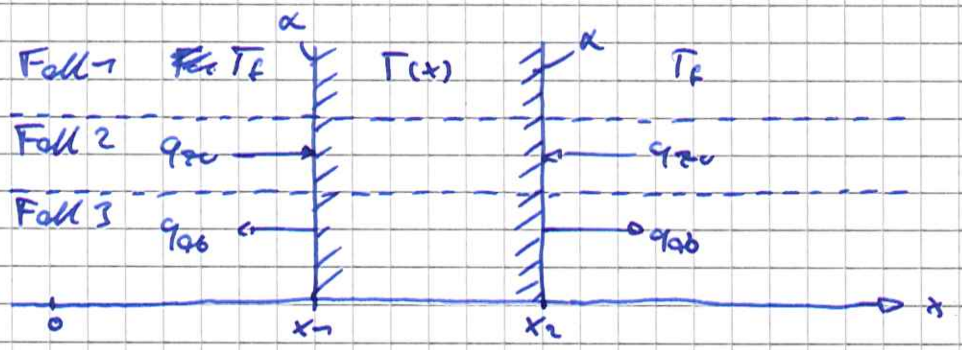
Wärmestrom durch Wärmeübertragung in Koordinatenrichtung $q_{WÜ} = \alpha \, (T_L - T_R)$

Temp links vom Rand → ← Temp. rechts vom Rand

Wärmestrom q_i in Koordinatenrichtung: positives Vorzeichen

Wärmestrom q_i entgegen Koordinatenrichtung: negatives Vorzeichen

Bsp:



Fall 1 : $q_{WÜ} \stackrel{!}{=} q_{WL}$

$\alpha(T_L - T_R) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

$\alpha(T_f - T(x = x_1)) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

$q_{WL} \stackrel{!}{=} q_{WÜ}$

$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \, (T(x = x_2) - T_f)$

Fall 2 : $q_{zu} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ $\qquad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -q_z$

Fall 3 : $-q_{ab} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ $\qquad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_{ab}$

Orthogonalitätsbeziehung bei der Bessel-Funktion

$$G_n(\tilde{r}) = C_n \, J_0(\lambda_n \tilde{r}) + D_n \, Y_0(\lambda_n \tilde{r})$$

$$G_m(\tilde{r}) = C_m \, J_0(\lambda_m \tilde{r}) + D_m \, Y_0(\lambda_m \tilde{r})$$

Es gilt:

$$\int_0^1 \tilde{r} \, \underbrace{G_n(\tilde{r}) \, G_m(\tilde{r})}_{\text{Eigenfunktionen}} = 0 \quad \text{für } n \neq m$$

$\tilde{r}$: Gewichtsfunktion

Vorzeichen der Eigenwertes $\pm\lambda^2$ bestimmen

→ Welche Randbedingung ist inhomogen? (Rechte Seite $\neq 0$)

→ Welche Größe ist variabel in Randbedingung?

↳ r festgesetzt → e variabel

↳ Inhomogenität kann allgemein eine Funktion $f(e)$ sein

→ $\phi(e)$ muss aus orthogonalen Funktionen bestehen

↳ e festgesetzt → r variabel

↳ Inhomogenes $f(r)$

→ $F(r)$ muss aus orthogonalen Funktionen bestehen

Beispiel aus Übung 7:

$$r = R : \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \underbrace{F'(r=R)}_{\text{const}}\,\underbrace{\phi(e)}_{e \text{ variabel}} = \frac{\tau_w}{\mu_L}$$

$$\text{Allgemein } f(e) = \frac{\tau_w}{\mu_L} = \text{const}$$

Semesteraufgabe Analytik

a) Navier-Stokes in x-Richtung

keine Geschwindigkeitskomponente in y, z Richtungen; kein Druckgradient

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0} + \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}_{=0} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}_{=0}\right) = \cancel{X} - \cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \eta\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

voll ausgebildet; „Strömung unabhängig von x"; keine äußere Kraft (oder g?) → $X = \rho g$; „Strömung unabhängig von x"

$$0 = \eta\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{A} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{C}\right) + \underbrace{\rho g}_{6}$$

; ~~[illegible] < 0~~

~~→ elliptische DGL~~

~~b) Randbedingungen~~

~~[illegible]~~

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho g}{\eta} \quad \rightarrow B^2 - 4AC = -4 < 0 \rightarrow \text{elliptische DGL}$$

b)

$y = b$	$u(y=b, z) = 0$	Wände
$y = -b$	$u(y=-b, z) = 0$	Wände
$z = 0$	$u(y, z=0) = 0$	Wände
$z = h_f$	$\frac{\partial u}{\partial z}(y, z=z_f) = 0$	~~[illegible]~~ keine Scherspannung an Oberfläche

c) Einsetzen dimensionsloser Größen

$$\tilde{u} = \frac{\mu_L u}{h_f^2 \rho_L g}; \quad \tilde{y} = \frac{y}{b} \quad \text{und} \quad \tilde{z} = \frac{z}{h_f} \qquad a = \frac{h_f}{b}$$

$$u = \frac{\tilde{u} h_f^2 \rho_L g}{\mu_L}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\mu_L}(\tilde{u} h_f^2 \rho_L g)\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\mu_L}(\tilde{u} h_f^2 \rho_L g)\right) = -\frac{\rho g}{\eta}$$

$$\frac{1 h_f^2 \rho_L g}{\mu_L}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{h_f^2 \rho_L g}{\mu_L}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = -\frac{\rho g}{\eta}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = -\frac{\rho g \mu_L}{\eta h_f^2 \rho_L g}$$

Transformation der Koordinaten :

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \qquad \text{mit } \tilde{y} = \frac{y}{b}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \qquad \text{mit } \tilde{z} = \frac{z}{h_f}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{h_f}\right)$$

$$= \frac{1}{h_f} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{b}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{b}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right) = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{h_f^2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}$$

Einsetzen liefert :

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{1}{h_f^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \tilde{z}^2} = -\frac{\rho g \mu_L}{\eta h_f^2 \rho_L g}$$

Transformation der Randbedingungen

$$y = \pm b \quad : \quad u(y = \pm b, z) = 0 \qquad \text{mit } \tilde{y} = \frac{y}{b} \text{ ; hier } \tilde{y} = \pm 1$$

$$\hat{u}(\tilde{y} = \pm 1, \tilde{z}) = \frac{\mu_L \overset{=0}{\cancel{u}}}{h_f^2 \rho_L g} = 0$$

$$z = 0 \quad : \quad u(y, z = 0) = 0 \qquad \text{mit } \tilde{z} = \frac{z}{h_f} \text{ ; hier } \tilde{z} = 0$$

$$\tilde{u}(\tilde{y}, \tilde{z} = 0) = 0$$

$$z = h_f \quad \frac{\partial u(y, z = h_f)}{\partial z} = 0 \qquad \text{mit } \tilde{z} = \frac{z}{h_f} \text{ ; hier } \tilde{z} = 1$$

$$\frac{1}{h_f}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\left(\hat{u}\,\frac{h_f^2 \rho_L g}{\mu_L}\right)\bigg|_{\tilde{z}=1} = 0$$

$$\frac{h_f \rho_L g}{\mu_L}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tilde{z}}\bigg|_{\tilde{z}=1} = 0$$

Semesteraufgabe Analytik

Aktuelles Stand : Dimensionsloses Problem :

$$\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{1}{h_f^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{z}^2} = -\frac{\cancel{g}\,\mu_L}{h_f^2\rho_L \cancel{g}} = -\frac{\cancel{g}\,\mu_L}{h_f^2\rho_L\, u} \quad \Big|\cdot h_f^2$$

$\hat{=}\,\mu_L$

$\tilde{y} = \pm 1 \quad : \quad \tilde{u} = 0$

$\tilde{z} = 0 \quad : \quad \tilde{u} = 0$

$$\tilde{z} = 1 \quad : \quad \frac{h_f\rho_L g}{\mu_L}\underbrace{\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{z}}\Big|_{\tilde{z}=1}}_{\hat{=}0} = 0$$

Weitere Vereinfachungen möglich

$$\frac{h_f^2}{b^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{z}^2} = -1$$

$$a^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}+\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{z}^2} = -1$$

Symmetrie bewirkt, dass in Mitte der Strömung Geschwindigkeitsgradient 0 sein muss! (bei $y=0$)

$\tilde{y}=0 \rightarrow \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}\Big|_{\tilde{y}=0} = 0$

$\tilde{y} = \pm 1 \quad : \quad \tilde{u} = 0$

$\tilde{z} = 0 \quad : \quad \tilde{u} = 0$

$\tilde{z} = 1 \quad : \quad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{z}}\Big|_{\tilde{z}=1} = 0$

$\tilde{y} = 0 \quad : \quad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{y}}\Big|_{\tilde{y}=0} = 0$

d) homogene Lösung : $a^2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{z}^2} = 0$

Ansatz : Produktansatz : $\tilde{u}_h(\tilde{y},\tilde{z}) = F(\tilde{y})\,G(\tilde{z})$

$$a^2\frac{\partial^2(F(\tilde{y})G(\tilde{z}))}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial^2(F(\tilde{y})G(\tilde{z}))}{\partial\tilde{z}^2} = 0$$

$$a^2 G(\tilde{z})\,F''(\tilde{y}) + F(\tilde{y})\,G''(\tilde{z}) = 0$$

$$\frac{G(\tilde{z})}{G''(\tilde{z})} = -\frac{1}{a^2}\frac{F(\tilde{y})}{F''(\tilde{y})} = \lambda^2 \quad ; \quad -a^2\frac{F''(\tilde{y})}{F(\tilde{y})} = \frac{G''(\tilde{z})}{G(\tilde{z})} = -\lambda^2$$

$$-q^2 \frac{F''(\tilde y)}{F(\tilde y)} = \frac{G''(\tilde z)}{G(\tilde z)} = -\lambda^2$$

Ansatz für $G(\tilde z)$

$$G(\tilde z) = A\cos(\tilde\lambda \tilde z) + B\sin(\tilde\lambda \tilde z) \qquad \cancel{\text{mit } \tilde\lambda = \frac{\lambda}{q}}$$

Ansatz für $F(\tilde y)$

$$F(\tilde y) = C\cosh(\tilde\lambda \tilde y) + D\sinh(\tilde\lambda \tilde y) \qquad \text{mit } \tilde\lambda = \frac{\lambda}{q}$$

$$\to U(\tilde y, \tilde z) = (A\cos(\lambda \tilde z) + B\sin(\lambda \tilde z))(C\cosh(\tilde\lambda \tilde y) + D\sinh(\tilde\lambda \tilde y))$$

Einsetzen in RR

$\cancel{\tilde y = 1 \to \tilde u = 0}$

$\cancel{(A\cos(\lambda\tilde z) + B\sin(\lambda\tilde z))(\ldots) = 0}$

$\cancel{(A\cos(\lambda\tilde z) + B\sin(\lambda\tilde z))(C\cosh(\tilde\lambda) + D\sinh(\tilde\lambda)) = 0}$

$\cancel{(A\cos(\lambda\tilde z) + B\sin(\lambda\tilde z))(C\cosh(-\tilde\lambda) + D\sinh(-\tilde\lambda)) = 0}$

$\cancel{- \tilde z = 0 \to \tilde u = 0}$

$\cancel{(A(C\cosh(\tilde\lambda\tilde y) + D\sinh(\tilde\lambda\tilde y)) = 0}$

$\cancel{- \tilde z = 1 \to \tilde u_{\tilde z} = 0}$

$\cancel{(-A\sin(\lambda) + B\cos(\lambda)) \cdot \lambda e^{-\lambda\tilde y} \ldots}$

$\cancel{(-A\sin(\lambda) - B\cos(\lambda)) \cdot \lambda e^{-\lambda\tilde y} \cdot ((C+D)e^{2\lambda\tilde y} + C - D)) \cdot \frac{1}{2} = 0}$

$\cancel{- \tilde y = 0 \to \tilde u_{\tilde y} = 0}$

$\cancel{\tilde\lambda D(A\cos(\lambda\tilde z) + B\sin(\lambda\tilde z)) = 0} \to -\frac{B\sin(\lambda\tilde z)}{A\cos(\lambda\tilde z)} = 1$

↳ Triviale Lösung für $D = 0$

$$\cancel{-\frac{B}{A}\tan(\lambda\tilde z) = 1}$$

$$u(\tilde{y},\tilde{z}) = F(\tilde{y})\,G(\tilde{z})$$

$$= (A\cos(\lambda\tilde{z}) + B\sin(\lambda\tilde{z}))(C\cosh(\tilde{\lambda}\tilde{y}) + D\sinh(\tilde{\lambda}\tilde{y}))$$

- ~~$F(0)G(\tilde{z})=0$ Lösung trivial für $G(\tilde{z})=0$~~

  ~~$\Rightarrow$ Es muss $F(0)=0$ gelten~~

- $\tilde{z} = 0 \;\rightarrow\; u(\tilde{y},\tilde{z}) = 0$

  $F(\tilde{y})G(0) = 0 \;\longrightarrow$ Es muss $G(0)=0$ gelten

  $A\cdot 1 + B\cdot 0 = 0 \;\longrightarrow\; \underline{\underline{A = 0}}$

  $u(\tilde{y},\tilde{z}) = B\sin(\lambda\tilde{z})\,D\sinh(\tilde{\lambda}\tilde{y})$

- $\tilde{z} = 1 \;\rightarrow\; u_{\tilde{z}}(\tilde{y},\tilde{z}) = 0$

  $$\left.\frac{\partial F(\tilde{y})G(\tilde{z})}{\partial\tilde{z}}\right|_{\tilde{z}=1} = 0$$

  $$F(\tilde{y})\left.\frac{\partial G(\tilde{z})}{\partial\tilde{z}}\right|_{\tilde{z}=1} = 0$$

  Triviale Lösung für $F(\tilde{y}) = 0$

  $\rightarrow \left.\frac{\partial G(\tilde{z})}{\partial\tilde{z}}\right|_{\tilde{z}=1} \stackrel{!}{=} 0$

  $G'(\tilde{z}) = -\lambda A\sin(\lambda\tilde{z}) + \lambda B\cos(\lambda\tilde{z})$

  $G'(1) = -\cancel{\lambda}\underbrace{\cancel{A}}_{=0}\sin(\lambda) + \cancel{\lambda}B\cos\lambda) = 0$

  $B\cos(\lambda) = 0$

  $\cos(\lambda) = 0$

  $\lambda = \frac{2n-1}{2}\pi \;;\; n = 1,2,\ldots$

  $= \lambda_n$

$$G(\tilde{z}) = B\sin(\lambda_n\tilde{z}) \quad ; \underbrace{\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}}_{\text{Eigenwerte}}$$

$F(\tilde{y}) = C\cosh(\tilde{\lambda}_n \tilde{y}) + D\sinh(\tilde{y}\tilde{\lambda}_n)$ mit $\tilde{\lambda}_n = \frac{\lambda_n}{a}$

Einsetzen in RB:

- $\tilde{y} = 0$: $\tilde{U}_{\tilde{y}}\big|_{\tilde{y}=0} = 0$

$\frac{\partial F(\tilde{y})G(\tilde{z})}{\partial \tilde{y}}\Big|_{\tilde{y}=0} = 0$

$G(\tilde{z})\frac{\partial F(\tilde{y})}{\partial \tilde{y}}\Big|_{\tilde{y}=0} = 0$

$F'(\tilde{y}) = \tilde{\lambda}_n C\sinh(\tilde{\lambda}_n\tilde{y}) + \tilde{\lambda}_n D\cosh(\tilde{y}\tilde{\lambda}_n)$

$F'(0)\,G(\tilde{z}) = 0$ Triviale Lösung für $G(\tilde{z}) = 0$

$F'(0) = 0$

$\tilde{\lambda}_n D = 0$ $D = 0$

- $\tilde{y} = 1$: $\tilde{U} = 0$

$G(\tilde{z})\,F(1) = 0$

$F(1) = 0$

$\cancel{\sin}\,\cos h(\lambda_n) = 0$ ↯ $U_h(\tilde{y},\tilde{z}) = E\cosh(\tilde{\lambda}_n\tilde{y})B\sin(\lambda_n\tilde{z})$

$\frac{\lambda}{a}$

$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$

$F(\tilde{y}) = E\cosh(\tilde{\lambda}_n\tilde{y})$

e) Partikuläre Lösung: $a^2\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial\tilde{y}^2} + \frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial\tilde{z}^2} = -1$

1) Ansatz vom Typ der rechten Seite $\tilde{U}_p(\tilde{z}) = C_1\tilde{z}^2 + C_2\tilde{z} + C_3$

$\tilde{U}_p'(\tilde{z}) = 2C_1\tilde{z} + C_2$

$\tilde{U}_p''(\tilde{z}) = 2C_1$

$a^2\cancelto{=0}{\frac{\partial^2\tilde{U}_p}{\partial\tilde{y}^2}} + 2C_1 = -1$

$2C_1 = -1 \longrightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$

RB in $\tilde{z}$-Richtung:

$\tilde{z} = 0$: $\tilde{U}_p(\tilde{z}) = 0 \longrightarrow C_3 = 0$

$\tilde{z} = 1$: $\tilde{U}_{p\tilde{z}}\big|_{\tilde{z}=1} = 0 \longrightarrow 2C_1 + C_2 = 0$ $C_2 = +1$

$\tilde{U}_p(\tilde{z}) = -\frac{1}{2}\tilde{z}^2 + \tilde{z}$

2)

$U(\tilde{y},\tilde{z}) = \tilde{U}_h + \tilde{U}_p$

mit $\tilde{U}_h = \sum_{n=1}^{\infty} B\sin(\lambda_n\tilde{z})E\cosh(\frac{\lambda_n}{a}\tilde{y})$

und $\tilde{U}_p = -\frac{1}{2}\tilde{z}^2 + \tilde{z}$

$U(\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} B\sin(\lambda_n\tilde{z})E\cosh(\frac{\lambda_n}{a}\tilde{y}) - \frac{1}{2}\tilde{z}^2 + \tilde{z}$

3) $U(\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} B\sin(\lambda_n \tilde{z})\cosh(\frac{\lambda_n}{a}\tilde{y}) - \frac{1}{2}\tilde{z}^2 + \tilde{z}$

Einsetzen in RB:

$\tilde{y} = 1 \rightarrow \tilde{U} = 0$

$U(\tilde{y}=1,\tilde{z}) = \sum_{n=1}^{\infty} B\sin(\lambda_n \tilde{z})\cosh(\frac{\lambda_n}{a}) = \frac{1}{2}\tilde{z}^2 - \tilde{z}$

$\sum_{n=1}^{\infty} B\cosh(\frac{\lambda_n}{a})\sin(\lambda_n \tilde{z})\sin(\lambda_m \tilde{z}) = \sin(\lambda_m \tilde{z})(\frac{1}{2}\tilde{z}^2 - \tilde{z})$

Beide Seiten integrieren

$$\sum_{n=1}^{\infty} B\underbrace{\cosh(\frac{\lambda_n}{a})}_{C_n}\underbrace{\int_0^1 \sin(\lambda_n \tilde{z})\sin(\lambda_m \tilde{z})\,d\tilde{z}}_{=0\ n\neq m\quad =\frac{1}{2}\ n=m} = \int_0^1 \sin(\lambda_m \tilde{z})(\frac{1}{2}\tilde{z}^2 - \tilde{z})\,d\tilde{z}$$

$\frac{1}{2}BC_n = \int_0^1 \sin(\lambda_n \tilde{z})(\frac{1}{2}\tilde{z}^2 - \tilde{z})\,d\tilde{z}$

$B = \frac{2}{\cosh(\frac{\lambda_n}{a})}\int_0^1 \sin(\lambda_n \tilde{z})(\frac{1}{2}\tilde{z}^2 - \tilde{z})\,d\tilde{z}$

$= \frac{2}{\cosh(\frac{\lambda_n}{a})}\frac{(\lambda^2+2)\cos(\lambda_n)-2}{2\lambda_n^3}$

$= \frac{2}{\lambda_n^3\cosh(\frac{\lambda_n}{a})}$

4) $\tilde{U} = -\frac{1}{2}\tilde{z}^2 + \tilde{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(\lambda_n \tilde{z})}{\lambda_n^3\cosh(\frac{\lambda_n}{a})}\cosh(\frac{\lambda_n}{a}\tilde{y})$

f) $\tilde{v}(\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_i \phi_i(\tilde{y})\, j_i(\tilde{z})$

$j_i(\tilde{z})$ sind die orthogonalen Funktionen von U_n

$\tilde{U}_n(\tilde{y},\tilde{z}) = F(\tilde{y})\, G(\tilde{z})$

$G(\tilde{z}) = B \sin(\lambda_n \tilde{z}) \quad ; \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ (aus Aufgabe d))

$j_n(\tilde{z}) = B_n \sin(\lambda_n \tilde{z})$

$\hat{U}(\tilde{y},\tilde{z}) = \sum_n \phi_n(\tilde{y})\, B_n \sin(\lambda_n \tilde{z})$

i) PDGL lautet hier $a^2 \tilde{U}_{\tilde{y}\tilde{y}} + \tilde{U}_{\tilde{z}\tilde{z}} = -1$

„inhomogenität" bezieht sich auf -1

$$-1 = \sum_i \Omega_i\, j_i(\tilde{z}) \quad \Big| \cdot j_m(\tilde{z}) \quad \Big| \int_0^1 dz$$

$$\int_0^1 -j_m(\tilde{z})\, dz = \sum_i \Omega_i \int_0^1 j_i(\tilde{z})\, j_m(\tilde{z})\, dz$$

$$= \sum_i \Omega_i \underbrace{\int_0^1 B_i \sin(\lambda_i \tilde{z})\, B_m \sin(\lambda_m \tilde{z})\, dz}_{=0 \text{ für } i \neq m \quad = \frac{\pi}{2} \text{ für } i=m}$$

$$-\int_0^1 j_m(\tilde{z})\, dz = \Omega_m \int_0^1 B_m^2 \sin^2(\lambda_m \tilde{z})\, dz$$

$$\cancel{\ldots = \frac{+4-4\cos(\lambda_m)}{B_m(\sin(2\lambda_m)-2\lambda_m)}}$$

$$\frac{B_m(\cos(\lambda_m)-1)}{\lambda_m} = \Omega_m \frac{-B_m^2(\cancel{\sin(2\lambda_m)}^{=0}-2\lambda_m)}{2\lambda_m} = \frac{B_m^2}{2}$$

$\sin(2\lambda_m) = 0$

$\cos(\lambda_m) = 0$

$$\Omega_m = -\frac{2}{B_m \lambda_m}$$

$$\sum_i \Omega_i\, j_i(\tilde{z}) = \sum_n \left(-\frac{2}{B_m \lambda_m}\right)\left(B_m \sin(\lambda_m \tilde{z})\right)$$

$$-1 = \sum_m -\frac{2\sin(\lambda_m \tilde{z})}{\lambda_m}$$

Numerik Übung 1

(1)

1) $f(x) = \sin(x\pi) \quad x \in [0,1]$; Stützstellen

- $p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$ Monombasis $\quad (0,0)\ (\tfrac{1}{2},1)\ (1,0)$

$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$a_0 = 0$

$a_2 \frac{1}{4} + a_1 \cdot \frac{1}{2} = 1$; $a_2 \frac{1}{4} - a_2 \frac{1}{2} = 1$; $a_2 = -4$

$a_2 + a_1 = 0$; $a_1 = -a_2$; $a_1 = 4$

$p(x) = -4x^2 + 4x$

- $P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i L_i^N(x)$ Lagrangebasis

$L_i^N(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{N} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \iff L_i^N(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

$P_2(x) = \underbrace{\cancel{y_0}}_{=0} L_0^2(x) + \underbrace{y_1}_{=1} L_1^2(x) + \underbrace{\cancel{y_2}}_{=0} L_2^2(x)$

$L_1^2(x) = \frac{x-0}{\frac{1}{2}-0} \cdot \frac{x-1}{\frac{1}{2}-1} = -4x(x-1) = -4x^2 + 4x$

2) $p(x)$ so wählen, dass

$E(g) := \frac{1}{b-a} \sqrt{\int_a^b (f(x) - p(x))^2 dx}$ minimal wird

$\to$ Bestimme a_i, sodass Minimum der Funktion E

$\frac{\partial}{\partial a_j} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right)^2 dx = 0$

$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1 \qquad a = 0 \ ; \ b = 1$

$y_0 = 0 \quad y_1 = 1 \quad y_2 = 0$

$\int_a^b \frac{\partial}{\partial a_j} \left(f(x) - \sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right)^2 dx = 0$

$\frac{\partial}{\partial a_j} \left(f(x) - \sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right)^2 = 2\left(f(x) - \sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right) \cdot (-x^i)$

$-2 \int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^{N} a_i x^i\right)(+x^i) = 0$

$$-2\int_a^b \underbrace{\left(f(x) - \sum_{i=0}^N a_i x^i\right) x^{l}}_{g(x)} dx = 0$$

$$\int_a^b g(x) \approx \sum_{i=0}^N \alpha_i g(x_i)$$

$$-2 \sum_{j=0}^M \alpha_j \left(\underbrace{f(x_j)}_{=y_j} - \sum_{i=0}^N a_i x_j^i\right) x_j^l = 0$$

$$= -2 \sum_{j=0}^M \left(y_j - (a_0 x_j^0 + a_1 x_j^1 + \dots + a_N x_j^N)\right) x_j^l \alpha_j = 0$$

kürzen

$$= \cancel{-2} \sum_{j=0}^M \left(y_j - \sum_{i=0}^N a_i x_j^i\right) x_j^l \alpha_j = 0$$

Aufteilen in bekannten und unbekannten Term

$$= \sum_{j=0}^M y_j \alpha_j x_j^l - \sum_{i=0}^N a_i \sum_{j=0}^M \alpha_j x_j^{i+l} = 0$$

$$l = 0: \quad \sum_{j=0}^M y_j \alpha_j - \sum_{i=0}^N a_i \sum_{j=0}^M \alpha_j x_j^i$$

$$\vdots$$

(2)

1) $$\int_{-1}^{1} (x-1)^3 dx = \left[\tfrac{1}{4}(x-1)^4\right]_{-1}^{1} = \tfrac{1}{4}(1-1)^4 - \tfrac{1}{4}(-1-1)^4 = -4$$

2) $$\int_{-1}^{1} (x-1)^3 dx \approx \frac{+1+1}{2}\left((-1-1)^3 + (1-1)^3\right) = -8$$

$$\int_{-1}^{1} (x-1)^3 dx \approx \frac{1+1}{6}\left((-1-1)^3 + 4(0-1)^3 + (1-1)^3\right) = -4$$

3) $$\int_{-1}^{1} (x-1)^3 dx \approx \sum_{i=0}^N \alpha_i (x_i - 1)^3 = 1\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}} - 1\right)^3 + 1 \cdot \left(\sqrt{\tfrac{1}{3}} - 1\right)^3 = -4$$

4) Integrationsgenauigkeit Simpsonregel und Gauss Quadratur mit 2 Stützstellen ausreichend, um Polynome 4. Grades exakt zu bestimmen. Sehnentrapez ist nicht genau genug.

(3) $f(x) = e^{-x^2}$; $g(x) = \cos(x)$

$f'(x) = -2xe^{-x^2}$; $g'(x) = -\sin(x)$

1) $F(x) = -\frac{1}{2x} e^{-x^2}$; $G(x) = \sin(x)$

2) Äquidistantes Gitter $x_i = x_1 + (i-1)h$ $i = 1, \dots, N$

- $f_i'(x) \approx \frac{-\frac{1}{2} f(x_{i-1}) + 0 \cdot f(x_i) + \frac{1}{2} f(x_{i+1})}{h}$ zentral 2. Ordnung

$= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$

- $f_i'(x) \approx \frac{-1 f(x_i) + 1 \cdot f(x_{i+1})}{h}$ rechts 1. Ordnung

$= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$

- $f_i'(x) \approx \frac{-1 f(x_{i-1}) + f(x_i)}{h}$ Links 1. Ordnung

$= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$

- $f_i'(x) \approx \frac{\frac{1}{12} f(x_{i-2}) - \frac{2}{3} f(x_{i-1}) + \frac{2}{3} f(x_{i+1}) - \frac{1}{12} f(x_{i+2})}{h}$

$= \frac{f(x_{i-2}) - 8f(x_{i-1}) + 8f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})}{12h}$

(4) $F(u) = u - \cos(u)$

1) Nullstellen $F(u) = 0$

$u = \cos(u)$ "$u = G(u)$"

$u^{(k+1)} = \cos(u^{(k)})$ mit Startvektor $u^{(0)} = 0$

Gilt, wenn $G(u)$ eine Kontraktion ist:

$\left|\frac{\partial G(u)}{\partial u}\right| < 1 \longrightarrow |-\sin(u)| < 1$ ↯ stimmt nicht

2) $u^{(k+1)} = u^{(k)} - (1+\sin(u^{(k)}))^{-1} \cdot (u^{(k)} - \cos(u^{(k)}))$

$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \frac{F(u^{(k)})}{F'(u^{(k)})}$

3)

$F\left(\frac{u_1^k + u_2^k}{2}\right) \geq 0$; $u_1^{k+1} = u_1$; $u_2^{k+1} = \frac{u_1^k + u_2^k}{2}$

$F\left(\frac{u_1^k + u_2^k}{2}\right) < 0$; $u_1^{k+1} = \frac{u_1^k + u_2^k}{2}$; $u_2^{k+1} = u_2^k$

4)
$$u^{(k+1)} = a_k - \frac{b_k - a_k}{F(b_k) - F(a_k)} F(a_k)$$

$$F\left(\frac{u_1^k + u_2^k}{2}\right) > 0 \quad : u_1^{k+1} = u_1^k \quad ; \quad u_2^{k+1} = u_1^k - \frac{u_2^k - u_1^k}{F(u_2^k) - F(u_1^k)} F(u_1^k)$$

$$F\left(\frac{u_1^k + u_2^k}{2}\right) < 0 \quad : u_1^{k+1} = u_1^k - \frac{u_2^k - u_1^k}{F(u_2^k) - F(u_1^k)} F(u_1^k) \quad ; \quad u_2^{k+1} = u_2^k$$

Programme in der Matlab-Cloud

1. Blasius-Lösung für inkompressible Grenzschichtgleichungen

$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \quad ; \quad f = f(\eta)$

Mit RB: $f(0) = 0 \quad ; \quad f'(0) = 0 \quad ; \quad f'(\eta \to \infty) = 1$

1) $f' = F$

$f'' = F' = \mathcal{F}$

Einsetzen liefert: $\mathcal{F}' + \frac{1}{2} f F' = 0$

Mit $\begin{pmatrix} f \\ F \\ \mathcal{F} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} F \\ \mathcal{F} \\ -\frac{1}{2} f F' \end{pmatrix}$

$f(0) = 0$

$F(0) = 0$

$F(\eta \to \infty) = 1$

Problem: Es sind Anfangswerte für f und F gegeben, aber nicht für $\mathcal{F}$
→ kein reines AWP → numerisch aufwändiger

2) Code in Matlab-Cloud

bei num_steps $= 20$: $f''(0) \approx 0{,}27$

$= 40$: $f''(0) \approx 0{,}3$

Numerischer Fehler nimmt mit Erhöhung von num_steps ab

3) RK(2)

num_steps $= 20$: $f''(0) \approx 0{,}325$ err $= -1{,}05 \cdot 10^{-2}$

$= 40$: $f''(0) \approx 0{,}33$ err $= -3{,}19 \cdot 10^{-3}$

RK(3)

num_steps $= 40$: $f''(0) \approx 0{,}33$ err $= -4{,}13 \cdot 10^{-3}$

$= 20$: $f''(0) \approx 0{,}332$ err $= 3{,}82 \cdot 10^{-5}$

bei $f''(0) = 0{,}3321$; 10 Schritte:

RK(2) err $= 3{,}97 \cdot 10^{-3}$

RK(3) err $= 2{,}39 \cdot 10^{-4}$

Eu(1) err $= 1{,}52 \cdot 10^{-7}$

RK(3) erreicht höhere Genauigkeit mit gleich vielen Schritten wie RK(2) und Euler

4) shooting.m im Matlab Cloud

Numerik Übung 3 $\overline{\mathrm{EU}}$

Nicht-Lineare Wärmeleitungsgleichung $\Theta_t = ((k + C\Theta)\Theta_x)_x \; ; \; x \in [0,1]$

1

1) $\Theta^{n+1} = \Theta^n + \Delta t\,((k + C\Theta^{n+1})\Theta_x^{n+1})_x$

2)

$$\Theta^{n+1} = \Theta^n + \Delta t\left((k + C\Theta^{n+1}_{i-1/2})(\Theta^{n+1}_{i-1/2})_x + (k + C\Theta^{n+1}_{i+1/2})(\Theta^{n+1}_{i+1/2})_x\right)\frac{1}{\Delta x}$$

$$= \Theta^n + \Delta t\left((k + C\Theta^{n+1}_{i-1/2})\left(\frac{\Theta^{n+1}_{i-1} + \Theta^{n+1}_{i}}{\Delta x}\right) + (k + C\Theta^{n+1}_{i+1/2})\left(\frac{\Theta^{n+1}_{i} + \Theta^{n+1}_{i+1}}{\Delta x}\right)\right)\frac{1}{\Delta x}$$

$$= \Theta^n + \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left((k(\Theta^{n+1}_{i-1} - 2\Theta^{n+1}_{i} + \Theta^{n+1}_{i+1}) + \frac{C}{2}((\Theta^{n+1}_{i-1})^2 - 2(\Theta^{n+1}_{i})^2 + (\Theta^{n+1}_{i+1})^2)\right)}_{R(\Theta^{n+1})}$$

3)

Θ^{n} ist eine bekannte Konstante aus vorherigen Zeitschritt

Newton Verfahren Ausgangsgleichung: $F(\Theta) = 0 = \Theta^n + \Delta t\,R(\Theta) - \Theta$

Iterationsvorschrift $\Theta^{k+1} = \Theta^k - (F'(\Theta^k))^{-1} \cdot F(\Theta^k)$

$$F'(\Theta) = \frac{\partial \Theta^n}{\partial \Theta} + \Delta t\,\frac{\partial R(\Theta)}{\partial \Theta} - \frac{\partial \Theta}{\partial \Theta}$$

$$= 0 + \Delta t\,\frac{\partial R(\Theta)}{\partial \Theta} - I$$

$\rightarrow F'(\Theta^k)(\Theta^{k+1} - \Theta^k) = -F(\Theta^k)$

$$\underbrace{\left(\Delta t\,\frac{\partial R(\Theta)}{\partial \Theta}\Big|_{\Theta = \Theta^k} - I\right)}_{\underline{J}}\underbrace{(\Theta^{k+1} - \Theta^k)}_{\Delta\underline{\Theta}} = \underbrace{\Theta^n + \Delta t\,R(\Theta^k) - \Theta^k}_{\underline{B}}$$

4) $i \mathrel{\hat=}$ Zeile ; j = Spalte

$\frac{\partial R(\Theta_i)}{\partial \Theta_j}$ nur $\neq 0$ für $i = j-1, j, j+1$

$$\frac{\partial R(\Theta_i)}{\partial \Theta_{i-1}} = \frac{1}{\Delta x^2}(k + C\Theta_{i-1}) \; ; \; \frac{\partial R(\Theta_i)}{\partial \Theta_i} = \frac{2}{\Delta x^2}(-k - C\Theta_i) \; ; \; \frac{\partial R(\Theta_i)}{\partial \Theta_{i+1}} = \frac{1}{\Delta x^2}(k + C\Theta_{i+1})$$

Einträge der Jacobi-Matrix : $J_{ij} = \Delta t \left. \frac{\partial R(\Theta_i)}{\partial \Theta_j} \right|_{\Theta^k} - I$ Irgendwo VZF

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2a(k + C\Theta_1^k) & -a(k + C\Theta_2^k) & 0 & \cdots \\ -a(k + C\Theta_1^k) & 1 + 2a(k + C\Theta_2^k) & -a(k + C\Theta_3^k) & \cdots \\ 0 & -a(k + C\Theta_2^k) & 1 + 2a(k + C\Theta_3^k) & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad a = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

5) und 6) in der Matlab-Cloud

(2) Zweidimensionale instationäre Wärmeleitungsgleichung

Instationäre eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t = k u_{xx}$; $k > 0$

1 $x \in [0,1]$

1) Schwache Form

$$u_t \varphi = k u_{xx} \varphi$$

$$\int_0^1 u_t \varphi \, dx = \int_0^1 k u_{xx} \varphi \, dx$$

$$\int_0^1 u_t \varphi \, dx = \left[k u_x \varphi \right]_0^1 - \int_0^1 k u_x \varphi_x \, dx$$

2) Diskretisierung mit N inneren Ansatzfunktionen → N+1 Gitterzellen

$$x_i = a + ih \qquad i \in [1, N]$$

$$h = \frac{|\Omega|}{N+1} = \frac{1}{N+1}$$

Homogene Randbedingungen: keine Ansatzfunktionen bei x_0 und x_{N+1}

$$u(x,t) \approx u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i(t) \phi_i(x)$$

$$\text{mit } \phi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{i-1}) & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \frac{1}{h}(x_{i+1} - x) & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen liefert:

Galerkin: Testfkt = Basisfkt. $= \phi_j(x)$

$$\int_0^1 u_{h,t} \phi_j \, dx = -\int_0^1 k \, u_{h,x} \phi_{j,x} \, dx$$

3) Dirichlet-Randbedingungen der Form: $u(x=a,t) = g_a(t)$

Starke Form: Es werden halbe Hutfunktionen am Rand eingeführt. Deren Koeffizienten u_0 bzw. u_{N+1} werden entsprechend der Randbedingungen gewählt, die Randbedingung wird exakt eingehalten. Da u_0 und u_{N+1} somit jederzeit bekannt sind, werden keine zusätzlichen Unbekannte eingeführt und das Gleichungssystem hat immernoch $i = 1, \dots, N$ Unbekannte. Die entstehenden Terme werden zusätzliche Terme im Lastvektor. Dafür kann der Oberflächenterm ~~oder~~ aus der schwachen Formulierung $\left[k u_x \varphi \right]_0^1$ weggestrichen werden.

Schwache Form: Es werden halbe Hutfunktionen am Rand eingeführt. Im Gegensatz zur starken Form wird jedoch die Anzahl der Testfunktionen auf $i = 0, \dots, N+1$ erweitert. Die Koeffizienten U_0 bzw U_{N+1} der halben Hutfunktionen am Rand werden "mit dem Gleichungssystem mit gelöst". Die Randbedingungen werden in diesem Fall nur näherungsweise eingehalten und das System hat $i = 0, \dots, N+1$ Unbekannte. Die Randbedingungen werden über den Oberflächenterm aus der partiellen Integration $[k u_x e]_0^1$ in das Problem eingebracht

4)

$$\cancel{\int_0^1 u_{i,t}\,\phi_i \phi_j\,dx = -\int_0^1 k}$$

$$\cancel{\int_0^1 \sum_{i=1}^N \hat{u}_{i,t}\,\phi_i \phi_j\,dx = -\int_0^1 k \sum_{i=1}^N \hat{u}_{i,x}\,\phi_{i,x} \phi_{j,x}\,dx}$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^N \int_0^1 \hat{u}_{i,t}\,\phi_i \phi_j\,dx = \sum \int_0^1 k\,\hat{u}_{i,x}\,\phi_{i,x} \phi_{j,x}\,dx}$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^N \hat{u}_{i,t} \int_0^1 \phi_i \phi_j\,dx = \sum_{i=1}^N}$$

Umformung der Diskretisierung in Matrix-Schreibweise

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^N \hat{U}_{i,t}\,\phi_i \phi_j\,dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^N \hat{U}_i\,\phi_{i,x} \phi_{j,x}\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^N \hat{U}_{i,t} \underbrace{\int_0^1 \phi_i \phi_j\,dx}_{:= M_{ij}} = \sum_{i=1}^N \hat{U}_i \underbrace{\int_0^1 \phi_{i,x} \phi_{j,x}\,dx}_{:= S_{ij}}$$

$$M_{ij} = \begin{cases} \neq 0 & j-1 < i < j+1 \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\underline{M} \,\hat{=}\,$ Massematrix, $\underline{S} \,\hat{=}\,$ Steifigkeitsmatrix

$$\cancel{M_{ii} = \int_0^1 \phi_i \phi_j\,dx}$$

$$M_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i \phi_j\,dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i \phi_j\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i \phi_j\,dx$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_{i-1}}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3h^2}(x - x_{i-1})^3\right]_{x_{i-1}}^{x_i} + \left[\frac{-1}{3h^2}(x_{i+1} - x)^3\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{2}{3}h$$

$M_{i,i+1} = M_{i,i-1} = \frac{h}{6}$ $\quad$ $\underline{S}$ analog, $\underline{M}$ und $\underline{S}$ sind Tridiagonale Matrizen

Numerik Übung 4

Aktueller Stand : $\underline{\underline{M}} \hat{U}_t = \underline{\underline{S}} \hat{U}$

$\hat{U}_t = \underline{\underline{M}}^{-1} (-\underline{\underline{S}} \hat{U})$

Einführung der Zeitdiskretisierung

$\hat{U}^{n+1} = \hat{U}^n + \Delta t \underline{\underline{M}}^{-1} (-\underline{\underline{S}} \hat{U}^n)$

$= (\underline{\underline{I}} - \Delta t \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{S}}) \hat{U}^n$

5) Zu finden in Matlab Cloud

① $u_t(x,t) + f(u(x,t))_x = 0 \qquad x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}],\ t \in [t_n, t_{n+1}]$

1) Integration der Raum-Zeit-Gitterzelle über $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t(x,t)\,dx\,dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(u(x,t))_x\,dx\,dt = 0$$

$\Downarrow$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)\,dx + \int_{t_n}^{t} f(u(x_{i+1/2},t)) - f(u(x_{i-1/2}))\,dt = 0$$

$U_i^n := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_n)\,dx$ räumlicher Zeitmittelwert

$f_{i+1/2}^n := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2},t))\,dt$ Zeitlich gemittelter Fluss

$f_{i+1/2}^n \approx g_{i+1/2}^n$ Approximation durch num. Fluss

Exakte Erhaltungsgleichung in integraler Form

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right)$$

2) Lösen mit Godunov-Verfahren: Lösung des lokalen Riemann-Problems an den Zellrändern $x_{i\pm 1/2}$. Die Lösung des Riemann-Problems lautet in folgenden Fällen

Verdünnungswelle : $u(x,t) = \begin{cases} u_l & x/t < a(u_l) \\ a^{-1}(x/t) & a(u_l) < x/t < a(u_r) \\ u_r & x/t > a(u_r) \end{cases}$

Verdichtungsstoß : $u(x,t) = \begin{cases} u_l & x/t < s \\ u_r & x/t > s \end{cases}$

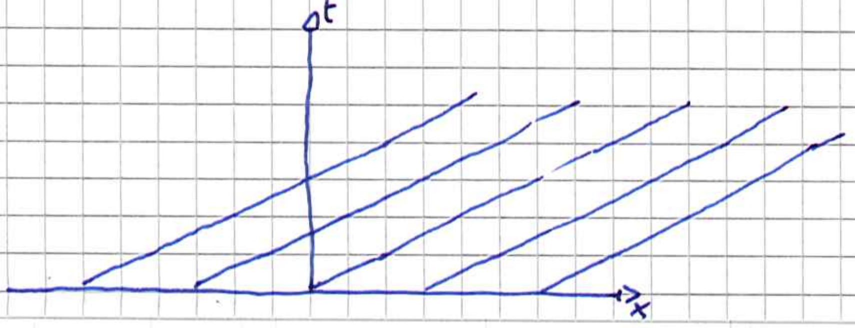
3) Vorteile Finite Volumen - Siehe Formelsammlung

② $u_t(x,t) + a\,u_x(x,t) = 0 \qquad a = 2$

1) Wellegeschw. $a = 2$

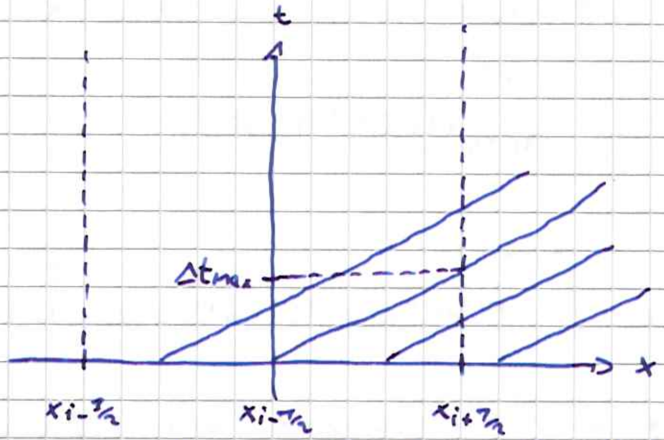
Steigung der Charakteristik $= \frac{1}{a} = 0{,}5$

2)



3) Gleiche Funktion, aber um zwei auf der x-Achse nach rechts verschoben

4)



Innerhalb eines expliziten Zeitschritts darf Information nicht über eine gesamte Zelle hinweg transportiert werden.

5) Bei nicht-äquidistanten Zellen gilt der minimale Zeitschritt, in dem Information von einer Zellseite (der kleinsten Zelle) zur anderen transportiert werden kann

(1) $$v_t + v v_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0$$
$$p_t + v p_x + \rho c^2 v_x = 0 \qquad \text{mit } \underline{u} = \begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix}$$

1) $$\begin{pmatrix} v_t \\ p_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & 1/\rho \\ \rho c^2 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad U_t + A U_x = 0$$

2) Linearisierung: Taylor-Entwicklung des Flusses um U_0

Abbrechen nach linearem Term

$$\cancel{f(u) \approx f(u_0) + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{u_0} (u - u_0) + O(\ldots)}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} v_t \\ p_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 & 1/\rho_0 \\ \rho_0 c_0^2 & v_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ p_x \end{pmatrix}}$$

~~Def. der Transportmatrix:~~ $\cancel{A = \frac{\partial f}{\partial u}}$

$\cancel{f(u) \approx f(u_0) + A(u_0)(u - u_0)}$

Einsetzen von $\underline{u} = \underline{u}_0 + \underline{\tilde{u}}$

Einsetzen $\underline{u}(x,t) = \underline{u}_0 + \underline{\tilde{u}}(x,t)$ in $U_t(x,t) + A(U)\,U_x = 0$

$$(\underline{U}_0 + \underline{\tilde{U}})_t + A(U_0 + \tilde{U})\,(\underline{U}_0 + \underline{\tilde{U}})_x = 0$$

Taylor:

$$A(U_0 + \tilde{U}) \approx A(U_0) + \frac{\partial A}{\partial U}(U_0)\,\tilde{U}$$

Einsetzen:

$$U_t + \left(A(U_0) + \frac{\partial A(U)}{\partial U}(U_0)\,\tilde{U}\right) U_x = 0 \qquad U_{0,t} = 0 \quad \text{(weil konst.)}$$

$$\tilde{U}_t + \left(A(U_0) + \cancel{\frac{\partial A}{\partial U}(U_0)\,\tilde{U}}\right) \tilde{U}_x = 0 \qquad U_{0,x} = 0$$

Term höherer Ordnung

$$\tilde{U}_t + A(U_0)\,\tilde{U}_x = 0 \quad ; \quad A(U_0) = \begin{pmatrix} v_0 & 1/\rho_0 \\ \rho_0 c_0^2 & v_0 \end{pmatrix}$$

3) $$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}_t \,dx\,dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} A(U_0)\,\tilde{U}_x \,dx\,dt = \underline{0}$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t_{n+1}) - U(x, t_n)\,dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} A(U_0)\,\tilde{U}(x_{i+1/2}, t) - A(U_0)\,\tilde{U}(x_{i-1/2}, t)\,dt = 0$$

räumlicher Zeitmittelwert

$$U_i^n := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{U}(x,t)\,dx$$

zeitlich gemittelter Fluss

$$f_{i+1/2}^n := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_n} A(U_0)\tilde{U}(x_{i\pm 1/2},t)\,d\cancel{x}t$$

Approximation durch numerischen Fluss $g_{i\pm 1/2}^n \approx f_{i\pm 1/2}^n$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right)$$

4) Eigenwerte A_0

$$\left|\begin{pmatrix} V_0-\lambda & 1/\rho_0 \\ \rho_0 C_0^2 & V_0-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$(V_0-\lambda)^2 - \tfrac{1}{\rho_0}(\rho_0 C_0^2) = 0$$

$$V_0^2 - 2V_0\lambda + \lambda^2 - C_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{+2V_0 \pm \sqrt{(2V_0)^2 - 4\cdot 1\cdot(V_0^2 - C_0^2)}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{+2V_0 \pm \sqrt{4V_0^2 - 4V_0^2 + 4C_0^2}}{2}$$

$$= \frac{+2V_0 \pm 2C_0}{2}$$

$$= -V_0 \pm C_0 \qquad \lambda_1 = +V_0 - C_0 \qquad \lambda_2 = +V_0 + C_0$$

Eigenvektoren λ_1

$$\left(\begin{array}{cc|c} V_0-(+V_0-C_0) & 1/\rho_0 & 0 \\ \rho_0 C_0^2 & V_0-(+V_0-C_0) & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} C_0 & 1/\rho_0 & 0 \\ \rho_0 C_0^2 & C_0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x C_0 + y \tfrac{1}{\rho_0} = 0 \\ x \rho_0 C_0^2 + y C_0 = 0 \end{array} \quad |:C_0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cancel{1}C_0 & 1/\rho_0 & 0 \\ \rho_0 C_0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad x\rho_0 C_0 + y = 0$$

$$x C_0 - x\rho_0 C_0 \tfrac{1}{\rho_0} = 0 \qquad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\rho_0 C_0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor λ_2

$$\left(\begin{array}{cc|c} -C_0 & 1/\rho_0 & 0 \\ \rho_0 C_0^2 & -C_0 & 0 \end{array}\right) \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_0 C_0 \end{pmatrix}$$

5) Zerlegung von A_0: $\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{R}}^{-1} \underline{\underline{A}}_0 \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} v_0 + c_0 & 0 \\ 0 & v_0 - c_0 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{\Lambda}}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_0 - c_0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\underline{\Lambda}}^+ = \begin{pmatrix} v_0 + c_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{A}}_0^- = \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\Lambda}}^- \underline{\underline{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\rho_0 c_0} \\ -\rho_0 c_0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{A}}_0^+ = \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{\Lambda}}^+ \underline{\underline{R}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\rho_0 c_0} \\ \rho_0 c_0 & 1 \end{pmatrix}$

6) Siehe Formelsammlung

7) Lösung in Matlab-Cloud

(1) $$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

a) ~~Allgemeine Form:~~

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

Typ des Gleichung mit $B^2 - 4AC$

$$5^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 9 > 0$$

$\to$ hyperbolisch

b) Charakteristiken: $$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ 1/4 \end{cases}$$

$\frac{dy}{dx} = 1$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}$
$dy = dx$	$dy = 1/4\, dx$
$\int dy = \int dx$	$\int dy = \int 1/4\, dx$
$y = x + C_1$	$y = 1/4\, x + C_2$
$C_1 = y - x$	$C_2 = y - 1/4\, X$
$\xi = C_1 = y - x$	$\eta = C_2 = y - 1/4\, x$

Transformation auf Normalform:

Ableitungen: $\xi_x = -1$ $\qquad \eta_x = -1/4$

$\xi_y = 1 \qquad \eta_y = 1$

$\xi_{xx} = 0 \qquad \eta_{xx} = 0$

$\xi_{yy} = 0 \qquad \eta_{yy} = 0$

$\xi_{xy} = 0 \qquad \eta_{xy} = 0$

Transformierte Gleichung

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_\xi + E^* u_\eta + F^* u = G^*$$

mit

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 4\cdot 1 + 5\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0$$

$$B^* = \_\_\_ = 2\cdot 4\cdot(-1)(-1/4) + 5((-1)\cdot 1 + 1(-1/4)) + 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = -\frac{9}{4}$$

$$C^* = \_\_\_ = 4\cdot(-\tfrac{1}{4})^2 + 5(-\tfrac{1}{4})(1) + 1(1)^2 = 0$$

$D^* = \ldots = 0$; $E^* = \ldots = \frac{3}{4}$; $F^* = \ldots = 0$; $G^* = \ldots = 2$

Eingesetzt in transformierte Gleichung: Normalform:

$$-\frac{9}{4} u_{\xi\eta} + \frac{3}{4} u_\eta \cancel{} = 2$$

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{3} u_\eta \cancel{} = -\frac{8}{9}$$

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{3} u_\eta - \frac{8}{9}$$ ← Transformierte Normalform

c) $v = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ Substitution

Einsetzen in Transformierte Normalform

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} = \frac{1}{3} v - \frac{8}{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{3} v - \frac{8}{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{3} v = -\frac{8}{9}$$ → Inhomogene DGL

↳ $v_{ges} = v_h + v_p$

Partikuläre Lösung

Homogene Lösung

Homogene Lösung:

$$\frac{\partial v_h}{\partial \xi} - \frac{1}{3} v_h = 0$$

$$\frac{\partial v_h}{\partial \xi} = \frac{1}{3} v_h$$

$$\frac{1}{v_h}\,\partial v_h = \frac{1}{3}\,\partial \xi$$

$$\int \frac{1}{v_h}\,\partial v_h = \int \frac{1}{3}\,\partial \xi$$

$$\ln(v_h) = \frac{1}{3}\xi + C(\eta)$$

$$v_h = \exp\left(\frac{1}{3}\xi + C(\eta)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{3}\xi\right) \cdot \underbrace{\exp(C(\eta))}_{D(\eta)}$$

$$v_h = \exp\left(\frac{1}{3}\xi\right) D(\eta)$$

Partikuläre Lösung:

Ansatz vom Typ der rechten Seite: $v_p = a = \text{const}$

Einsetzen in ~~Transformierte~~ inhomogene DGL:

$$\cancel{\frac{\partial a}{\partial \xi}}^{=0} - \frac{1}{3} a = -\frac{8}{9}$$

$$a = \frac{8}{3} \longrightarrow v_p = \frac{8}{3}$$

Gesamtlösung: $v = v_h + v_p = \exp\left(\frac{1}{3}\xi\right) D(\eta) + \frac{8}{3}$

Rücksubstitution

$v = \frac{\partial u}{\partial \eta}$

$\partial u = v \, \partial \eta$

$\int \partial u = \int v \, \partial \eta$

$u = \int D(\eta) \exp(1/3 \, \xi) + 8/3 \; \partial \eta$

$u = \underbrace{\int D(\eta) d\eta}_{G(\eta)} \; e^{1/3 \xi} + 8/3 \, \eta + f(\xi)$

$u(\xi, \eta) = G(\eta) \, e^{1/3 \xi} + \frac{8}{3} \eta + f(\xi)$

(2) $3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x)$

A B C G

a) $B^2 - 4AC = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64 > 0 \rightarrow$ hyperbolisch

b) Charakteristiken: $\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

$= \frac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} 3 \\ 1/3 \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = 3$	$\frac{dy}{dx} = 1/3$
$dy = 3 dx$	$dy = 1/3 \, dx$
$\int dy = \int 3 \, dx$	$\int dy = \int 1/3 \, dx$
$y = 3x + C_1$	$y = 1/3 \, x + C_2$
$\xi = C_1 = y - 3x$	$C_2 := \eta = y - 1/3 \, x$

Transformation auf Normalform

$\xi_x = -3$	$\eta_x = -1/3$
$\xi_y = 1$	$\eta_y = 1$
$\xi_{xx} = 0$	$\eta_{xx} = 0$
$\xi_{yy} = 0$	$\eta_{yy} = 0$
$\xi_{xy} = 0$	$\eta_{xy} = 0$

$A^* = 0$; $B^* = -\frac{64}{3}$; $C^* = 0$

$D^* = 0$; $E^* = 0$; $F^* = 0$

$G^* = \sin(x)$

Eingesetzt in Normalform

$$-\frac{64}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \sin(x) \Rightarrow$$ x durch Ausdruck ξ,η ersetzen

Lösen mit zwei Gleichungen von vorher: $\xi = y - 3x$

$x = \frac{y-\xi}{3}$; $y = \xi + 3x$ $\qquad \eta = y - \frac{1}{3}x$

$\eta = (\xi + 3x) - \frac{1}{3}x$

$\eta = \xi + \frac{8}{3}x$

$x = \frac{3}{8}(\eta - \xi) \longrightarrow G' = \sin(\frac{3}{8}(\eta-\xi))$

Normalform:

$$-\frac{64}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \sin(\frac{3}{8}(\eta-\xi))$$

$$u_{\xi\eta} = -\frac{3}{64}\sin(\frac{3}{8}(\eta-\xi))$$

Lösung der DGL: $u = u_p + u_h$

homogene Lösung:

$$\frac{\partial^2 u_h}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \quad \Big| \int d\xi$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial\eta} = f_h(\eta) \quad \Big| \int d\eta$$

$$u_h = \underbrace{\int f_h(\eta)d\eta}_{F_h(\eta)} + g_h(\xi)$$

$$u_h = F(\eta) + g(\xi)$$

partikuläre Lösung:

$$u_{p\xi\eta} = -\frac{3}{64}\sin(\frac{3}{8}(\eta-\xi)) \quad \Big| \int d\eta$$

$$u_{p\xi} = -\frac{3}{64}\int \sin(\frac{3}{8}\eta - \frac{3}{8}\xi)d\eta$$

$$u_{p\xi} = -\frac{3}{64}\left(-\cos(\frac{3}{8}\eta-\frac{3}{8}\xi)\frac{8}{3}\right) + f_p(\xi)$$

$$u_{p\xi} = \frac{1}{8}\cos(\frac{3}{8}(\eta-\xi)) + f_p(\xi) \quad \Big| \int d\xi$$

$$u_p = \frac{1}{8}\int \cos(\frac{3}{8}\eta - \frac{3}{8}\xi) + f_p(\xi)d\xi$$

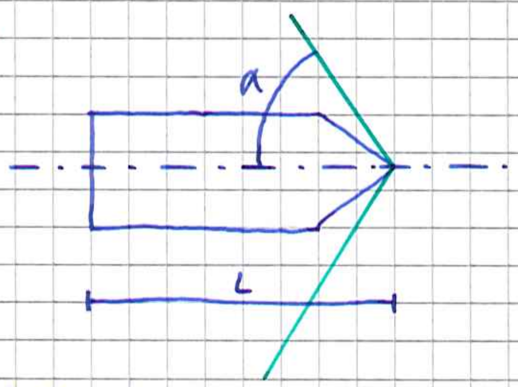
$$u_p = \frac{1}{8}\left(-\frac{8}{3}\sin(\frac{3}{8}(\eta-\xi))\right) + F_p(\xi) + g_p(\eta)$$

$$u_p = -\frac{1}{3}\sin(\frac{3}{8}(\eta-\xi)) + F_p(\xi) + g_p(\eta)$$

$$\longrightarrow \quad u = u_h + u_p = \underbrace{F_h(\eta) + \underbrace{g_h(\xi) + F_p(\xi)}_{F(\xi)} + g_p(\eta)}_{g(\eta)} - \frac{1}{3}\sin(\frac{3}{8}(\eta-\xi))$$

$$u = F(\xi) + g(\eta) - \frac{1}{3}\sin(\frac{3}{8}(\eta-\xi))$$

① Skizze:



Ist κ = Kelvin-Winkel, also

$\kappa \approx 20°$

ges: $\alpha = f(g, \rho, v, L)$

Dimensionsmatrix α_{ij}

	g	ρ	v	L	α
L	1	-3	1	1	0
M	0	1	0	0	0
T	-2	0	-1	0	0

$\Pi_1 = \alpha$

Anzahl dimensionsloser Produkte:

$d = n - r = 5 - 3 = 2$

Voller Rang, weil g, ρ und L eine Dreiecksmatrix bilden

↳ linear unabhängig

	$\frac{gL}{v^2}$	ρ	v	L	α
L	~~0~~	-3	1	1	0
M	0	1	0	0	0
T	0	0	-1	0	0

$\Pi_2 = \frac{gL}{v^2}$

$\rightarrow \alpha = f\left(\frac{gL}{v^2}\right)$

② ges: $a = f(p, \rho)$

$[p] = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m s^2}$

	a	p	ρ
L	1	-1	-3
M	0	1	1
T	-1	-2	0

	a	p/ρ	ρ
L	1	2	-3
M	0	0	1
T	-1	-2	0

a, $\frac{p}{\rho}$ linear abhängig $\rightarrow r = 2$

$d = n - r = 1$

	a	$\frac{p}{\rho a^2}$	ρ
L	1	0	-3
M	0	0	1
T	-1	0	0

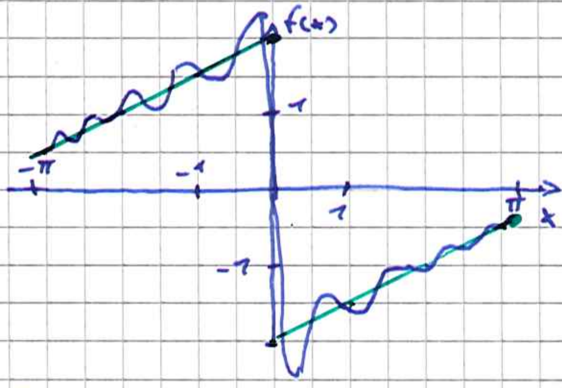
$\Pi_1 = \frac{p}{\rho a^2}$

$const = \frac{p}{\rho a^2}$

$a = \sqrt{const \, \frac{p}{\rho}}$

Für ideale Gase gilt $const = \kappa$

mit $\kappa \mathrel{\hat{=}}$ Adiabaten-Exponent



(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & -\pi < x \le 0 \\ \frac{1}{2}x - 2 & 0 < x \le \pi \end{cases}$

a)
b)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

Ungerade Funktion $\rightarrow$ $a_n = 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

$$f(x)\sin(m\omega x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)\sin(m\omega x)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n\omega x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(n\omega x)\sin(m\omega x)\,dx}_{=0 \text{ für } n\neq m\ ;\ =\pi \text{ für } n=m}$$

Alle Terme mit $n \neq m$ sind Null

$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(n\omega x)\,dx}_{I_1} = b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\omega n x)}_{I_2} \qquad b_n = \frac{I_1}{I_2}\ ;\ \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Funktion in zwei Teile zerlegen:

$$I_1 = \int_{-\pi}^{0} (1/2\,x + 2)\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} (1/2\,x - 2)\sin(nx)\,dx$$

$$= -\frac{\pi-4}{n}\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} + \underbrace{\frac{\sin(n\pi)}{n^2}}_{=0} - \frac{4}{n}$$

$$= \frac{4-\pi}{n}(-1)^n - \frac{4}{n}$$

$$I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx$$

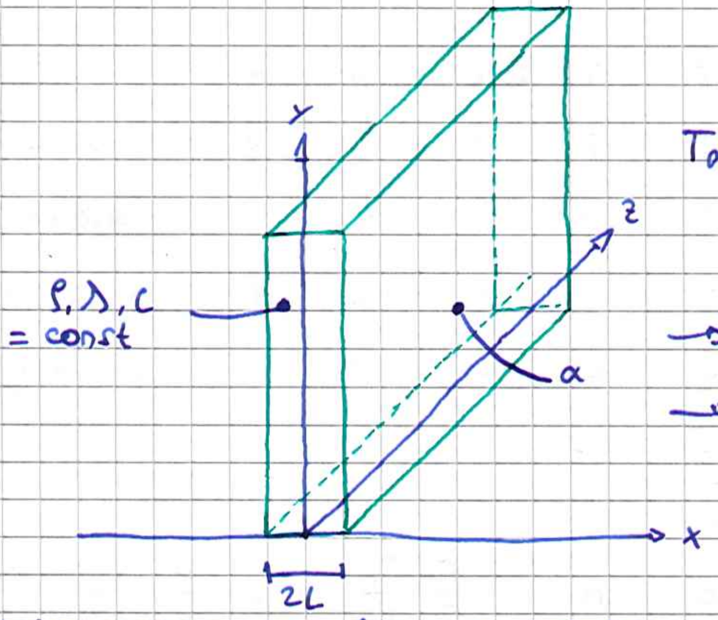
$$= -\frac{1}{2n}\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} + \pi$$

$$= \pi$$

$$b_n = \frac{4-\pi}{\pi n}(-1)^n - \frac{4}{\pi n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4-\pi}{\pi n}(-1)^n - \frac{4}{\pi n}\right)\sin(nx)$$

Analytik Übung 4



T_∞

$h >> L$
$b >> L$

→ Eindimensionale

→ Instationär

a) Homogene Wärmeleitungsgleichung (ohne zusätzliche Wärmequellen)

$$\frac{\partial}{\partial t} T = + a \, \Delta T$$

Δ ≙ Laplace-Operator

a: Temperatur-Leitzahl $a = \lambda / \rho c$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2}{\partial y^2}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}}_{=0}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ ⟶ parabolische DGL (siehe Zusammenfassung [1])

b) Randbedingungen

Zeitlich : $t = 0$: $T(x, t=0) = T_i$

Räumlich : $x = 0$: $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$

$x = L$: $\underbrace{-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L}}_{\text{Wärmestrom auf Plattenseite}} = \underbrace{\alpha \, (T(t, x=L) - T_\infty)}_{\text{Wärmestrom auf Fluid-Seite}}$

α: Wärmeübertragungskoeffizient

c) Ansatz zur Vereinfachung : Dimensionsanalyse (siehe Zusammenfassung [3])

$$T = f(\underbrace{x, t, a}_{\text{Gleichung}}, \underbrace{T_i, T_\infty, L, \lambda, \alpha}_{\text{Randbedingungen}}, \cancel{\ldots})$$

	T	x	t	a	T_i	T_∞	L	λ	α
L	0	1	0	-1	0	0	1	1	0
M	0	0	0	0	0	0	0	1	1
τ	0	0	1	1	0	0	0	-3	-3
Θ	1	0	0	0	1	1	0	-1	-1

Hier auch irgendwo ein dim-Fehler (vermutlich a)

~~Vollständig: T, x, t, a, α sind dim. unabhängig (Dreiecksform)~~

Vereinfachung über Berechnung der Dimensionslosen Temperatur :

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = f(x, t, a, L, \lambda, \alpha)$$

	$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}$	x	t	a	L	λ	α
L	0	1	0	2	1	1	0
M	0	0	0	0	0	1	1
τ	0	0	1	-1	0	-3	-3
Θ	0	0	0	0	0	-1	-1

$d = n - r = 7 - \cancel{4}\,3 = \cancel{3}\,4$

~~Voller Rang~~

x, t, a ; x, L ; λ, L, α lin. abh.

→ Rang 3

	$\Pi_1 = \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{ta}{L^2}$	$\frac{\alpha L}{\lambda}$
L		0	0	0
M		0	0	0
τ		0	0	0
Θ		0	0	0

$$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = f\left(\frac{x}{L}, \frac{ta}{L^2}, \frac{\alpha L}{\lambda}\right)$$
$$\Theta = f(\xi, \tau, Bi)$$
$$\Theta = \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty}$$
$$T = (T_i - T_\infty)\Theta + T_\infty$$

Einsetzen in DGL aus a):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((T_i - T_\infty)\Theta + T_\infty\right) = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left((T_i - T_\infty)\Theta + T_\infty\right)$$
$$(T_i - T_\infty)\frac{\partial\Theta}{\partial t} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial T_\infty}{\partial t}}}_{=0} = a(T_i - T_\infty)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} + a\underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 T_\infty}{\partial x^2}}}_{=0}$$
$$\cancel{(T_i - T_\infty)}\frac{\partial\Theta}{\partial t} = a\cancel{(T_i - T_\infty)}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = a\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}$$

Transformation der Koordinaten (siehe Zusammenfassung Seite 7)

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} \qquad \text{mit } \tau = \frac{ta}{L^2}$$
$$= \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ta}{L^2}\right)$$
$$= \frac{a}{L^2}\frac{\partial}{\partial\tau}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} \qquad \text{mit } \xi = \frac{x}{L}$$
$$= \frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{L}\right)$$
$$= \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\xi}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$$

Einsetzen liefert: $\cancel{\frac{a}{L^2}}\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \cancel{\frac{a}{L^2}}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi}$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi}$$

Analytik Übung 4

Transformation der Randbedingungen

$t = 0 \quad : \quad T = T_i \longrightarrow \tau = \frac{\overset{\text{hier}=0}{t}\, a}{L^2} = 0 \longrightarrow \Theta(\xi, \tau = 0) = \frac{T_i - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 1$

$x = 0 \quad : \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \longrightarrow \xi = \frac{\overset{\text{hier}=0}{x}}{L} = 0 \longrightarrow \Theta(\xi = 0; \tau) = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$

$T = (T_i - T_\infty)\Theta + T_\infty \rightarrow \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \xi}\left((T_i - T_\infty)\Theta + T_\infty\right)\Big|_{\xi=0} = 0$

$\frac{1}{L}\cancel{(T_i - T_\infty)}\left.\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} + \cancel{\frac{\partial T_\infty}{\partial \xi}}^{=0}\Big|_{\xi=0} = 0$

$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0$

$x = L \qquad -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=L} = \alpha\,(T(t, x = L) - T_\infty)$

$\tau = \frac{t a}{L^2} = \frac{t}{L} \qquad \xi = \frac{\overset{\xi=L}{x}}{L} = 1$

~~$\alpha \frac{1}{L}\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\Big|_{\xi=1}$ = …~~

~~…~~

$-\lambda \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \xi}\left((\cancel{T_i - T_\infty})\Theta + T_\infty\right)\Big|_{\xi=1} = \alpha\left((\cancel{T_i - T_\infty})\Theta + \cancel{T_\infty}\right) - \cancel{T_\infty})$

$-\frac{\lambda}{\cancel{L}}\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \cancel{\frac{\lambda}{L}\frac{\partial T_\infty}{\partial \xi}}^{=0} = \alpha\,\Theta$

$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = -\underbrace{\frac{\alpha L}{\lambda}}_{Bi}\Theta(\tau, \xi = 1)$

$\left.\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} + Bi\,\Theta(\tau, \xi = 1) = 0$

Zwischenstand: Dimensionsloses Problem:

DGL : $\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}$

RB : $\tau = 0 \quad : \quad \Theta(\xi, \tau = 0) = 1$

$\xi = 0 \quad : \quad \left.\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0$

$\xi = 1 \quad : \quad \left.\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} + Bi\,\Theta(\xi = 1, \tau) = 0$

Lösen mit Produktansatz : $\Theta(\tau, \xi) = F(\tau) \cdot G(\xi)$

$\frac{\partial(F(\tau)\,G(\xi))}{\partial \tau} = \frac{\partial^2(F(\tau)\,G(\xi))}{\partial \xi^2}$

$G(\xi)\,\frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 G(\xi)}{\partial \xi^2}\,F(\tau)$

~~F(τ) G(ξ)~~ $\longrightarrow G(\xi)\,F'(\tau) = G''(\xi)\,F(\tau)$

~~G(ξ) ∂F(τ)/∂τ~~ $\quad \frac{F'(\tau)}{F(\tau)} = \frac{G''(\xi)}{G(\xi)}$

~~…~~

Lösungsansatz für ~~Ga~~ $F(\tau)$

$F'(\tau) / F(\tau) = C_1$

$F'(\tau) - F(\tau) C_1 = 0 \quad \rightarrow F(\tau) = e^{C_1 \tau} \cdot C_2$ Warum?

Für $\tau \rightarrow \infty$ würde $F(\tau) \rightarrow \infty$ (unphysikalisch)

daher $C_1 \overset{!}{=} -\beta^2$

$F(\tau) = C_2 e^{-\beta^2 \tau}$

Lösungsansatz für $G(\xi)$

$G''(\xi) / G(\xi) = C_1 = -\beta^2$ ← Woher weiß ich, dass die gleich sein müssen??

$G''(\xi) + G(\xi)\beta^2 = 0$

$G(\xi) = C_3 \cos(\beta\xi) + C_4 \sin(\beta\xi)$

$\longrightarrow \Theta(\tau,\xi) = C_2 e^{-\beta^2\tau} (C_3 \cos(\beta\xi) + C_4 \sin(\beta\xi))$

$= e^{-\beta\tau} (\underbrace{C_2 C_3}_{=:A} \cos(\beta\xi) + \underbrace{C_2 C_4}_{=:B} \sin(\beta\xi))$

konstanten können zusammengezogen werden

$\Theta(\tau,\xi) = e^{-\beta\tau} (A \cos(\beta\xi) + B \sin(\beta\xi))$

Einsetzen der Randbedingungen:

$\tau = 0 \rightarrow \Theta = 1 : \underbrace{\cancel{e^{-\beta 0}}}_{=1} (A \cos(\beta\xi) + B \sin(\beta\xi)) = 1$

$\xi = 0 \rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = 0 : e^{-\beta\tau} (-A \sin(0) + B \cos(0)) = 0$

$e^{-\beta\tau} \cdot B = 0 \longrightarrow B = 0$

$\xi \rightarrow 1 (A \cos(\beta\xi) + \overset{0}{B} \sin(\beta\xi)) = 1$

$A \cos(\beta\xi) = 1$

$\xi = 1 \rightarrow \frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\Big|_{\xi=1} + Bi\, \Theta(\tau, \xi=1) = 0$

$= e^{-\beta\tau} (-\beta A \sin(\beta) + \underbrace{\cancel{B \cos(\beta)\beta}}_{B=0}) + Bi\, \Theta(\tau,\xi=1) = 0$

$= -e^{-\beta\tau} A\beta \sin(\beta) + Bi\, e^{-\beta\tau} A \cos(\beta) = 0$

$= \cancel{e^{-\beta\tau}} Bi\, A \cos(\beta) = \cancel{e^{-\beta\tau}} A\beta \sin(\beta)$

$= A (Bi \cos(\beta) - \beta \sin(\beta)) = 0$

↳ Triviale Lösung für $A = 0$

$\rightarrow \cot(\beta) = \frac{1}{Bi} \beta$

↯ Anfangsbedingung kann mit einer Lösung nicht erfüllt werden

$\longrightarrow$ Neuer Ansatz auf nächster Seite.

Neuer Ansatz für $\Theta(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n^2 \tau} \cos(\beta_n \xi)$

$\tau = 0$: $\Theta(\xi, \tau=0) = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\beta_n \xi) A_n = 1 \qquad | \cdot \cos(\beta_m \xi)$

$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^{\cancel{2}}(\beta_n \xi) \cdot \cos(\beta_m \xi) A_n = \cos(\beta_n \xi)$

$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 \cos(\beta_n \xi) d\xi = \int_0^1 \cos(\beta_n \xi) d\xi}$

$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 \underbrace{\cancel{\cos(\beta_n \xi) \cos(\beta_m \xi)}}_{=0 \text{ für } n \neq m} d\xi = \int_0^1 \cos(\beta_m \xi) d\xi$

$n = m$:

$A_n \underbrace{\int_0^1 \cos^2(\beta_n \xi) d\xi}_{I_1} = \underbrace{\int_0^1 \cos(\beta_n \xi) d\xi}_{I_2} \quad ; \quad A_n = \frac{I_2}{I_1}$

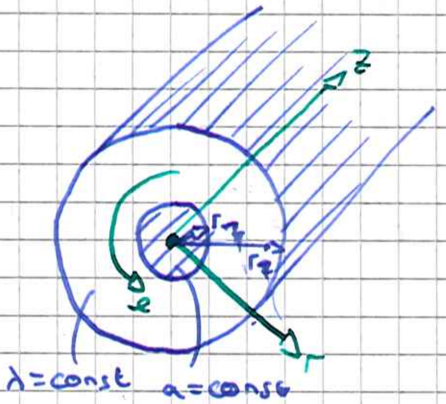
$A_n = \frac{4\sin(\beta)}{\sin(2\beta) + 2\beta}$

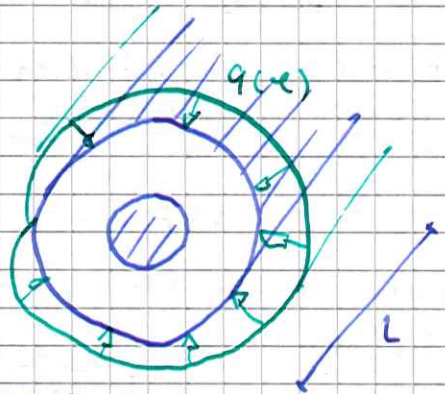
Lösung :

$\Theta(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(\beta)}{\sin(2\beta)+2\beta} e^{-\beta_n^2 \tau} \cos(\beta_n)$

$T(x,t) = (T_i - T_\infty) \Theta(\xi, \tau) + T_\infty$

$= (T_i - T_\infty) \Theta\left(\frac{x}{L}, \frac{at}{L^2}\right) + T_\infty$





$L >> r_1, r_2$
q ist 2π-Periodisch

a) Fouriersche Wärmeleitungsgleichung (Aus FS)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\,\Delta T + \frac{\dot q_i}{\rho c} \qquad \text{Mit} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

$$\underbrace{\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}}_{=0} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}}_{=0,\ L>>r_1,r_2}\right) + \underbrace{\cancel{\frac{\dot q_i}{\rho c}}}_{=0 \text{ keine Quelle}}$$

instationäres Problem

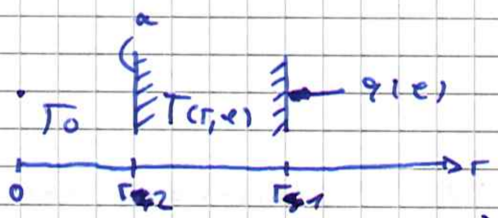
$$0 = \frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$0 = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}$$

Lineare PDE 2. Ordnung mit $A = 1 \quad B = 0 \quad C = \frac{1}{r^2} \quad D = \frac{1}{r}$

$B^2 - 4AC = -\frac{4}{r^2} < 0 \longrightarrow$ Elliptisch

b)



$T_0 = \cancel{400}\ 330\,°C$

innen:
$q_{wü} = q_{wL} \longrightarrow \alpha\,(T_0 - T(r=r_2)) = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r_2}$

~~$q_{wü} = q_{wL}$ ...~~

außen:
$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r_1} = -q(\varphi)$$

Weitere Bedingungen für φ:

2π-Periodisch über φ: $T(r,\varphi) = T(r,\varphi+2\pi)$

q(φ) ist Achsensymmetrisch: $T(r,\varphi) = T(r,-\varphi)$

c) Lösen der DGL $\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = 0$

Ansatz : Seperation der Variablen : $T(r,\varphi) = F(r)\,G(\varphi)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(F(r)G(\varphi))}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2(F(r)G(\varphi))}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(F(r)G(\varphi))}{\partial r} = 0$$

$$\frac{1}{r^2}F(r)G''(\varphi) + G(\varphi)F''(r) + \frac{1}{r}G(\varphi)F'(r) = 0$$

$$F(r)G''(\varphi) + G(\varphi)(F''(r) + \tfrac{1}{r}F'(r))r^2 = 0$$

$$\frac{(F''(r)+\frac{1}{r}F'(r))r^2}{F(r)} = -\frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)}$$

$$\frac{r^2F''(r)+rF'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\varphi)}{G(\varphi)} = \pm\lambda^2$$ Muss konstant sein

$+\lambda^2$ auswählen

$$G''(\varphi) + \lambda G(\varphi) = 0$$

Lösungsansatz aus Formelsammlung : $G(\varphi) = A\cos(\lambda\varphi) + B\sin(\lambda\varphi)$

$$G'(\varphi) = -\lambda A\sin(\lambda\varphi) + \lambda B\cos(\lambda\varphi)$$

$$G''(\varphi) = -\lambda^2 A\cos(\lambda\varphi) - \lambda^2 B\sin(\lambda\varphi)$$ Einsetzen liefert :

$$-\lambda^2 A\cos(\lambda\varphi) - \lambda^2 B\sin(\lambda\varphi) + \lambda A\cos(\lambda\varphi) + \lambda B\sin(\lambda\varphi) = 0$$

$$\cos(\lambda\varphi)(-\lambda^2A + \lambda A) + \sin(\lambda\varphi)(-\lambda^2 B + \lambda B) = 0$$

Einsetzen in Randbedingungen und weitere Bedingungen

$$T(r,\varphi) = T(r,-\varphi)$$

$$F(r)G(\varphi) = F(r)G(-\varphi)$$

$$G(\varphi) = G(-\varphi)$$

$$A\cos(\lambda\varphi) + B\sin(\lambda\varphi) = A\cos(-\lambda\varphi) + B\sin(-\lambda\varphi)$$ $\cos(x) = \cos(-x)$

$$B\sin(\lambda\varphi) = B\sin(-\lambda\varphi)$$ $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$2B\sin(\lambda\varphi) = 0 \qquad B = 0$$

$$T(r,\varphi) = T(r,\varphi+2\pi)$$

$$F(r)G(\varphi) = F(r)G(\varphi+2\pi)$$

$$A\cos(\lambda\varphi) + B\sin(\lambda\varphi) = A\cos(\lambda(\varphi+2\pi)) + B\sin(\lambda(\varphi+2\pi)) \qquad B=0$$

$$\cos(\lambda(\varphi+2\pi)) - \cos(\lambda\varphi) = 0$$

$$\underline{\cos(\lambda\varphi)\cos(\lambda 2\pi)} - \sin(\lambda\varphi)\sin(2\pi\lambda) = \underline{\cos(\lambda\varphi)}$$

Koeffizientenvergleich $\quad \lambda = n$ mit $n = 0,1,2,\dots$

$$\cos(2\pi\lambda) = 1 \quad ; \quad -\sin(2\pi\lambda) = 0 \longrightarrow G(\varphi) = A\cos(n\varphi)$$

Analytik Übung 5 B'

$$\frac{r^2}{F(r)}F''(r) + \frac{r}{F(r)}F'(r) = +\lambda^2 = n^2$$

Für $\lambda \neq 0$: $F_\lambda = C_\lambda x^\lambda + D_\lambda x^{-\lambda}$

Für $\lambda = 0$; $F_0 = \cancel{A}^{C_0}\ln(x) + \cancel{B}^{D_0}$

Lösungsansatz für $T(r,\varphi)$ mit Superposition:

$$T(r,\varphi) = T_0(r,\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(r,\varphi)$$

$$= (C_0\ln(r) + D_0)A_0\cancel{\cos(0\cdot\varphi)}^{=1} + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^n + D_n r^{-n})A_n\cos(n\varphi)$$

$$= \underbrace{A_0C_0}_{A_0}\ln(r) + \underbrace{A_0D_0}_{B_0} + \sum_{n=1}^{\infty}(\underbrace{A_nC_n}_{C}r^n + \underbrace{A_nD_n}_{D}r^{-n})\cos(n\varphi)$$ (neue Variablen)

$$T(r,\varphi) = A_0\ln(r) + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^n + D_n r^{-n})\cos(n\varphi)$$

Ermittlung von A_0, B_0, C_n, D_n durch einsetzen in Randbedingung

$r = r_1$: $+\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r_1} = +q(\varphi)$

$$\lambda\frac{A_0}{r_1} + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^{n-1} D_n r^{-n-1})\cos(n\varphi) = \underbrace{Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n\cos(n\varphi)}_{q(\varphi)\text{ als Fourier-Reihe}}$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n(C_n r_1^n - D_n r_1^{-n})\cos(n\varphi) = \frac{r_1}{\lambda}Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_1}{\lambda}Q_n\cos(n\varphi)$$

Linke und rechte Seite haben gleiche Struktur $\rightarrow$ Koeffizientenvergleich

$$A_0 = \frac{r_1}{\lambda}Q_0$$

$$C_n r_1^n - D_n r_1^{-n} = \frac{r_1}{n\lambda}Q_n \quad \text{I}$$

$r = r_2$ liefert:

$$A_0 = \frac{r_1Q_0}{\lambda}\left(\frac{1}{B_i} - \ln(r_2)\right)$$

$$C_n = -\frac{B_i + n}{r_2^{2n}(B_i - n)}D_n \quad \text{II}$$

I in II liefert finale Lösung:

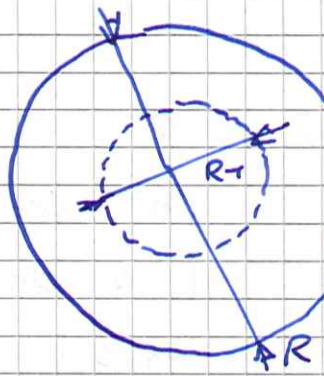
$$T(r,\varphi) = A_0 + B_0\ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n r^n + D_n r^{-n})\cos(n\varphi)$$

mit $A_0 = \frac{r_1Q_0}{\lambda}\left(\frac{1}{B_i} - \ln(r_2)\right)$

$B_0 = \frac{r_1Q_0}{\lambda}$

$C_n = \ldots$

$D_n = \ldots$



$C = 1000 \frac{m}{s}$

Rotationssymmetrisch : φ = konst

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}}}_{=0} \right]$$

a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right]$$

Dimensionslos mit $\tilde{r} = \frac{r}{R}$ $\quad \tilde{t} = \frac{ct}{R}$ $\quad \tilde{u} = \frac{u}{R}$

$u = \tilde{u} \cdot R \qquad r = \tilde{r} R \qquad t = \frac{\tilde{t} R}{c}$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \frac{c}{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \frac{1}{R}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{R}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\right) = \left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}\right) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2}$$

$$\left(\frac{c}{R}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{t}^2}(\tilde{u}R) = c^2 \left[\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2}(\tilde{u}R) + \frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{u}R) \right]$$

$$\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{R}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} = \cancel{c^2} \left[\frac{1}{\cancel{R}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}\cancel{R}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} = 0$$

b)

$t = 0$: $\quad u(r, t=0) = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{für } r > R_1 \\ v_1 & \text{für } r < R_1 \end{cases}$$

$r = 0$: $\quad u(r=0, t) =$ endlich

$r = R$: $\quad u(r=R, t) = 0$ $\quad$ (Einspannung am Rand)

2!

Randbedingungen Dimensionslos:

$$\tilde{t} = 0 : \quad \tilde{U}(\tilde{r}, \tilde{t} = 0) = 0$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}}\right|_{\tilde{t}=0} = \begin{cases} 0 & \text{für } \tilde{r} > \frac{R_1}{R} \\ V_1/c & \text{für } \tilde{r} < \frac{R_1}{R} \end{cases}$$

$$\tilde{r} = 0 : \quad \tilde{U}(\tilde{r} = 0, \tilde{t}) = \text{endlich}$$

$$\tilde{r} = 1 : \quad \tilde{U}(\tilde{r} = 1, \tilde{t}) = 0$$

DGL: $$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{r}} = 0$$

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 > 0 \rightarrow \text{Hyperbolisch}$$

c) Seperation der Variablen: $\tilde{U}(\tilde{r}, \tilde{t}) = G(\tilde{r}) H(\tilde{t})$

$$\frac{\partial^2 G(\tilde{r}) H(\tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 G(\tilde{r}) H(\tilde{t})}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial G(\tilde{r}) H(\tilde{t})}{\partial \tilde{r}} = 0$$

$$G(\tilde{r}) H''(\tilde{t}) - H(\tilde{t}) G''(\tilde{r}) - \frac{1}{\tilde{r}} H(\tilde{t}) G'(\tilde{r}) = 0$$

$$G(\tilde{r}) H''(\tilde{t}) = H(\tilde{t}) G''(\tilde{r}) + \frac{1}{\tilde{r}} H(\tilde{t}) G'(\tilde{r})$$

$$\frac{G(\tilde{r}) H''(\tilde{t})}{H(\tilde{t})} = G''(\tilde{r}) + \frac{1}{\tilde{r}} G'(\tilde{r})$$

$$\frac{H''(\tilde{t})}{H(\tilde{t})} = G''(\tilde{r}) \frac{1}{G(\tilde{r})} + \frac{1}{\tilde{r}} G'(\tilde{r}) \frac{1}{G(\tilde{r})}$$

$$\frac{H''(\tilde{t})}{H(\tilde{t})} = \frac{G''(\tilde{r}) + \frac{1}{\tilde{r}} G'(\tilde{r})}{G(\tilde{r})} = \pm \lambda^2$$

~~Ansatz $\frac{H''(\tilde{t})}{H(\tilde{t})} = -\lambda^2$ eingesetzt in RB~~

~~$H(\tilde{t}) = A \cos(\lambda \tilde{t}) + B \sin(\lambda \tilde{t})$~~

~~$H(\tilde{t} = 0) = 0 \rightarrow A = 0$~~

~~$\left.\frac{\partial H(\tilde{t})}{\partial \tilde{t}}\right|_{\tilde{t}=0} = 0$ für $\tilde{r} > \frac{R_1}{R}$; $= \frac{V_1}{c}$ für $\tilde{r} < \frac{R_1}{R}$~~

~~$\lambda B \cos(\lambda \tilde{t}_0) = 0 \Rightarrow B = 0$ für $\tilde{r} > \frac{R_1}{R}$~~

~~$\lambda B \cos(\lambda \tilde{t}_0) = \frac{V_1}{c} \Rightarrow B = \frac{V_1}{c\lambda}$ für $\tilde{r} < \frac{R_1}{R}$~~

$$\frac{G''(\tilde{r}) + \frac{1}{\tilde{r}} G'(\tilde{r})}{G(\tilde{r})} = -\lambda^2$$

$$G''(\tilde{r}) + \frac{1}{\tilde{r}} G'(\tilde{r}) + \lambda^2 G(\tilde{r}) = 0 \quad \rightarrow \text{Besselfkt.}$$

$$G(\tilde{r}) = C\, J_0(\lambda \tilde{r}) + D\, Y_0(\lambda \tilde{r})$$

Ansätze in RB einsetzen:

$\tilde{t} = 0 \qquad G(\tilde{r})\,H(0) = 0$

$H(0) = 0$

$A\cos(\lambda\cdot 0) + B\sin(\lambda\cdot 0) = 0 \quad \rightarrow A = 0$

$\tilde{r} = 0 \qquad G(0)\,H(\tilde{t}) = \text{endlich}$

$C J_0(\lambda\cdot 0) + D\underbrace{Y_0(\lambda\cdot 0)}_{\to -\infty} = \text{endlich} \qquad D = 0$

$\tilde{r} = 1 \qquad G(1)\,H(\tilde{t}) = 0$

$C J_0(\lambda) = 0 \qquad C \neq 0$, sonst triviale Lösung

λ = Nullstellen der Besselfkt.

$\lambda = 2{,}4048,\ 5{,}5201,\ 8{,}6537,\ \ldots$

Superposition für inhomogene Randbedingungen:

$$\tilde{c}(\tilde{r},\tilde{t}) = \sum_{N=1}^{\infty} C_N J_0(\lambda_N \tilde{r})\,B_N\sin(\lambda_N \tilde{t})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_n J_0(\lambda_n \tilde{r})\sin(\lambda_n \tilde{t})$$

$E_n \mathrel{\hat{=}} C_N B_N$

AB nutzen:

$$\tilde{t} = 0 : \quad \left.\frac{\partial \hat{c}}{\partial \tilde{t}}\right|_{t=0} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{für } \tilde{r} > \frac{R_1}{R} \\ \frac{v_1}{c} & \text{für } \tilde{r} < \frac{R_1}{R} \end{array}\right\} := V_0(\tilde{r})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_n J_0(\lambda_n \tilde{r})\,\lambda_n\cos(\lambda_n\cdot 0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \lambda_n J_0(\lambda_n \tilde{r}) \qquad \Big|\cdot \tilde{r} J_0(\lambda_m \tilde{r}) \qquad \Big|\int_0^1 d\tilde{r}$$

$$\int_0^1 V_0(\tilde{r})\tilde{r} J_0(\lambda_m \tilde{r})\,d\tilde{r} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\lambda_n \underbrace{\int_0^1 \tilde{r} J_0(\lambda_n \tilde{r}) J_0(\lambda_m \tilde{r})\,d\tilde{r}}_{=0 \text{ für } n\neq m}$$

$$\underbrace{\int_0^1 V_0(\tilde{r})\tilde{r} J_0(\lambda_n \tilde{r})\,d\tilde{r}}_{I_1} = E_n\lambda_n \underbrace{\int_0^1 \tilde{r} J_0(\lambda_n \tilde{r})^2\,d\tilde{r}}_{I_2}$$

~~$V_0(\tilde{r})\tilde{r} J_0(\lambda_n \tilde{r}) = E_n\lambda_n \frac{\tilde{r}^2}{2}\left[J_0^2(\lambda_n\tilde{r}) + J_1^2(\lambda_n\tilde{r})\right]$~~

Integrale auswerten: I_1 :

$$\int_0^1 V_0(\tilde r)\,\tilde r\, J_0(\lambda_n \tilde r)\, d\tilde r$$

$$= \int_0^{\frac{R_1}{R}} \underbrace{V_0(\tilde r)}_{=\frac{V_1}{C}}\,\tilde r\, J_0(\lambda_n \tilde r)\, d\tilde r + \int_{\frac{R_1}{R}}^1 \underbrace{V_0(\tilde r)}_{=0}\,\tilde r\, J_0(\lambda_n \tilde r)\, d\tilde r$$

Substitution : $x = \lambda_n \tilde r$; $\frac{dx}{d\tilde r} = \lambda_n \rightarrow d\tilde r = \frac{dx}{\lambda_n}$

$\tilde r = \frac{x}{\lambda_n}$

$$\frac{V_1}{C}\int \frac{x}{\lambda_n} J_0(x)\frac{1}{\lambda_n}\,dx$$

$$\frac{V_1}{\lambda_n^2 C}\int x\, J_0(x)\,dx$$

$$\frac{V_1}{\lambda_n^2 C}\left[x\, J_1(x)\right]$$ Resubs.

$$\frac{V_1}{\lambda_n^2 C}\left[\lambda_n \tilde r\, J_1(\lambda_n \tilde r)\right]_0^{\frac{R_1}{R}} = \frac{V_1}{\lambda_n^2 C}\left(\frac{R_1}{R}\lambda_n\, J_1\left(\frac{R_1}{R}\lambda_n\right)\right)$$

$$= \frac{V_1 R_1}{\lambda_n R C}\, J_1\left(\frac{R_1}{R}\lambda_n\right)$$

Integrale auswerten: I_2:

$$\int_0^1 \tilde r\, J_0(\lambda_n \tilde r)^2\, d\tilde r$$

Subs : $x = \lambda_n \tilde r$ $\quad \frac{dx}{d\tilde r} = \lambda_n \rightarrow d\tilde r = \frac{1}{\lambda_n}dx$

$\tilde r = \frac{x}{\lambda_n}$

$$\int \frac{x}{\lambda_n^2} J_0(x)^2\,dx$$

$$\frac{1}{\lambda_n^2}\int x\, J_0(x)^2\,dx = \frac{1}{\lambda_n^2}\left[\frac{x^2}{2}\left(J_0(x)^2 + J_1(x)^2\right)\right]$$ Resubs.

$$= \frac{1}{\lambda_n^2}\left[\frac{\lambda_n^2 \tilde r^2}{2}\left(J_0(\lambda_n \tilde r)^2 + J_1(\lambda_n \tilde r)^2\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^2}\left(\frac{\lambda_n^2}{2}\left(J_0(\lambda_n)^2 + J_1(\lambda_n)^2\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(J_0(\lambda_n)^2 + J_1(\lambda_n)^2\right)$$

$$\rightarrow \frac{V_1 R_1}{\lambda_n R C} J_1\left(\frac{R_1}{R}\lambda_n\right) = \lambda_n E_n \frac{1}{2}\left(J_0(\lambda_n)^2 + J_1(\lambda_n)^2\right)$$

$$E_n = \frac{2\, J_1\left(\frac{R_1}{R}\lambda_n\right) R_1 V_1}{C\cdot\left(\underbrace{J_0(\lambda_n)}_{=0}{}^2 + J_1(\lambda_n)^2\right)\cdot \lambda_n^2 \cdot R}$$

Gesamtlösung:

$$\tilde{U}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\frac{R_1}{R}\lambda_n) R_1 v_1}{(J_1(\lambda_n))^2 \lambda_n^2 R} J_0(\lambda_n \tilde{r}) \sin(\lambda_n \tilde{t})$$

d) Rücktransformation

$$U(r,t) = R \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_1(\frac{R_1}{R})\lambda_n R_1 v_1}{(J_1(\lambda_n))^2 \lambda_n^2 R} J_0(\lambda_n \frac{r}{R}) \sin(\lambda_n \frac{ct}{R})$$

Grafische Darstellung mit Besselfkt. in Matlab

Analytik Übung 7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$\Theta = 90°$ $\quad r(\varphi) = R = \text{const.}$

a) $B^2 - 4AC = -4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{4}{r^2} < 0 \longrightarrow$ Elliptisch

b) ~~[illegible] $u(r=0,\varphi)=0$ ... $\varphi=0$: $u(r,\varphi=0)=0$~~

~~$\frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=0} = 0$~~

~~$r = R$: $\frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=R} = \frac{\tau_w}{\mu L}$~~

~~Symmetrie: $u(r,\varphi) = u(r,-\varphi)$~~

~~$\varphi = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\partial u}{\partial \varphi}\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0$~~

Haftbedingung : $\varphi = 0$: $u(r, \varphi=0) = 0$

$r = 0$: $u(r=0, \varphi) = 0$

Symmetrie : $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\partial u}{\partial \varphi}\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0$

Energieeintrag $(r=R)$: $\frac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=R} = \frac{\tau_w}{\mu L}$

c) Ansatz : $u(r,\varphi) = F(r)\,\phi(\varphi)$

$$\frac{\partial^2 (F(r)\phi(\varphi))}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial (F(r)\phi(\varphi))}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 (F(r)\phi(\varphi))}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\phi(\varphi)\,F''(r) + \frac{\phi(\varphi)}{r}F'(r) + \frac{F(r)}{r^2}\phi''(\varphi) = 0$$

$$\frac{F(r)}{r^2}\phi''(\varphi) = -\phi(\varphi)F''(r) - \frac{\phi(\varphi)}{r}F'(r)$$

$$-\frac{F(r)}{r^2}\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = F''(r) + \frac{1}{r}F'(r)$$

$$-\frac{\phi''(\varphi)}{r^2\,\phi(\varphi)} = \frac{F''(r) + \frac{1}{r}F'(r)}{F(r)} \overset{!}{=} \pm\lambda^2$$

$$-\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = \frac{r^2F''(r) + rF'(r)}{F(r)} = \pm\lambda^2$$

Das r haben die in der Lösung vergessen? taucht aber wieder auf, also scheint zu passen...

Eigenwertgleichungen

$$r^2F''(r) + rF'(r) \pm \lambda^2 F(r) = 0$$

$$\phi''(\varphi) \pm \lambda^2 \phi(\varphi) = 0$$

4

d) $\Phi''(\varphi) \pm \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0$

Inhomogene Randbedingung für $r = R$ muss mit Reihenentwicklung von $\Phi(\varphi)$ erfüllt werden $\rightarrow + \lambda^2$ für Lösungsansatz mit orthogonalen Funktionen

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2$$ (weil vorher auf linker Seite ein − war)

$$\Phi(\varphi) = A\cos(\lambda\varphi) + B\sin(\lambda\varphi)$$

$\varphi = 0$: $u(r, \varphi = 0) = 0$

$$F(r)\Phi(0) = 0$$

$$A\cos(0) + B\sin(0) = 0 \qquad A = 0$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$: $\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = 0$

$$F(r)\Phi'(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$\lambda B\cos(\lambda\tfrac{\pi}{2}) = 0 \qquad \lambda \neq 0 \text{, sonst trivial}$$

$$B\cos(\lambda\tfrac{\pi}{2}) = 0 \qquad B \neq 0 \text{, sonst trivial}$$

$$\cos(\lambda\tfrac{\pi}{2}) = 0 \qquad \lambda_n = 2n-1 \ ; \ n = 1, 2, \ldots$$

$\Phi(\varphi) = B\sin(\lambda_n\varphi)$ mit $\lambda_n = 2n-1 \ ; \ n = 1, 2, \ldots$

e) $$\frac{r^2F'' + rF'}{F} = \lambda^2$$

~~$F(r) = A r^{\lambda} + B r^{-\lambda}$~~

$$F(r) = Cr^{\lambda_n} + Dr^{-\lambda_n}$$

$r \rightarrow 0$: $u(r = 0, \varphi) = 0$

$$F(0)\Phi(\varphi) = 0$$

$$F(0) = 0$$

$$\underbrace{C0^{\lambda_n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{D0^{-\lambda_n}}_{\rightarrow \infty} = 0 \qquad D = 0$$

$$F(r) = Cr^{\lambda_n}$$

$u(r, \varphi) = Cr^{\lambda_n}B\sin(\lambda_n\varphi)$; Konstanten zusammenfassen

$u(r, \varphi) = E_n r^{\lambda_n}\sin(\lambda_n\varphi)$; $\lambda_n = 1, 3, 5, \ldots$

Lösung mit verbleibender RB (der inhomogenen)

$$r = R: \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\tau_w}{\mu_L}$$

$$\phi(\varphi)\, F'(R) = \frac{\tau_w}{\mu_L}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n R^{\lambda_n - 1} \lambda_n \sin(\varphi \cdot \lambda_n) = \frac{\tau_w}{\mu_L} \qquad \Big| \cdot \sin(\varphi \lambda_m) \quad \Big|\Big| \int_0^{\pi/2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n R^{\lambda_n - 1} \lambda_n \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin(\varphi \lambda_n) \sin(\varphi \lambda_m)\, d\varphi}_{=0 \text{ für } n \neq m} = \frac{\tau_w}{\mu_L} \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi \lambda_m)\, d\varphi$$

$$E_n R^{\lambda_n - 1} \lambda_n \int_0^{\pi/2} \sin(\lambda_n \varphi)^2\, d\varphi = \frac{\tau_w}{\mu_L} \int_0^{\pi/2} \sin(\lambda_n \varphi)\, d\varphi$$

$$E_n = \frac{4 \tau_w R^{1-\lambda_n}}{\mu_L \cdot \lambda_n^2 \pi}$$

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \tau_w R^{1-\lambda_n}}{\pi \mu_L \lambda_n^2}\, r^{\lambda_n} \sin(\lambda_n \varphi) \quad \text{mit} \quad \lambda_n = 1, 3, 5, \ldots$$

Numerik Probeklausur 1

① Single choice Fragen

1) Was erreicht man durch die Linienmethode?

- Die Zeit- und Raumdiskretisierung können getrennt voneinander durchgeführt werden

2) Welche Welle enthält die exakte Lösung des Riemann-Problems $u_L = 0$ $u_r = 2$ für die Burgersgleichung und welcher Wert ergibt sich an der Stelle $x = 1$ $t = 1$? $u_t + u u_x = 0$ $u(t,0) = \begin{cases} u_L & \text{für } x<0 \\ u_R & \text{für } x>0 \end{cases}$

- $u(x=1, t=1) = 1$, Verdünnung

3) Wie viele Einträge besitzt die Elementlokale Massenmatrix bei einem Finite-Element-Verfahren unter Verwendung von Tensorprodukt-Lagrange-Basisfunktionen 3. Grades in zwei Raumdimensionen?

- 256

4) Sind Differenzenverfahren zur Approximation von Probleme mit unstetigen Lösungen geeignet?

- Nein, das Aufstellen des Differenzenquotienten erfolgt unter der Annahme einer differenzierbaren Lösung

① Rechenaufgaben

a)
$$h_t + (hv)_x = 0 \longrightarrow u_t + f(u)_x = 0$$
$$(hv)_t + (hv^2 + \tfrac{1}{2} g h^2)_x = 0 \qquad u = (h, hv)^T$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u_t \, dx\, dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(u)_x \, dx\, dt = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_{n+1}) - u(x,t_n)\, dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i+1/2},t)) - f(u(x_{i-1/2},t))\, dt = 0$$

Räumliches Zeitmittelwert
$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x,t_n)\, dx$$

Zeitlich gemittelter Fluss
$$f_{i\pm 1/2}^n := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{i\pm 1/2},t))\, dt$$

Approximation durch numerischen Fluss
$$g_{i\pm 1/2}^n \approx f_{i\pm 1/2}^n$$

Erhaltungsgleichung in integraler Form
$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(g_{i+1/2}^n - g_{i-1/2}^n\right)$$

b) $\begin{pmatrix} h \\ hv \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ hv \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\nearrow A$

$f_1 = hv \qquad f_2 = hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 = \frac{(hv)^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2$

$\frac{\partial f_1}{\partial h} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial h} = gh - v^2$

$\frac{\partial f_1}{\partial hv} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial hv} = 2v$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh-v^2 & 2v \end{pmatrix}$

c) $h_t + (vh)_x = 0$

$v_t + (\frac{1}{2}v^2 + gh)_x = 0$

$V_t + B(V)V_x = 0 \qquad V = \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} v & h \\ g & v \end{pmatrix}$

$\left| \begin{pmatrix} v-\lambda & h \\ g & v-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0$

$(v-\lambda)(v-\lambda) - (h \cdot g) = 0$

$v^2 - v\lambda - \lambda v + \lambda^2 - hg = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{+2v \pm \sqrt{(-2v)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (v^2 - hg)}}{2 \cdot 1}$

$= \frac{2v \pm \sqrt{4v^2 - 4v^2 + 4hg}}{2}$

$= v \pm \sqrt{hg} \qquad \lambda_1 = v + \sqrt{hg} \qquad \lambda_2 = v - \sqrt{hg}$

λ_1:

$\left(\begin{matrix} v - v + \sqrt{hg} & h \\ g & v - v + \sqrt{hg} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \qquad c = \sqrt{gh}$

$\left(\begin{matrix} c & h \\ g & c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c}{h} \end{pmatrix}$

λ_2:

$\left(\begin{matrix} -c & h \\ g & -c \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \qquad V = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{c}{h} \end{pmatrix}$

Numerik Probeklausur

d) $w_1 + \Lambda w_2 = 0$ mit $\Lambda = \begin{pmatrix} v+\sqrt{gh} & 0 \\ 0 & v-\sqrt{gh} \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ c/h & -c/h \end{pmatrix}$ $\qquad R^{-1} = \frac{1}{+(c/h)\cdot 2} \begin{pmatrix} -c/h & -1 \\ -c/h & 1 \end{pmatrix}$

$$w = R^{-1} u = \frac{1}{2\frac{c}{h}} \begin{pmatrix} -c/h & -1 \\ -c/h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2c/h}\left(-c - v\right) \\ \frac{1}{2c/h}\left(-\frac{ch}{h} + v\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{hv}{c} - h \\ \frac{hv}{c} - h \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{h}{2} \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{gh}} + 1 \\ \frac{v}{-\sqrt{gh}} + 1 \end{pmatrix}$$

Andere VZ → weil EW in anderer Reihenfolge kein Fehler (?)

(2) Kurzfrage:

$$S = \begin{pmatrix} * & a_{3,2} & a_{2,1}+b_{1,3} & * & * & * \\ * & a_{3,1} & * & * & * & c_{3,1}+d_{3,2} \\ * & * & a_{1,1}+b_{1,1}+c_{3,3} & * & * & c_{2,1} \\ * & * & * \; +d_{3,3} & * & * & * \end{pmatrix}$$

Analytik Altklausur WS 19/20

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \text{mit} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c} \qquad \text{Linear, zweiter Grades}$$

a) $B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot -a = 0 \rightarrow$ Parabolisch

b) AB :

$t = 0 \qquad T(t=0,y) = T_F$

RB :

$y = 0 \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{\dot q_w}{\lambda}$

$y = D \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=D} = -\frac{\alpha}{\lambda}(T - T_F)$

c) $\tilde T = T - T_F \qquad \tilde y = \frac{y}{D} \qquad \tilde t = \frac{at}{D^2}$

$T = \tilde T + T_F \qquad y = \tilde y D \qquad t = \frac{\tilde t D^2}{a}$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tilde t}\frac{\partial \tilde t}{\partial t} = \left(\frac{D^2}{a}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \tilde t}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \tilde y}\frac{\partial \tilde y}{\partial y} = \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial \tilde y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{D^2}\frac{\partial^2}{\partial \tilde y^2} \longrightarrow \left(\frac{D^2}{a}\right)^{-1}\frac{\partial \tilde T}{\partial \tilde t} = a\frac{1}{D^2}\frac{\partial^2 \tilde T}{\partial \tilde y^2} \rightarrow \frac{\partial \tilde T}{\partial \tilde t} = \frac{\partial^2 \tilde T}{\partial \tilde y^2}$$

In Rand- und Anfangsbedingungen

$\tilde y = 0 \; : \; \frac{1}{D}\left.\frac{\partial(\tilde T + T_F)}{\partial \tilde y}\right|_{\tilde y=0} = -\frac{\dot q_w}{\lambda}$

$\left.\frac{\partial \tilde T}{\partial \tilde y}\right|_{\tilde y=0} = -\frac{D\dot q_w}{\lambda}$

$\tilde y = 1 \; : \; \frac{1}{D}\left.\frac{\partial(\tilde T + T_F)}{\partial \tilde y}\right|_{\tilde y=0} = -\frac{\alpha}{\lambda}(\tilde T + T_F - T_F)$

$\left.\frac{\partial \tilde T}{\partial \tilde y}\right|_{\tilde y=D} = \underbrace{-\frac{\alpha D}{\lambda}}_{\text{Biot-Zahl}}\tilde T$

$\tilde t = 0 \; : \; \tilde T(\tilde t = 0, \tilde y) = 0$

Biotzahl ist Wärmeleitwiederstand zu Wärmeübergangswiederstand

d) $\tilde T = \tilde T_h + \tilde T_p$

Ansatz $\tilde T_p = a\tilde y + b$

$\tilde y = 0 : a = -\frac{D\dot q_w}{\lambda}$

$\tilde y = 1 : a = -\frac{\alpha D}{\lambda}(a + b)$

$b = \frac{\dot q_w(D\alpha + \lambda)}{\lambda\alpha} = \frac{D\dot q_w(Bi - 1)}{\lambda Bi}$

2

~~$\tilde{T}_p = \frac{D\dot{q}_w}{\lambda}\tilde{y} + \frac{\dot{q}_w(D\alpha \frac{\tilde{y}}{}+\lambda)}{\lambda\alpha}$~~

$$\tilde{T}_p = -\frac{D\dot{q}_w}{\lambda}\tilde{y} + \frac{D\dot{q}_w(Bi-1)}{Bi\,\lambda}$$

e) Ansatz $\tilde{T}_h = F(\tilde{y})\,G(\tilde{t})$ Einsetzen in $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2}$

$$\frac{\partial F(\tilde{y})G(\tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 F(\tilde{y})G(\tilde{t})}{\partial \tilde{y}^2}$$

$$F(\tilde{y})\,G'(\tilde{t}) = G(\tilde{t})\,F''(\tilde{y})$$

$$\frac{F(\tilde{y})}{F''(\tilde{y})} = \frac{G(\tilde{t})}{G'(\tilde{t})} = \pm\lambda^2$$

Entscheidung : $-\lambda^2$

$$F(\tilde{y}) = A\cos(\lambda\tilde{y}) + B\sin(\lambda\tilde{y})$$

$$G(\tilde{t}) = C\,e^{-\lambda^2\tilde{t}}$$

$$\tilde{T}_h = C e^{-\lambda^2\tilde{t}}(A\cos(\lambda\tilde{y}) + B\sin(\lambda\tilde{y}))$$ konst. zusammenfassen

$$\tilde{T}_h = e^{-\lambda^2\tilde{t}}(A\cos(\lambda\tilde{y}) + B\sin(\lambda\tilde{y}))$$

f) Randbedingungen, Anfangsbedingungen

$\tilde{y} = 0$: $\left.\frac{\partial \tilde{T}_p + \tilde{T}_h}{\partial \tilde{y}}\right|_{\tilde{y}=0} = -\frac{D\dot{q}_w}{\lambda}$ $\tilde{T}_p$ erfüllt bereits inhomogene RB

$$\left.\frac{\partial \tilde{T}_h}{\partial \tilde{y}}\right|_{\tilde{y}=0} = 0$$

$$e^{-\lambda^2\tilde{t}}(-\lambda A\underbrace{\cancel{\sin(\lambda\tilde{y})}}_{=0} + \lambda B\underbrace{\cos(\lambda\tilde{y})}_{=1}) = 0$$

$$e^{-\lambda^2\tilde{t}}\,\lambda B = 0 \rightarrow B = 0$$

$\tilde{y} = 1$: $\left.\frac{\partial \tilde{T}_p + \tilde{T}_h}{\partial \tilde{y}}\right|_{\tilde{y}=1} = -\frac{\alpha D}{\lambda}(\tilde{T}_p + \tilde{T}_h)$ → $\tilde{T}_p$ erfüllt diesen Teil

$$\left.\frac{\partial \tilde{T}_h}{\partial \tilde{y}}\right|_{\tilde{y}=1} = -\frac{\alpha D}{\lambda}\tilde{T}_h$$

$$\cancel{e^{-\lambda^2\tilde{t}}}(-\lambda\cancel{A}\sin(\lambda\cdot 1)) = -\frac{\alpha D}{\lambda}\cancel{e^{-\lambda^2\tilde{t}}}(\cancel{A}\cos(\lambda\cdot 1))$$

$$\tan(\lambda) = \frac{\alpha D}{\lambda^2}$$

$$\tan(\lambda) = \frac{Bi}{\lambda}$$

$\tilde{t} = 0$: $\tilde{T}_p + \tilde{T}_h = 0$ hier $\tilde{T}_h = 0$

$$\tilde{T}_h = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\cancel{e^{-\lambda_n^2\tilde{t}}}}_{=1} A_n\cos(\lambda_n\tilde{y}) + \tilde{T}_p = 0$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\lambda_n\tilde{y}) + \tilde{T}_p = 0 \quad |\cdot\cos(\lambda_m\tilde{y}) \quad |\int_0^{1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\int_0^1 \cos(\lambda_n\tilde{y})\cos(\lambda_m\tilde{y})\,d\tilde{y}}_{0 \text{ für } m\neq n} = \int_0^1 -\tilde{T}_p\cos(\lambda_n\tilde{y})\,d\tilde{y}$$

$$A_n \underbrace{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n \tilde{y})\, d\tilde{y}}_{I_1} = \underbrace{\int_0^1 -\tilde{T}_0 \cos(\lambda_m \tilde{y})\, d\tilde{y}}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{\sin(2\lambda)}{4\lambda} + \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \frac{(Bi(\cos(\lambda)-1) + \lambda \cdot \sin(\lambda)) \cdot d \cdot \dot{q}_w}{Bi\, \lambda^2}$$

$$A_n = \frac{4\,(Bi(\cos(\lambda)-1) + \lambda \sin(\lambda))\, D \dot{q}_w}{Bi\, \lambda^2 (\sin(2\lambda) + 2\lambda)}$$

In der Lösung kürzt sich alles raus ??

↳ von vorher: $\tan(\lambda) = \frac{Bi}{\lambda}$

$\rightarrow Bi \cos(\lambda) = \lambda \sin(\lambda)$

$$A_n = \frac{4\,(\lambda \sin(\lambda) - Bi) + \lambda \sin(\lambda))\, D \dot{q}_w}{Bi\, \lambda^2 (\sin(2\lambda) + 2\lambda)}$$

$\sin(2\lambda) = 2 \cdot \sin(\lambda) \cos(\lambda)$